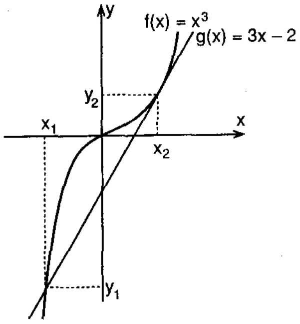
Örnek:

Şekilde grafiği verilen $f(x) = x^3$ ve $g(x) = 3x - 2$ fonksiyonunun ortak noktalarını bulalım.



Çözüm:

f(x) ve g(x) fonksiyonlarının eşitlenmesiyle elde edilen denklemin reel kökleri bu iki fonksiyonun ortak noktalarının apsisleridir. Buna göre,

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Rightarrow x^3 = 3x - 2 \\ &\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \\ &\Rightarrow x^3 - 3x + 2 + 1 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow x^3 - 1 - 3x + 3 = 0 \\ &\Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) - 3(x - 1) = 0 \\ &\Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \\ &\Rightarrow (x-1).(x-1).(x+2) = 0 \\ &\Rightarrow (x-1)^2.(x+2) = 0 \end{aligned}$$

$x_1 = -2$ için $y_1 = f(-2) = g(-2) = -8$

$x_2 = x_3 = 1$ (iki kat kök) için $y_2 = f(1) = g(1) = 1$

olduğundan f(x) ve g(x) fonksiyonu (− 2, 8) noktasında kesişirler. (1, 1) noktasında ise teğet olurlar.

D. EŞİT FONKSİYONLAR

$f : A \to B$, $f(x) = y$ ve $g : A \to B$, $g(x) = y$ olmak üzere,

$\forall x \in A$ için $f(x) = g(x)$ ise f ve g fonksiyonlarına **eşit fonksiyonlar** denir ve **f = g** ile gösterilir.

Örnek:

$A = \{0, 1, 2\}$ ve $B = \{-1, 0, 1, 3\}$ kümeleri ile

$f : A \to B$, $f(x) = x^2 - 1$ ve

$g : A \to B$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

fonksiyonları veriliyor.

f ve g fonksiyonlarının eşit fonksiyonlar olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$f(x) = x^2 - 1$ ve $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ veriliyor.

$x = 0$ için $f(0) = g(0) = -1$,

$x = 1$ için $f(1) = g(1) = 0$,

$x = 2$ için $f(2) = g(2) = 3$ olduğundan, $f = g$ dir.

$f = g = \{(0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$ olur.

E. FONKSİYONLARDA İŞLEMLER

$f : A \to R$, $g : B \to R$ ve $A \cap B \neq \varnothing$ olmak üzere,

1) $(f \pm g) : (A \cap B) \to R$ ve $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

2) $(f . g) : (A \cap B) \to R$ ve $(f . g)(x) = f(x) . g(x)$

$c \in R$ olmak üzere,

$(c . f) : A \to R$ ve $(c . f)(x) = c . f(x)$

3) $\dfrac{f}{g} : (A \cap B) \to R$ ve $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad (g(x) \neq 0)$

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = x + 1$ ve $g : R \to R$, $g(x) = x^2 + 1$ fonksiyonları veriliyor.

1) $(3f + 2g)(x)$ **2)** $(g - 2f)(x)$ **3)** $(f.g)(x)$

4) $\left(\dfrac{f - g}{f + g}\right)(x)$ **5)** $h(x) = 1 + x^4 - x^2.f(x)$

fonksiyonlarını bulalım.

Çözüm:

1) $(3f + 2g)(x) = 3f(x) + 2g(x) = 3(x + 1) + 2(x^2 + 1)$,
$= 2x^2 + 3x + 5$,

2) $(g - 2f)(x) = g(x) - 2f(x) = x^2 + 1 - 2(x + 1)$
$= x^2 - 2x - 1$,

3) $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x + 1)(x^2 + 1)$
$= x^3 + x^2 + x + 1$,

4) $\left(\dfrac{f - g}{f + g}\right)(x) = \dfrac{x + 1 - (x^2 + 1)}{x + 1 + x^2 + 1} = \dfrac{x - x^2}{x^2 + x + 2}$

5) $h(x) = 1 + x^4 - x^2.f(x) = 1 + x^4 - x^2(x + 1)$
$= x^4 - x^3 - x^2 + 1$

şeklinde bulunur.

Örnek:

$A = \{-2, -1, 0, 1, 5\}$ ve $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ kümeleri ile, $f : A \to R$, $f(x) = 2^{x+1}$ ve $g : B \to R$, $g(x) = x^2 - 1$ fonksiyonları veriliyor.

$\dfrac{2f.g}{f + g}$ fonksiyonunu ve görüntü kümesini bulalım.

Çözüm:

$\dfrac{2f.g}{f + g} = h$ diyelim.

$A \cap B = \{-1, 0, 1\}$ olduğundan $h : (A \cap B) \to R$ dir.

Buna göre, $h(x) = \dfrac{2f(x).g(x)}{f(x) + g(x)}$ olduğundan,

$$h(-1) = \frac{2.f(-1).g(-1)}{f(-1) + g(-1)} = \frac{2.2^{-1+1}.((-1)^2 - 1)}{2^{-1+1} + (-1)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow h(-1) = 0,$$

$$h(0) = \frac{2.f(0).g(0)}{f(0) + g(0)} = \frac{2.2^{0+1}.(0^2 - 1)}{2^{0+1} + 0^2 - 1}$$

$$\Rightarrow h(0) = -4,$$

$$h(1) = \frac{2.f(1).g(1)}{f(1) + g(1)} = \frac{2.2^{1+1}.(1^2 - 1)}{2^{1+1} + 1^2 - 1}$$

$$\Rightarrow h(1) = 0 \text{ dır.}$$

O halde, $h(A \cap B) = (\dfrac{2f.g}{f+g})(A \cap B) = \{0, -4\}$ ve

$h = \dfrac{2f.g}{f+g} = \{(-1, 0), (0, -4), (1, 0)\}$ olur.

Örnek:

f ve g, A dan R ye birer fonksiyondur.

$f(x) = \dfrac{3x+1}{4}$, $g(x) = \dfrac{x-1}{4}$ ve $(f-g)(A) = [-1, 3)$

olduğuna göre, $(f - g)$ fonksiyonunun tanım aralığını ve $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının görüntü kümesini bulalım.

Çözüm:

$f(x) = \dfrac{3x+1}{4}$ ve $g(x) = \dfrac{x-1}{4}$ olduğundan,

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{3x+1}{4} - \frac{x-1}{4}$$

$$\Rightarrow (f-g)(x) = \frac{x+1}{2} \text{ dir.}$$

$$(f-g)(A) = [-1, 3) \Rightarrow -1 \le (f-g)(x) < 3$$

$$\Rightarrow -1 \le \frac{x+1}{2} < 3$$

$$\Rightarrow -2 \le x + 1 < 6$$

$$\Rightarrow -3 \le x < 5 \text{ tir.}$$

Buna göre, $A = [-3, 5)$ olur.

$f(x)$ ve $g(x)$ doğrusal iki fonksiyon olduğundan f ve g nin tanım aralığının, $-3 \le x < 5$ uç noktaları $f(x)$ ve $g(x)$ te yerine yazılarak f ve g nin görüntü kümeleri bulanabilir.

O halde,

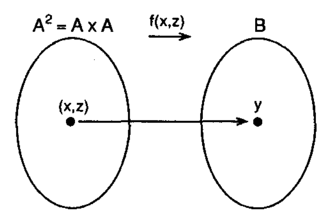
$$f(A) = [\frac{3.(-3)+1}{4}, \frac{3.5+1}{4}) \Rightarrow f(A) = [-2, 4)$$

$$g(A) = [\frac{-3-1}{4}, \frac{5-1}{4}) \Rightarrow g(A) = [-1, 1)$$

olarak bulunur.

Uyarı:

A boş olmayan bir küme olsun. A x A nın boş olmayan herhangi bir alt kümesinden B ye tanımlanan bir fonksiyona ***iki değişkenli*** *fonksiyon denir ve $f : (A \times A) \to B$, $f : (x, z) \to y$, $y = f(x, z)$ şeklinde gösterilir.*



$f : A^2 \to B$, $y = f(x, z)$ dir.

Örnek:

$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ olduğuna göre, $f^3(1999, 2001)$ değerini bulalım.

Çözüm:

$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

$\Rightarrow f(x, y) = (x - y)^3$ tür. Buna göre,

$\Rightarrow f^3(x, y) = [f(x, y)]^3 = (x - y)^9$

$\Rightarrow f^3(1999, 2001) = (1999 - 2001)^9$

$= (-2)^9$

$= -512$ dir.

Örnek:

x ve y pozitif reel sayılar olmak üzere,

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$ olarak veriliyor.

$f(\frac{1}{2}) = 3$ olduğuna göre, f(4) ün değerini bulalım.

Çözüm:

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$ olduğundan,

$$\begin{array}{rl} & f(\frac{4}{1}) = f(4) - f(1) \\ + & f(\frac{1}{2}) = f(1) - f(2) \\ \hline & f(4) + f(\frac{1}{2}) = f(4) - f(2) \end{array}$$

$\Rightarrow f(4) + 3 = -[f(2) - f(4)]$

$\Rightarrow f(4) + 3 = -f(\frac{2}{4}) \Rightarrow f(4) = -3 - f(\frac{1}{2})$

$= -6$ dır.

F. FONKSİYON TÜRLERİ

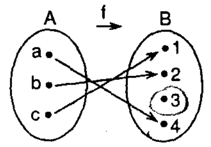
1) Bire Bir Fonksiyon

Bir fonksiyonun tanım kümesindeki farklı her elemanın görüntüsü de farklı ise bu tip fonksiyona bire bir fonksiyon denir. Buna göre,

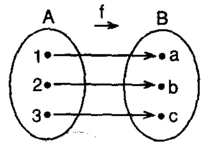
$s(A) \leq s(B)$ olmak üzere,

$f : A \to B$, $y = f(x)$ kuralı ile tanımlı f fonksiyonu bire bir ise,

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ya da $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ olmalıdır.



$f : A \to B$ ye bire bir fonksiyon



$f : A \to B$ ye bire bir fonksiyon

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = 2x^3 + 1$ fonksiyonunun bire bir olup olmadığını bulalım.

Çözüm:

$f(x) = 2x^3 + 1$ olduğundan $f(x_1) = x_1^3 + 1$ ve $f(x_2) = 2x_2^3 + 1$ olur. O halde,

$f(x_1) = f(x_2)$ eşitliğinden,

$2x_1^3 + 1 = 2x_2^3 + 1 \Rightarrow 2x_1^3 = 2x_2^3$

$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ dir.

Buna göre, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ kuralı sağlandığından, $f : R \to R$, $f(x) = 2x^3 + 1$ bire bir fonksiyondur.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = 3x^2 - 1$ fonksiyonunun bire bir olup olmadığını bulalım.

Çözüm:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1^2 - 1 = 3x_2^2 - 1 \Rightarrow 3x_1^2 = 3x_2^2$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow |x_1| = |x_2|$

$\Rightarrow x_1 = \pm x_2$

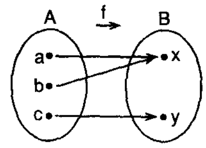
olduğundan f fonksiyonu bire bir değildir.

2) Örten Fonksiyon

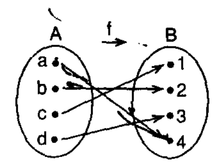
Değer kümesi ile görüntü kümesi eşit olan fonksiyonlara örten fonksiyon denir. Buna göre,

$s(A) \geq s(B)$ olmak üzere,

$f : A \to B$, $y = f(x)$ kuralı ile tanımlı f fonksiyonu örten ise $f(A) = B$ dir. Ya da $f : A \to B$ ve $f(A) = B$ ise (f nin değer kümesinde boşta eleman kalmıyorsa) f örten fonksiyondur.



$f : A \to B$ ye örten fonksiyon



$f : A \to B$ ye örten fonksiyon

Örnek:

$A = \{-1, 0, 1\}$ ve $f : A \to A$, $f(x) = x^3$ fonksiyonunun örten olup olmadığını bulalım.

Çözüm:

$f(-1) = (-1)^3 = -1$, $f(0) = 0^3 = 0$, $f(1) = 1^3 = 1$ olduğuna göre, $f(A) = \{-1, 0, 1\}$ dir. Buna göre, $f(A) = A$ olduğundan f örten fonksiyondur.

A dan B ye tanımlanmış bir f fonksiyonu hem bire bir, hem de örten ise f fonksiyonuna **bire bir ve örten fonksiyon** denir.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = 4 - 3x$ fonksiyonunun bire bir ve örten fonksiyon olduğunu gösterelim.

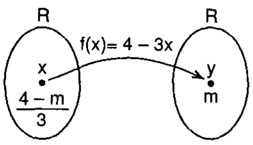
Çözüm:

$f : R \to R$ ye f fonksiyonunun örten olması için $f(R) = R$ olmalıdır.

O halde, değer kümesinin herhangi bir elemanına m diyelim. Buradan,

$$m = 4 - 3x \Rightarrow x = \frac{4-m}{3}$$

olur. Buna göre,



$m \in R$ için $\frac{4-m}{3} \in R$ olduğundan, değer kümesindeki her m gerçel (reel) sayısı, tanım kümesindeki bir gerçel (reel) sayının görüntüsüdür. O halde, $f(x) = 4 - 3x$ örten bir fonksiyondur.

Ayrıca,

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 4 - 3x_1 = 4 - 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

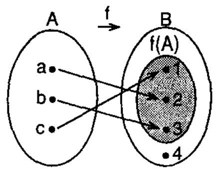
olduğundan $f(x) = 4 - 3x$ bire bir fonksiyondur.

Buna göre, f(x) fonksiyonu hem bire bir hem örten fonksiyon olduğundan, f(x) bire bir ve örten fonksiyondur.

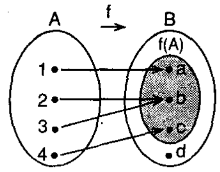
3) İçine Fonksiyon

Görüntü kümeşi değer kümesinin öz alt kümesi olan fonksiyonlara içine fonksiyon denir.

$f : A \to B$, $y = f(x)$ kuralı ile tanımlı f fonksiyonunun içine fonksiyon olması için $f(A) \subset B$ ve $f(A) \neq B$ olmalıdır.



$f : A \to B$ ye
içine fonksiyon



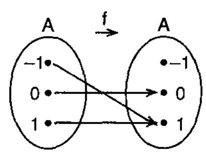
$f : A \to B$ ye
içine fonksiyon

Örnek:

$A = \{-1, 0, 1\}$ ve $f : A \to A$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun içine fonksiyon olduğunu bulalım.

Çözüm:

$f(-1) = (-1)^2 = 1$, $f(0) = 0^2 = 0$, $f(1) = 1^2 = 1$ olduğuna göre, $f(A) = \{0, 1\}$ dir. Buna göre, $f(A) \subset A$ ve $f(A) \neq A$ olduğundan f, içine fonksiyondur.



A dan B ye tanımlanmış bir f fonksiyonu hem bire bir, hem de içine fonksiyon ise f fonksiyonuna **bire bir ve içine fonksiyon** denir.

Örnek:

$f : Z \to Z$, $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonunu inceleyelim.

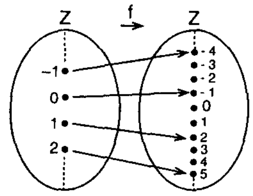
Çözüm:

$\forall x_1, x_2 \in Z$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

olduğundan f fonksiyonu bire bir fonksiyondur.

Ayrıca, $\forall x_1, x_2 \in Z$ için, $f(Z) = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, \ldots\}$ yani, görüntü kümesinin elemanları sadece, 3 ile bölündüğünde 2 kalanını veren tamsayılardır, bütün tamsayılar değildir. O halde, $f(Z) \subset Z$ ve $f(Z) \neq Z$ olduğundan $f(x) = 3x - 1$ örten fonksiyon değil, içine fonksiyondur.



Veya ikinci yol olarak; değer kümesinin herhangi bir elemanı $m \in Z$ olsun. Buradan,

$$m = 3x - 1 \Rightarrow x = \frac{m+1}{3} \text{ olur.}$$

$\forall m \in Z$ için $\frac{m+1}{3}$ daima tamsayı olmadığından

$\frac{m+1}{3}$ tanım kümesindeki her elemana karşılık

gelmez.

O halde, f fonksiyonu örten değil, içine fonksiyondur. Dolayısıyla $f : Z \to Z$, $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonu bire bir ve içinedir.

Uyarı:

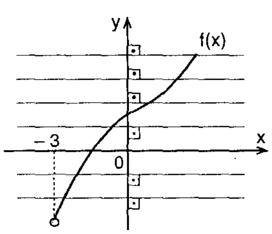
Grafiği verilen bir f fonksiyonunun türünü belirlemek için, f fonksiyonun görüntü kümesinin her elemanından görüntü kümesinin elemanlarının bulunduğu eksene ($y = f(x)$ için y eksenine, $x = f(y)$ için x eksenine) dikmeler çizilir:

1) Grafiği kesmeyen dikme varsa, f içine fonksiyondur.

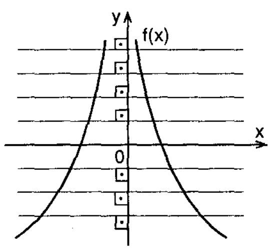
2) Grafiği kesmeyen dikme yoksa, örten fonksiyondur.

3) Grafiği kesen bütün dikmeler, grafiği sadece bir noktada kesiyorsa (birden fazla noktada kesmiyorsa) f bire bir fonksiyondur.

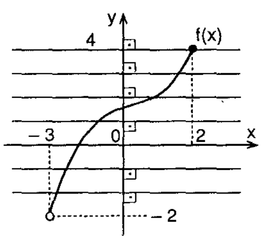
Örnek:



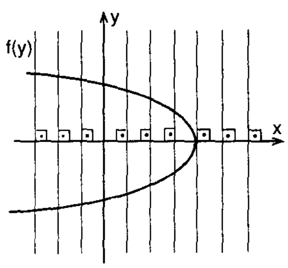
$f : (-3, \infty) \to R$
bire bir ve içine



$f : R - \{0\} \to R$
örtendir, bire bir değil



$f : (-3, 2] \to (-2, 4]$
bire bir ve örten



$f : R \to R$
bire bir ve örten değil

Bire bir fonksiyon sayısı:

$s(A) = m$, $s(B) = n$ ve $n \geq m$ olmak üzere, A dan B ye tanımlanabilecek bire bir fonksiyonların sayısı,

$$\boxed{P(n, m) = \frac{n!}{(n-m)!}}$$ ve

$n = m$ olmak üzere, A dan B ye bire bir ve örten fonksiyonların sayısı,

$$\boxed{P(n, m) = n!}$$ dir.

Örnek:

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere, A da tanımlanabilecek bire bir ve örten fonksiyonların sayısını ve A dan B ye tanımlanabilecek bire bir olmayan fonksiyonların sayısını bulalım.

Çözüm:

$s(A) = 3$ olduğundan, A da tanımlanabilecek bire bir ve örten fonksiyonların sayısı $P(3, 3) = 3! = 6$ dır.

$s(A) = 3$ ve $s(B) = 5$ olduğundan A dan B ye tanımlanabilecek bütün fonksiyonların sayısı $5^3 = 125$ ve bire bir fonksiyonların sayısı $P(5, 3) = 5.4.3 = 60$ olduğundan, bire bir olmayan fonksiyonların sayısı, $125 - 60 = 65$ tir.

4) Birim (Özdeş) Fonksiyon

Tanım kümesindeki her elemanı yine kendisine eşleyen fonksiyona birim fonksiyon denir ve I ile gösterilir.

$I : A \to A$, $I(x) = x$ veya $f(x) = x$ birim fonksiyondur.

Örnek:

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $f : A \to A$, $f(x) = x$ fonksiyonunu liste biçiminde yazıp, görüntü kümesini bulalım.

Çözüm:

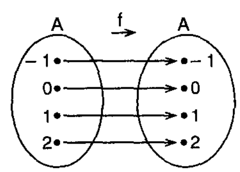
$f(x) = x \Rightarrow f(-1) = -1$,

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$

olduğundan,

$f = \{(-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$

$f(A) = \{-1, 0, 1, 2\}$ dir.



$f : A \to A$ ya birim (özdeş) fonksiyon

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = (3a - 1)x + 6b + 8$ fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre, $a - b$ farkını bulalım.

Çözüm:

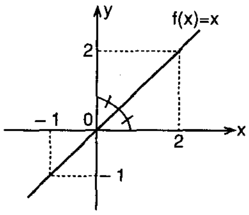
f fonksiyonu birim fonksiyon ise x in katsayısı 1 ve sabit terim 0 (sıfır) olmalıdır. Buna göre,

$3a - 1 = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$ ve $6b + 8 = 0 \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$

olduğundan $a - b = \frac{2}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = 2$ dir.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = x$ birim fonksiyonunun grafiği, aşağıdaki şekilde verilmiştir.



5) Sabit Fonksiyon ve Sıfır Fonksiyonu

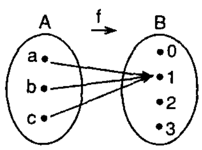
Tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü birbirine eşit ve sabit bir reel sayı oluyorsa bu fonksiyona sabit fonksiyon denir.

$\forall x \in A$ için $f : A \to B$, $\mathbf{f(x) = c = sabit}$, $c \in B$ ise **f sabit fonksiyon**dur.

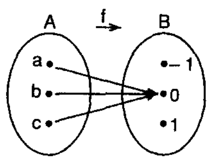
A dan B ye tanımlanabilecek sabit fonksiyon sayısı s(B) dir.

Özel olarak, **c = 0** (sıfır) ise f fonksiyonuna **sıfır fonksiyonu** denir.

Örnek:



$f : A \to B$ ye sabit fonksiyon
(A dan B ye 4 farklı sabit fonksiyon tanımlanabilir.)



$f : A \to B$ ye sıfır fonksiyonu
(A dan B ye 3 farklı sabit fonksiyon tanımlanabilir.)

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = (3n + 1)x + 6n - 1$ fonksiyonu sabit fonksiyondur.

Buna göre, f nin kuralını bulup, grafiğini çizelim.

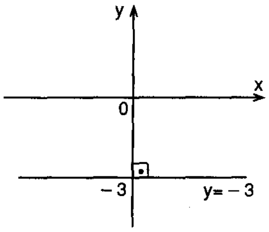
Çözüm:

f nin sabit fonksiyon olması için f(x) in değerinin x ten bağımsız olması gerekir. O halde, x in katsayısı 0 (sıfır) olmalıdır. Buna göre,

$3n + 1 = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{3}$ ve

$f(x) = 0.x + 6.\left(-\frac{1}{3}\right) - 1$ olur.

$\Rightarrow f(x) = -3$ olur.



Burada, x in bütün reel sayı değerleri için y nin değeri – 3 tür. $f(x) = -3$ ün grafiği şekildeki gibi olur.

Burada, $f(0) = -3$, $f(-5) = -3$, $f(\frac{1}{7}) = -3$, ... tür.

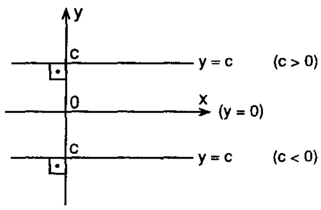
Örnek:

$c \in R$ olmak üzere,

$f : R \to R$,

$f(x) = c$

fonksiyonunun grafiği yandaki şekildeki gibidir.



Örnek:

m ve n reel sayılar olmak üzere,

$f : R \to R$, $f(x) = \frac{mx^2 - 3x + 3}{6x^2 + nx + 1}$ fonksiyonu sabit

fonksiyon olduğuna göre, $m - n$ farkını bulalım.

Çözüm:

1. yol:

$f(x) = c \in R \Rightarrow \frac{mx^2 - 3x + 3}{6x^2 + nx + 1} = c$

$\Rightarrow mx^2 - 3x + 3 = 6cx^2 + ncx + c$

Burada, aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olmalıdır. O halde,

$m = 6c, \quad -3 = nc, \quad 3 = c$

$\Rightarrow m = 18, \quad n = -1$

olduğundan, $m - n = 18 - (-1) = 19$ dur.

2. yol:

f(x) sabit fonksiyon olduğundan

$f(1) = f(0) = f(-1) = \ldots = 3$ olur. Buradan,

$$f(1) = \frac{m}{6+n+1} = 3 \Rightarrow m - 3n = 21$$

$$f(-1) = \frac{m+6}{6-n+1} = 3 \Rightarrow m + 3n = 15$$

$$+ \quad \overline{\quad 2m = 36 \quad}$$

$$\Rightarrow m = 18 \text{ ve } n = -1$$

olduğundan, $m - n = 19$ dur.

3. yol:

Pay ve paydadaki aynı dereceli terimlerin oranı birbirine eşitlenir. Buna göre,

$$\frac{m}{6} = \frac{-3}{n} = \frac{3}{1} \Rightarrow m = 18 \text{ ve } n = -1$$

$$m - n = 19 \text{ olur.}$$

Örnek:

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(a-3)x - 2}{x + a}$

fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre,

$f(0) + f(a)$ toplamının <u>en büyük</u> değerini bulalım.

Çözüm:

$f(0) = -\dfrac{2}{a}$ ve

$$\frac{a-3}{1} = \frac{-2}{a} \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a-2)(a-1) = 0 \text{ olduğundan,}$$

$a = 2$ için $f(0) = -1$ ve $f(0) + f(a) = -1 - 1 = -2$

$a = 1$ için $f(0) = -2$ ve $f(0) + f(a) = -2 - 2 = -4$

(f sabit fonksiyon olduğundan $f(a) = f(0)$ dır.)

Buna göre, $f(0) + f(a)$ toplamının en büyük değeri -2 dir.

6) Permütasyon Fonksiyon

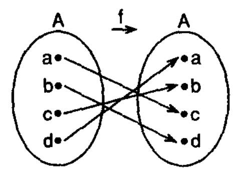
A sonlu (sayılabilir elemanlı) bir küme olmak üzere, $f : A \to A$ ya tanımlanabilecek bire bir her fonksiyona A nın bir permütasyonu denir.

Bu fonksiyonun tanım kümesi ile değer kümesi aynı olduğundan f fonksiyonu aynı zamanda örtendir.

Örnek:

$A = \{ a, b, c, d \}$ olmak üzere, A nın bir permütasyonu, $f = \{ (a, c), (b, d), (c, b), (d, a) \}$ olsun.

Bunu,



$f : A \to A$ ya bire bir ve örten fonksiyondur.

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{tanım kümesi} \\ \longrightarrow \text{değer (görüntü) kümesi} \end{array}$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada,

$f(a) = c$, $f(b) = d$, $f(c) = b$, $f(d) = a$ dır.

Ayrıca, $f : A \to A$ ya tanımlanabilecek permütasyon (bire bir ve örten) fonksiyon sayısı; $4! = 24$ tür.

7) Parçalı Fonksiyon

Tanım aralığının alt aralıklarında farklı birer kuralla tanımlanan fonksiyona **parçalı fonksiyon** denir. Alt aralıkların bölündüğü noktalara parçalı fonksiyonun **kritik noktaları** denir.

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 1 \text{ ise} \\ 2x + 1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonun kritik noktası $x = 1$ dir.

$x \leq 1$ ise $f(x) = 2 - x$ ve

$x > 1$ ise $f(x) = 2x + 1$

şeklinde tanımlıdır.

Bu fonksiyon için, $f(0) + f(1) + f(2)$ toplamını bulalım.

$0 \in (-\infty, 1]$ olduğundan $f(x) = 2 - x$ te x yerine 0 yazılırsa, $f(0) = 2 - 0 = 2$,

$1 \in (-\infty, 1]$ olduğundan $f(x) = 2 - x$ te x yerine 1 yazılırsa, $f(1) = 2 - 1 = 1$,

$2 \in (1, \infty)$ olduğundan $f(x) = 2x + 1$ de x yerine 2 yazılırsa, $f(2) = 2.2 + 1 = 5$ ve

$f(0) + f(1) + f(2) = 2 + 1 + 5 = 8$ dir.

8) Tek Fonksiyon Ve Çift Fonksiyon

$f : A \to R$ ye f fonksiyonu verilsin.

$\forall x \in A$ için $-x \in A$ olmak üzere,

$f(-x) = f(x)$ $\Leftrightarrow$ f fonksiyonu **çift fonksiyon**,

$f(-x) = -f(x)$ $\Leftrightarrow$ f fonksiyonu **tek fonksiyon**dur.

Örnek:

1) $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu,

$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$ olduğundan f çift fonksiyondur.

2) $f(x) = |x| + 3$ fonksiyonu,

$f(-x) = |-x| + 3 = |x| + 3 = f(x)$ olduğundan f çift fonksiyondur.

3) $f(x) = \cos x$ fonksiyonu,

$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ olduğundan f çift fonksiyondur.

4) $f(x) = x^3$ fonksiyonu,

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ olduğundan f tek fonksiyondur.

5) $f(x) = \sin x$ fonksiyonu,

$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ olduğundan f tek fonksiyondur.

6) $f(x) = 1 + x^3$ fonksiyonu için,

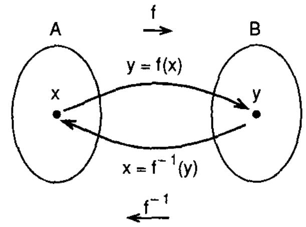
$f(-x) = 1 - x^3$ ve $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$ olduğundan, f fonksiyonu ne tek fonksiyon ne de çift fonksiyondur.

Uyarı:

*$f(x)$ **çift fonksiyon** ise grafiği **y – eksenine göre**, $f(x)$ **tek fonksiyon** ise grafiği **başlangıç noktasına (orijine) göre** simetriktir.*

G. BİR FONKSİYONUN TERSİ

$f : A \to B$, $y = f(x)$ bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere, $y = f(x)$ fonksiyonunun tersi; $f^{-1} : B \to A$, $x = f^{-1}(y)$ dir.



$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$

f fonksiyonu **A** dan **B** ye **bire bir** ve **örten** ise

$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ tir.

Ayrıca, $(f^{-1})^{-1} = f$ dir.

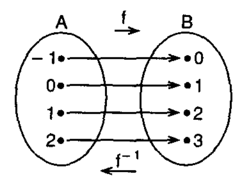
Örnek:

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $B = \{0, 1, 2, 3\}$ kümeleri veriliyor.

$f : A \to B$, $f : x \to x + 1$ fonksiyonunun tersini bulalım.

Çözüm:

$f(x) = x + 1 \Rightarrow f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ ve $f : A \to B$, $f = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ bire bir ve örten fonksiyon olduğundan,



$f^{-1} = B \to A$, $f^{-1} = \{(0, -1), (1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$ bire bir ve örten fonksiyondur.

Sonuç:

f^{-1} fonksiyonu, f nin elamanı olan ikililerin bileşenlerinin yerlerinin değiştirilmesiyle elde edildiğine göre, $y = f(x)$ eşitliğinde de x ile y nin yerleri değiştirilip y yalnız bırakılırsa, $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonu bulunur. Bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olması için bu fonksiyon bire bir ve örten olmalıdır.

Buna göre, yukarıda verilen örnekteki $f^{-1}: B \to A$ ya $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonunun kuralını $y = f(x) = x + 1$ denkleminden bulalım.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ x}}{f(x)} = \underset{\substack{\downarrow \\ y = f^{-1}(x)}}{y} = x + 1 \Leftrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ f^{-1}(x)}}{x} = y + 1$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = x - 1 \text{ dir.}$$

Örnek:

$f : R \to R,\ f(x) = 2x - 3$ ise $f^{-1}(x)$ i bulalım.

Çözüm:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ x}}{f(x)} = \underset{\substack{\downarrow \\ y = f^{-1}(x)}}{y} = 2x - 3 \Leftrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ f^{-1}(x)}}{x} = 2y - 3$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2} \text{ dir.}$$

Örnek:

$f : R \to R,\ f(x) = x^3 - 1$ bire bir ve örten fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1}(x)$ i bulalım.

Çözüm:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ x}}{f(x)} = \underset{\substack{\downarrow \\ y = f^{-1}(x)}}{y} = x^3 - 1 \Leftrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ f^{-1}(x)}}{x} = y^3 - 1$$

$$\Rightarrow x + 1 = y^3$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} \text{ dir.}$$

Örnek:

$f : R \to R,\ f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun tersi olan f^{-1} bağıntısını bulalım.

Çözüm:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ x}}{f(x)} = \underset{\substack{\downarrow \\ y = f^{-1}(x)}}{y} = x^2 - 1 \Leftrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ f^{-1}(x)}}{x} = y^2 - 1$$

$$\Rightarrow x + 1 = y^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{y^2}$$

$$\Rightarrow |y| = \sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x+1}$$

Buradan da görüldüğü gibi, $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonu bire bir ve örten olmadığından $f(x)$ in tersi, $f^{-1}(x)$ fonksiyon değil bağıntıdır.

Örnek:

Tanım kümesi $R - \{2\}$ olan bire bir ve örten $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu ve $f(x)$ in değer kümesini bulalım.

Çözüm:

$f : A \to B$ ye bire bir ve örten $\Leftrightarrow f^{-1} : B \to A$ ya bire bir ve örtendir.

Buna göre, f^{-1} fonksiyonunun tanım kümesi f fonksiyonunun değer kümesi olur.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ x}}{f(x)} = \underset{\substack{\downarrow \\ y = f^{-1}(x)}}{y} = \overset{\substack{f^{-1}(x) \\ \downarrow}}{\frac{3x}{x-2}} \Leftrightarrow x = \overset{\substack{f^{-1}(x) \\ \downarrow}}{\frac{3y}{\underset{\substack{\downarrow \\ f^{-1}(x)}}{y-2}}}$$

$$\Rightarrow xy - 2x = 3y$$

$$\Rightarrow xy - 3y = 2x$$

$$\Rightarrow y(x-3) = 2x$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-3}$$

bağıntısının fonksiyon olması için $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$ olmalıdır.

f^{-1} in tanım kümesi, bire bir ve örten f fonksiyonunun değer kümesi olup $R - \{3\}$ tür.

Sonuç:

Bire bir ve örten $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunda,

1) a ile d nin hem yerleri hem de işaretleri değiştirilerek, pratik olarak, $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$ şeklinde bire bir ve örten $f^{-1}(x)$ fonksiyonu bulunur.

2) $f : \underbrace{R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}}_{f(x) \text{ in tanım kümesi}} \to \underbrace{R - \left\{\frac{a}{c}\right\}}_{\substack{f(x) \text{ in değer (görüntü) kümesi} \\ (f^{-1}(x) \text{ in tanım kümesi})}}$

3) $f(x) = f^{-1}(x)$ olması için $d = -a$, yani a ile d mutlak değerce eşit ve ters işaretli olmalıdır.

Örnek:

$$x = \frac{f(x)+1}{2-f(x)}$$

eşitliği ile verilen bire bir ve örten $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesini (A), değer kümesini (B) ve $f(x)$ fonksiyonunun tersi olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm:

$y = f(x)$ eşitliğinden elde edilen $x = f^{-1}(y)$, $f(x)$ in tersi olan fonksiyondur. Buna göre,

$x = \dfrac{f(x)+1}{2-f(x)}$ eşitliği ile $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{2-y}$

fonksiyonu verildiğinden herhangi bir işlem yapmadan,

$$x = \frac{f(x)+1}{2-f(x)} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2-x}$$

olarak yazılır.

$f(x)$ bire bir ve örten fonksiyon olduğundan $f^{-1}(x)$ in tanım kümesi, $f(x)$ in değer kümesidir. O halde,

$B = R - \{2\}$ olur.

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{-x+2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{-2x+1}{-x-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

olduğundan $f(x)$ in tanım kümesi,

$A = R - \{-1\}$ dir.

Örnek:

$f(x) = 3x + 1$ olduğuna göre, $f^{-1}(7)$ değerini bulalım.

Çözüm:

1. yol:

$$f(x) = y = 3x + 1 \Leftrightarrow x = 3y + 1$$

$$\underset{x}{\downarrow} \quad \underset{y=f^{-1}(x)}{\downarrow} \qquad \underset{f^{-1}(x)}{\downarrow}$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$$

olduğundan $x = 7$ için $f^{-1}(7) = \dfrac{7-1}{3} = 2$ dir.

2. yol:

$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ eşitliğinden,

$f(x) = 3x + 1 \Leftrightarrow f^{-1}(3x+1) = x$ olur. $3x + 1$ in 7 olması için,

$3x + 1 = 7 \Rightarrow x = 2$ olmalıdır. O halde, x yerine 2 yazılırsa,

$$\Rightarrow f^{-1}(3.2+1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(7) = 2 \text{ dir.}$$

Örnek:

$f : R - \{1\} \to R - \{3\}$, $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$ olduğuna göre, $f^{-1}(5)$ değerini bulalım.

Çözüm:

$f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1} \Leftrightarrow f^{-1}\left(\dfrac{3x+1}{x-1}\right) = x$ olduğundan,

$\dfrac{3x+1}{x-1}$ ifadesini 5 e eşleyen x değeri $f^{-1}(5)$ tir. O halde,

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-1} = 5 \Rightarrow 3x + 1 = 5x - 5 \Rightarrow x = 3 \text{ tür.}$$

$x = 3$ için $f^{-1}(5) = 3$ tür.

Örnek:

$f(2x + 1) = 3x - 2$ olduğuna göre, $f^{-1}(-2)$ değerini bulalım.

Çözüm:

$f(2x + 1) = 3x - 2 \Leftrightarrow f^{-1}(3x - 2) = 2x + 1$ olduğundan,

$3x - 2 = -2 \Rightarrow x = 0$ dır. O halde,

$x = 0$ için $f^{-1}(3.0 - 2) = 2.0 + 1$

$\Rightarrow f^{-1}(-2) = 1$

olarak bulunur.

Örnek:

$a \in R$ olmak üzere, $f(x^2 + ax + 1) = 3x - 1$ eşitliği veriliyor. $f^{-1}(2) = 1$ olduğuna göre, a değerini bulalım.

Çözüm:

$f(x^2 + ax + 1) = 3x - 1 \Leftrightarrow f^{-1}(3x - 1) = x^2 + ax + 1$

eşitliğinde $3x - 1$ in 2 olması için

$3x - 1 = 2 \Rightarrow x = 1$ olmalıdır.

$x = 1$ değeri yerine yazılırsa,

$$f^{-1}(3.1 - 1) = 1^2 + a.1 + 1$$
$$\Rightarrow f^{-1}(2) = a + 2$$
$$\Rightarrow 1 = a + 2$$
$$\Rightarrow a = -1 \text{ dir.}$$

Uyarı:

$f(x) = y$ ise $f^{-1}(y) = x$ olduğundan, değer bulma sorularında istenilen sonuca ulaşmak için yukarıdaki iki eşitlikten her ikisi de kullanılabilir. Dolayısıyla bu iki eşitlikten işlem yapma kolaylığı olan tercih edilir.

Örnek:

$f(x) = \dfrac{x + 1}{x}$ olduğuna göre, $f(x - 1)$ in $f(x)$ türünden değerini bulalım.

Çözüm:

$f(x) = \dfrac{x + 1}{x}$ eşitliğinde x yerine $x - 1$ yazalım.

$$f(x - 1) = \frac{x - 1 + 1}{x - 1} \Rightarrow f(x - 1) = \frac{x}{x - 1} \text{ dir.}$$

$f(x - 1)$ in $f(x)$ türünden değerini bulmak için, x in $f(x)$ türünden değerini $f(x - 1)$ de yerine yazmalıyız. x in $f(x)$ türünden değeri, $y = f(x)$ in tersi olan $f^{-1}(x)$ olduğundan, $\big(f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x\big)$

$$f(x) = \frac{x + 1}{x} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x - 1} \Rightarrow x = \frac{1}{f(x) - 1}$$

değeri $f(x - 1)$ de yerine yazılırsa,

$$f(x - 1) = \frac{x}{x - 1} \Rightarrow f(x - 1) = \frac{\dfrac{1}{f(x) - 1}}{\dfrac{1}{f(x) - 1} - 1}$$

$$\Rightarrow f(x - 1) = \frac{1}{2 - f(x)} \text{ tir.}$$

Örnek:

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ kümesinde tanımlı permütasyon fonksiyonlardan biri,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

olduğuna göre, bu fonksiyonun tersi olan f^{-1} fonksiyonunu bulalım.

Çözüm:

$y = f(x)$ eşitliğinde x ile y yer değiştirilerek elde edilen y değeri $f(x)$ in tersi olduğuna göre, f fonksiyonunda satırların yerleri değiştirilirse,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{tanım kümesi} \\ \longrightarrow \text{değer kümesi} \end{array} \quad f \quad f^{-1}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{olur. Bu ifade düzenlenirse}$$

$$\Rightarrow f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

Burada,

$f(1) = 3 \Leftrightarrow f^{-1}(3) = 1$, $f(2) = 4 \Leftrightarrow f^{-1}(4) = 2$,

$f(3) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 3$, $f(4) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(2) = 4$

şeklinde de işlem yapılarak,

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek:

$$f(x + 1) = \begin{cases} 3x + 1, & x \leq -1 \\ x - 1, & x > -1 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f^{-1}(5) + f(-2)$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$f^{-1}(5) = a$ olsun. O halde, $f(a) = 5$ olur.

Buradan, $3x + 1$ ve $x - 1$ ifadelerini 5 e eşitleyip, x in hangi aralıktaki değeri için $f(a) = 5$ olduğunu bulalım.

$x \leq -1$ için, $3x + 1 = 5 \Rightarrow x = \dfrac{4}{3} \nleq -1$

$x > -1$ için, $x - 1 = 5 \Rightarrow x = 6 > -1$ olduğundan, $f(x + 1) = x - 1$ eşitliğinde x yerine 6 yazılırsa,

$f(6+1) = 6-1 \Rightarrow f(7) = 5 \Leftrightarrow f^{-1}(5) = 7$ dir.

$f(-2)$ değerini bulmak için $x+1$ ifadesini -2 ye eşitlersek,

$x+1 = -2$ ise $x = -3 < -1$ olduğundan,

$f(x+1) = 3x+1$ eşitliğinde x yerine -3 yazılırsa,

$f(-3+1) = 3.(-3)+1 \Rightarrow f(-2) = -8$ dir.

Buna göre, $f^{-1}(5) + f(-2) = 7 + (-8) = -1$ olur.

Uyarı:

İkinci dereceden $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun tersi bulunurken $ax^2 + bx + c$ ifadesi tam kareye tamamlandıktan sonra x in y türünden değeri bulunur.

Örnek:

$f(x) = x^2 - 4x + 1$ fonksiyonunun tersini bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 4x + 1$ ifadesini tam kareye tamamlamak için eşitliğin iki yanına 3 eklersek,

$$f(x) = y = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y + 3 = x^2 - 4x + 4$$
$$\Rightarrow y + 3 = (x-2)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{y+3} = |x-2|$$
$$\Rightarrow \pm\sqrt{y+3} = x - 2$$
$$\Rightarrow x = f^{-1}(y) = 2 \pm \sqrt{y+3} \text{ tür.}$$

Bu ifadede y yerine x, x yerine y yazılırsa,

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = 2 \pm \sqrt{x+3} \text{ olur.}$$

Buradan da görüldüğü gibi $f(x) = x^2 - 4x + 1$ fonksiyonu bire bir ve örten olmadığından $f^{-1}(x)$ fonksiyon değil, bağıntıdır.

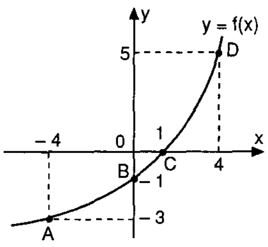
Uyarı:

1) R den R ye, bire bir ve örten $y = f(x)$ fonksiyonu ile $f(x)$ in tersi olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiği, $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

2) A dan B ye, bire bir ve örten $y = f(x)$ için,
$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
olduğundan, $f^{-1}(a) = b$ eşitliğini sağlayan $P(x, y)$ noktasının koordinatları için
$a = y \in B$ ve $b = x \in A$ dır.

Örnek:

Yandaki şekilde, $f: R \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği veriliyor. $f(x)$ eğrisi üzerindeki A, B, C ve D noktalarını inceleyelim.



Grafik üzerindeki noktaların koordinatları, grafiğe ait denklemi sağlayacağından bu noktaların koordinatlarını $y = f(x)$ denkleminde yerine yazarsak,

$A(-4, -3)$ için $f(-4) = -3 \Leftrightarrow f^{-1}(-3) = -4$,

$B(0, -1)$ için $f(0) = -1 \Leftrightarrow f^{-1}(-1) = 0$,

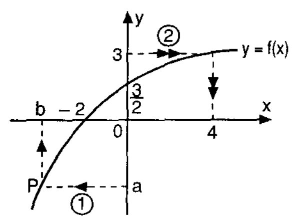
$C(1, 0)$ için $f(1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 1$,

$D(4, 5)$ için $f(4) = 5 \Leftrightarrow f^{-1}(5) = 4$ tür.

Sonuç:

Grafiği verilen $y = f(x)$ için $f^{-1}(a)$ değeri bulunurken y ekseni üzerindeki $y = a$ dan y eksenine dik çizilir. Çizilen bu dikmenin $f(x)$ eğrisini kestiği noktadan x eksenine dik indirilir. Bu dikmenin x eksenini kestiği $x = b$ değeri, $f^{-1}(a) = b$ değeridir.

Örneğin, şekildeki $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre,



1) $f^{-1}(a) = b$,

2) $f^{-1}(3) = 4$,

3) $(-2, 0)$ için (x ekseni üzerindeki bir nokta)

$f^{-1}(0) = -2$

4) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ için (y ekseni üzerindeki bir nokta)

$f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ dır.

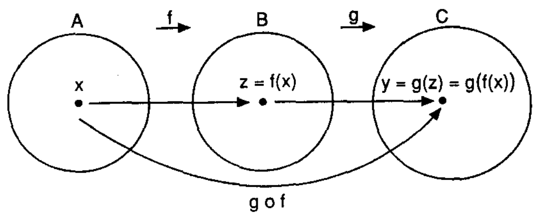
H. FONKSİYONLARDA BİLEŞKE İŞLEMİ

A, B, C boş olmayan birer küme olmak üzere,

$f : A \rightarrow B$, $f(x) = z$ ve $g : B \rightarrow C$, $g(z) = y$ ise

$g \circ f : A \rightarrow C$, $(g \circ f)(x) = g[\,f(x)\,] = y$ kuralı ile tanımlı fonksiyona f ile g nin bileşke fonksiyonu denir.

Bu tanımı aşağıdaki şekille inceleyelim.



O halde, A dan B ye f fonksiyonu ile B den C ye g fonksiyonunu kullanarak A kümesinin elemanlarını C kümesinin elemanlarına eşleyen fonksiyona f ile g nin bileşkesi denir ve g o f şeklinde gösterilir.

Örnek:

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 1, 3, 5\}$, $C = \{-4, 4, 20\}$ kümeleri ile $f : A \rightarrow B$, $f(x) = 2x + 1$ ve $g : B \rightarrow C$, $g(x) = x^2 - 5$ fonksiyonları veriliyor.

a) f ve g fonksiyonlarını şema ile gösterelim.

b) g o f fonksiyonunun kuralını bulup şema ile gösterelim.

Çözüm:

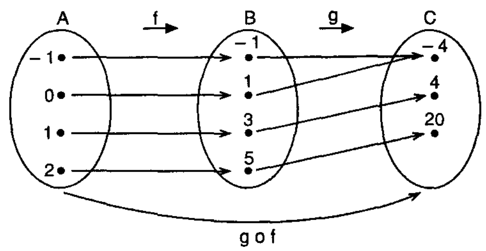
a) $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $f(x) = 2x + 1$ ise

$f(-1) = -1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ ve

$B = \{-1, 1, 3, 5\}$ ve $g(x) = x^2 - 5$ ise

$g(-1) = -4$, $g(1) = -4$, $g(3) = 4$, $g(5) = 20$ dir.

Buna göre, f ve g fonksiyonlarının şema ile gösterilişi aşağıdaki gibidir.



b) $(g \circ f)(x) = g[\,f(x)\,]$ olduğundan

$(g \circ f)(x) = g(2x + 1)$ dir.

Buna göre, g fonksiyonunda x yerine $2x + 1$ yazılırsa,

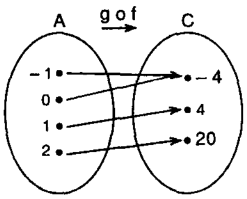
$g(x) = x^2 - 5 \Rightarrow g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 5$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x - 4$ olur.

Burada, $(g \circ f)(x)$ fonksiyonunda A kümesinin elemanları yazılarak $(g \circ f)(x)$ in görüntü kümesi $C = (g \circ f)(A)$ bulunur.

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x - 4$ olduğundan, $(g \circ f)(-1) = -4$, $(g \circ f)(0) = -4$, $(g \circ f)(1) = 4$, $(g \circ f)(2) = 20$ olur.

Buna göre, $(g \circ f)(x)$ i şema ile gösterelim.



Uyarı:

$f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ olmak üzere, $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının kuralı biliniyorken, $g \circ f : A \rightarrow C$, g o f fonksiyonu için, A kümesinin herhangi bir elemanının g o f altındaki görüntüsünü bulmak için $(g \circ f)(x)$ in kuralını bulmaya gerek yoktur.

Örneğin, yukarıdaki örnekte verilen

$f : A \rightarrow B$, $f(x) = 2x + 1$ ve $g : B \rightarrow C$, $g(x) = x^2 - 5$ ve $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ise $(g \circ f)(A)$ yı $(g \circ f)(x)$ in kuralını elde etmeden bulursak;

$(g \circ f)(x) = g[\,f(x)\,]$ olduğundan,

$(g \circ f)(-1) = g[\,f(-1)\,] = g(-1) = -4$, $(f(-1) = -1)$

$(g \circ f)(0) = g[\,f(0)\,] = g(1) = -4$, $(f(0) = 1)$

$(g \circ f)(1) = g[\,f(1)\,] = g(3) = 4$, $(f(1) = 3)$

$(g \circ f)(2) = g[\,f(2)\,] = g(5) = 20$, $(f(2) = 5)$ dir.

Örnek:

R den R ye f ve g fonksiyonları,

$f(x) = 2x + 3$ ve $g(x) = x^2 + 2$ eşitlikleriyle veriliyor.

$(g \circ f)(x)$ ve $(f \circ g)(x)$ fonksiyonlarının kuralını bulalım.

Çözüm:

$(g \circ f)(x) = g[\,f(x)\,] = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 + 2$
$= 4x^2 + 12x + 11,$

$(f \circ g)(x) = f[\,g(x)\,] = f(x^2 + 2) = 2.(x^2 + 2) + 3$
$= 2x^2 + 7$ dir.

Buradan, genellikle $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ olduğu görülmektedir.

Örnek:

$f(x) = x + 2$ ve

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x < 3 \text{ ise} \\ 2x, & 3 \leq x < 7 \text{ ise} \\ x^2 - 1, & 7 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde R den R ye, tanımlı f ve g fonksiyonları veriliyor. Buna göre, $(g \circ f)(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm:

$(g \circ f)(x) = g[\,f(x)\,]$ olduğundan $(g \circ f)(x)$ i bulmak için $g(x)$ fonksiyonunda x gördüğümüz yere $f(x) = x + 2$ yazalım.

$$(g \circ f)(x) = g(x + 2) = \begin{cases} 3.(x + 2) - 2, & x + 2 < 3 \text{ ise} \\ 2.(x + 2), & 3 \leq x + 2 < 7 \text{ ise} \\ (x + 2)^2 - 1, & 7 \leq x + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x < 1 \text{ ise} \\ 2x + 4, & 1 \leq x < 5 \text{ ise} \\ x^2 + 4x + 3, & 5 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

Örnek:

$A = \{\, a, b, c, d \,\}$ olmak üzere, A da tanımlı f ve g permütasyon fonksiyonları,

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

şeklinde verildiğine göre, $f \circ g$ bileşke fonksiyonunu bulalım.

Çözüm:

$(f \circ g)(a) = f[\,g(a)\,] = f(d) = a, \quad (g(a) = d)$
$(f \circ g)(b) = f[\,g(b)\,] = f(c) = d, \quad (g(b) = c)$
$(f \circ g)(c) = f[\,g(c)\,] = f(b) = c, \quad (g(c) = b)$
$(f \circ g)(d) = f[\,g(d)\,] = f(a) = b, \quad (g(d) = a)$

olduğundan, $f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \end{pmatrix}$

olur.

Bileşke Fonksiyonun Özellikleri

1) Bileşke işleminin değişme özelliği yoktur.

$f \circ g \neq g \circ f \quad (f \neq I$ ve $g \neq I)$
I : Birim fonksiyon

Ancak, $f \circ g = g \circ f$ olduğu durumlar da olabilir.

Örneğin, $f(x) = 2x - 1$ ve $g(x) = 2 - x$ ise,

$(f \circ g)(x) = f[\,g(x)\,] = f(2 - x) = 2.(2 - x) - 1$
$\Rightarrow (f \circ g)(x) = 3 - 2x$ ve

$(g \circ f)(x) = g[\,f(x)\,] = g(2x - 1) = 2 - (2x - 1)$
$\Rightarrow (g \circ f)(x) = 3 - 2x$

olduğundan,
$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ olduğu durumların da varlığı görülür.

2) Bileşke işleminin birleşme özelliği vardır.

$f \circ g \circ h = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Burada,
$(f \circ g \circ h)(x) = f[\,(g \circ h)(x)\,] = f[\,g(h(x))\,]$
şeklinde işlem yapılır.

Örnek:

$f(x) = 2x, \quad g(x) = 3x - 1, \quad h(x) = 1 - x^2$ fonksiyonları veriliyor.
Buna göre,
a) $(f \circ g \circ h)(x)$ fonksiyonunun kuralını bulalım.
b) $(f \circ g \circ h)(-1)$ ve $(g \circ h \circ f)(-1)$ değerlerini bulalım.

Çözüm:

a) $(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g) \circ h(x)$ ve
$(f \circ g)(x) = 2(3x - 1) = 6x - 2$ olduğundan,

$(f \circ g) \circ h(x) = (6x - 2) \circ (1 - x^2)$
$= 6.(1 - x^2) - 2$
$= 4 - 6x^2$ dir.

b) $(f \circ g \circ h)(x) = 4 - 6x^2$

$\Rightarrow (f \circ g \circ h)(-1) = 4 - 6.(-1)^2 = -2$ dir.

Burada, $(f \circ g \circ h)(-1)$ değeri,

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(-1) &= f[g\,(h(-1)\,] \\ &= f[\,g(0)\,], \quad (h(-1) = 0) \\ &= f(-1), \quad (g(0) = -1) \\ &= -2 \text{ şeklinde de bulunur.}\end{aligned}$$

Benzer şekilde $(g \circ h \circ f)(-1)$ değerini bulalım.

$$\begin{aligned}(g \circ h \circ f)(-1) &= g[\,h(f\,(-1))\,] \\ &= g[\,h(-2)\,], \quad (f(-1) = -2) \\ &= g(-3), \quad (h(-2) = -3) \\ &= -10 \text{ dur.}\end{aligned}$$

$(f \circ g \circ h)(-1) \neq (g \circ f \circ h)(-1)$ olduğundan, bu örnekten de bileşke işleminin değişme özelliğinin olmadığı görülmektedir.

3) Bileşke işleminin etkisiz (birim) elemanı $I(x) = x$ birim fonksiyonudur.

$$\boxed{f \circ I = I \circ f = f \quad (f : A \to A)}$$

Bir A kümesinde tanımlı f fonksiyonu için, $f : A \to A$, $f(x)$ fonksiyonu ile I birim fonksiyonunun bileşkesi

$(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x)$ ve $(I \circ f)(x) = I(f(x)) = f(x)$ olduğu görülmektedir.

Örnek:

m ve n gerçel (reel) sayılar olmak üzere,

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad \text{ve} \quad g(x) = (m-1)x + n + 1$$

şeklinde R den R ye f ve g fonksiyonları veriliyor.

$(f \circ g)(x) = f(x)$ olduğuna göre, m.n çarpımını bulalım.

Çözüm:

$(f \circ g)(x) = f(x) \Rightarrow g(x) = I(x) = x$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}\text{Buna göre, } g(x) &= (m-1)x + n + 1 = x \\ &\Rightarrow m - 1 = 1 \text{ ve } n + 1 = 0 \\ &\Rightarrow m = 2 \text{ ve } n = -1 \text{ olur.}\end{aligned}$$

O halde, $m.n = 2.(-1) = -2$ dir.

4) $f : A \to A$ ya f bire bir ve örten bir fonksiyon olmak üzere,

$$\boxed{f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I \quad (f : A \to A)} \text{ dır.}$$

Burada,

$f : A \to B$ ye bire bir ve örten bir fonksiyon ve $A \neq B$ ise $f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$ olur.

Örnek:

$f : R \to R$, $f(x) = 2x - 3$ ise $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$ ve

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= (2x-3) \circ \left(\frac{x+3}{2}\right) \\ &= 2.\left(\frac{x+3}{2}\right) - 3 \\ &= x \text{ ve}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(x) &= \left(\frac{x+3}{2}\right) \circ (2x-3) \\ &= \frac{2x-3+3}{2} \\ &= x \text{ olduğundan,}\end{aligned}$$

$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$ olduğu görülür.

Uyarı:

$(f \circ g)(x) = h(x)$ eşitliğinden $f(x)$ in bulunabilmesi için $h(x)$ te x yerine $g^{-1}(x)$ yazılmalıdır.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = h(x) &\Rightarrow (f \circ g) \circ g^{-1}(x) = h \circ g^{-1}(x) \\ &\Rightarrow f \circ \underbrace{(g \circ g^{-1}(x))}_{I(x) = x} = h(g^{-1}(x)) \\ &\Rightarrow f(x) = h(g^{-1}(x)) \text{ tir.}\end{aligned}$$

Örnek:

$(f \circ g)(x) = 3x - 4$ ve $g(x) = 2x + 1$ ise $f(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm:

$(f\ o\ g)(x) = 3x - 4$, $g(x) = 2x + 1$ veya $g^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

olduğundan, $(f\ o\ g)(x) = f(2x + 1) = 3x - 4$ eşitli-

ğinde x yerine $g^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$ yazılırsa,

$$f\left(2.\frac{x-1}{2} + 1\right) = 3.\left(\frac{x-1}{2}\right) - 4$$

$$f(x) = \frac{3x-11}{2} \quad \text{dir.}$$

Örnek:

$f\left(\dfrac{x+1}{3x-2}\right) = x + 1$ olduğuna göre, f(x) fonksiyo-

nunu bulalım.

Çözüm:

$g(x) = \dfrac{x+1}{3x-2}$ olsun. O halde, $g^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$

değeri f(x) te x yerine yazılırsa,

$$f\left(\frac{x+1}{3x-2}\right) = x + 1 \Rightarrow (f\ o\ g)(x) = x + 1$$

$$\Rightarrow f\ o\ \underbrace{(g\ o\ g^{-1})}_{I}(x) = g^{-1}(x) + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{3x-1} + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5x}{3x-1} \quad \text{dir.}$$

Uyarı:

$(f\ o\ g)(x) = h(x)$ eşitliğinden $g(x)$ in bulunabilmesi için $f^{-1}(x)$ te x yerine $h(x)$ yazılmalıdır.

$$(f\ o\ g)(x) = h(x) \Rightarrow f^{-1}\ o\ (f\ o\ g)(x) = f^{-1}\ o\ h(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(f^{-1}\ o\ f)}_{I(x) = x}\ o\ g(x) = f^{-1}(h(x))$$

$$\Rightarrow g(x) = f^{-1}(h(x)) \quad \text{tir.}$$

Örnek:

$f(x) = 4x - 3$ ve $(f\ o\ g)(x) = 12x + 17$ ise g(x) fonksiyonunu bulalım.

Çözüm:

1. yol:

$f(x) = 4x - 3$, $(f\ o\ g)(x) = 12x + 17$ veriliyor.

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{4}$ olduğundan $(f\ o\ g)(x) = 12x + 17$

değeri $f^{-1}(x)$ te x yerine yazılırsa,

$f^{-1}\ o\ (f\ o\ g)(x) = f^{-1}\ o\ (12x + 17)$

$$\underbrace{(f^{-1}\ o\ f)}_{I(x) = x}\ o\ g(x) = \frac{x+3}{4}\ o\ (12x + 17)$$

$$g(x) = \frac{12x + 17 + 3}{4}$$

$$= 3x + 5 \quad \text{tir.}$$

2. yol:

$$f(x) = 4x - 3 \Rightarrow f(g(x)) = 4.g(x) - 3$$

$$\Rightarrow 12x + 17 = 4.g(x) - 3$$

$$g(x) = \frac{12x + 17 + 3}{4}$$

$$= 3x + 5 \quad \text{tir.}$$

5) f, g ve h bire bir ve örten fonksiyonlar olmak üzere,

$$(f\ o\ g)^{-1} = g^{-1}\ o\ f^{-1}$$
$$(f\ o\ g\ o\ h)^{-1} = h^{-1}\ o\ g^{-1}\ o\ f^{-1} \quad \text{dir.}$$

Örnek:

$f : [0, \infty) \to [1, \infty)$, $f(x) = x^2 + 1$ ve

$f : R \to R$, $g(x) = \dfrac{1-x}{x+3}$ fonksiyonları veriliyor.

$(f^{-1}\ o\ g)^{-1}(1)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$(f^{-1} o\, g)^{-1}(1) = \left(g^{-1} o\, (f^{-1})^{-1}\right)(1)$$
$$= (g^{-1} o\, f)(1)$$
$$= g^{-1}(2), \qquad (f(1) = 2)$$

$$g^{-1}(2) = a \Leftrightarrow g(a) = 2$$
$$\Rightarrow \frac{1-a}{a+3} = 2$$
$$\Rightarrow 1 - a = 2a + 6$$
$$\Rightarrow a = -\frac{5}{3} \text{ olduğundan,}$$

$(f^{-1} o\, g)^{-1}(1) = g^{-1}(2) = -\dfrac{5}{3}$ olarak bulunur.

Örnek:

Uygun koşullarda,

$$f(x) = \frac{x+5}{3x-2} \quad \text{ve} \quad g(x) = \frac{2x+3}{3x-2}$$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $(f\, o\, g\, o\, g)^{-1}(x)$ fonksiyonunun kuralını bulalım.

Çözüm:

$\left(h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} \text{ ve } d = -a\right) \Rightarrow h(x) = h^{-1}(x)$ tir.

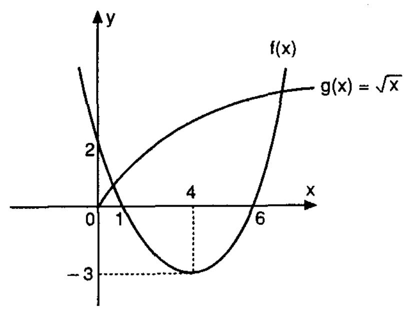
Burada, $g(x) = \dfrac{2x+3}{3x-2}$ için $a = 2$ ve $d = -2 = -a$

olduğundan $g(x) = g^{-1}(x)$, dolayısıyla, $(g\, o\, g)(x) = x$ olur.

Buna göre,

$(f\, o\, \underbrace{g\, o\, g}_{I})^{-1}(x) = f^{-1}(x) = \dfrac{2x+5}{3x-1}$ olur.

Örnek:



Yukarıdaki şekilde, f(x) fonksiyonu ile $g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafikleri verilmiştir.

Buna göre, $(f\, o\, g^{-1} o\, f)(0)$ değerini bulalım.

Çözüm:

$(f\, o\, g^{-1} o\, f)(0) = (f\, o\, g^{-1})(2), \quad (f(0) = 2)$

$g(x) = \sqrt{x} \Leftrightarrow g^{-1}(\sqrt{x}) = x$ olduğundan,

$x = 4$ için $g^{-1}(\sqrt{4}) = 4 \Rightarrow g^{-1}(2) = 4$ tür.

O halde,

$(f\, o\, g^{-1} o\, f)(0) = (f\, o\, g^{-1})(2), \quad (g^{-1}(2) = 4)$
$= f(4) = -3$ tür.

ÇÖZÜMLÜ TEST

1. Bir f fonksiyonu "Negatif olmayan her bir reel sayıyı kendisi ile karekökünün toplamının 12 eksiğine götürmektedir." şeklinde tanımlanıyor.

Buna göre, $f(0).f(\frac{9}{4})$ çarpımı kaçtır?

A) – 144 B) – 99 C) 0 D) 64 E) 99

2. $$f(x^2+1) = 4x^4 + 2x^2 - 1$$

olduğuna göre, y = f(x) fonksiyonunun x = – 1 deki değeri kaçtır?

A) 11 B) 8 C) 7 D) 5 E) 2

3. $$2f(x) - f(-x) = x^2 + 3$$

olduğuna göre, f(2) kaçtır?

A) – 3 B) – 2 C) 2 D) 3 E) 7

4. $$f(x^2 + x + 3) = 2x^2 + 2x - 1$$

olduğuna göre, f(x) aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2x + 1 B) 2x – 7 C) x – 1 D) x + 1 E) 2x

5. $$f(x) = 2^{3x-1}$$

olduğuna göre, $\frac{f(2x+1)}{f(x-1)}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 64.8^x B) 64.4^x C) 16.4^x D) 16.2^x E) 8.2^x

6. Uygun şartlarda,

$$f(x + y) = f(x).f(y)$$

biçiminde bir f fonksiyonu tanımlanıyor.

$$f(\frac{1}{3}) = 2$$

olduğuna göre, f(2) kaçtır?

A) 64 B) 27 C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

7. $$(x+1).f(x) = x^2 - 2x - 1 + f(x+1)$$

olduğuna göre, f(1) kaçtır?

A) – 1 B) 1 C) – 2 D) 2 E) 0

8. $f(x) = \frac{3f(x+1) - 1}{3}$ olarak veriliyor.

f(0) = 1 olduğuna göre, f(30) kaçtır?

A) – 11 B) 11 C) – 18 D) 18 E) – 30

9. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi bire bir ve örtendir?

A) $f: N^+ \to N^+,\ f(x) = x + 2$

B) $f: R \to R,\ f(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$

C) $f: Z \to Z,\ f(x) = 3x - 5$

D) $f: R \to R,\ f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$

E) $f: Z^+ \to Z,\ f(x) = x$

10. Aşağıdakilerden hangisi R den R ye, y = f(x) biçiminde bir fonksiyon belirtir?

A) $y.x = 1$ B) $x = 1$ C) $|y| = 2 + |x|$ D) $y^2 = x^4 + 1$ E) $x^2 - y^3 = 1$

11. A dan R ye f(x) fonksiyonunun görüntü kümesi f(A) = { – 1, 1, 3 } olarak veriliyor.

$$f(x+1) = 2x + 1$$

olduğuna göre, f fonksiyonunun tanım kümesi (A) aşağıdakilerden hangisidir?

A) { – 1, 1, 3 } B) { 0 , 2, 4 } C) { 0, 1, 2 }

D) { – 1, 3, 7 } E) { – 3, 1, 5 }

12. f : R → R sabit fonksiyonu

$$f(x) = \frac{(a+1)\,x-1}{2-ax}$$

olduğuna göre, a + f(a) kaçtır?

A) $-\frac{5}{2}$ B) –2 C) 0 D) 2 E) $\frac{5}{2}$

13. f : R → R,

$$f(x) = (a-1)\,x^2 + bx + 2x + c$$

fonksiyonu birim fonksiyondur.

Buna göre, f(a.b – c) kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

14. $f : R^2 \to R^2$,

$$f(x-1,\ y+1) = (1-x^3,\ 3^{y-1})$$

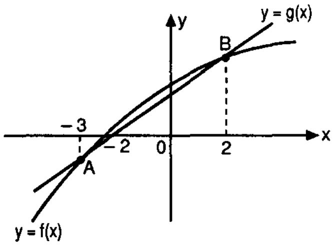
olarak veriliyor.

$$f(x, y) = (1, 1)$$

olduğuna göre, x – y farkı kaçtır?

A) – 3 B) – 2 C) 0 D) 1 E) 2

15.



Şekildeki y = f(x) eğrisi ile g(x) = ax + 2 doğrusu A ve B noktalarında kesişmektedir.

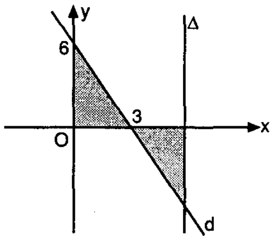
Şekilde verilenlere göre,

$$f(-3) + g(0) - f(2)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) – 7 B) – 3 C) 0 D) 2 E) 5

16.



Şekildeki Δ doğrusu x ekseninin pozitif tarafında y eksenine paralel olarak yer değiştirilebilen bir doğrudur.

x ve y eksenleri ile Δ ve d doğrularının sınırladığı düzlemsel bölgenin alanının hesaplanması için,
f : x → f(x) = "Taralı alanın ölçüsü"
şeklinde bir f fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre, x ≥ 3 için f(x) fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x) = x^2 - 6x + 18$ B) $f(x) = x^2 + 6x - 3$

C) $f(x) = 9 + \frac{(x-4)(x-3)}{2}$ D) $f(x) = 9 + \frac{(x-3)^2}{2}$

E) $f(x) = 9 - \frac{(x-4)(x-3)}{2}$

17. $A = \{ a, b, c, d, e \}$

kümesinde tanımlı aşağıdaki fonksiyonların hangisinin tersi de bir fonksiyon olur?

A) { (a, b), (c, a), (b, d), (d, e), (e, b) }
B) { (a, b), (b, c), (c, c), (d, a), (e, e) }
C) { (a, b), (b, c), (c, a), (d, e), (e, d) }
D) { (a, a), (b, b), (c, e), (d, e), (e, c) }
E) { (a, b), (b, c), (c, d), (e, e), (d, e) }

18. Uygun koşullarda f fonksiyonu,

$$f\left(\frac{3x}{x+1}\right) = ax^2 - x + 2$$

eşitliği ile veriliyor.

$f^{-1}(0) = 6$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) − 2 B) − 1 C) 0 D) 1 E) 2

19. Uygun koşullarda f fonksiyonu,

$$f\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = x - 1$$

eşitliği ile veriliyor.

Buna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x}{x^2+x+1}$ B) $\frac{x}{x^2+2x+2}$ C) $\frac{x+1}{x^2+2x+2}$

D) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ E) $\frac{x}{x^2-2x+2}$

20. Uygun koşullarda y = f(x) fonksiyonu

$$x\,f(x) + 1 = 3x - f(x)$$

eşitliği ile veriliyor.

Buna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x+1}{3-x}$ B) $\frac{3x-1}{x+1}$ C) $\frac{x-1}{x+3}$

D) $\frac{x-1}{3x+1}$ E) $\frac{1-x}{x-3}$

21. $f : R - \{0\} \to R - \{1\}$, $y = f(x)$ fonksiyonu,

$$x \cdot y = 1 + x$$

eşitliği ile verildiğine göre, $f^{-1}(3)$ kaçtır?

A) − 3 B) $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

22. $f : [1, \infty) \to [3, \infty)$

$$f(x) = 4x^2 - 8x + 7$$

olduğuna göre, $f^{-1}(4)$ kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 4

23. f(x) doğrusal fonksiyonu için,

$$f^{-1}(2) = 4 \text{ ve } f^{-1}(5) = 2$$

olduğuna göre, f(0) kaçtır?

A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 10

24.

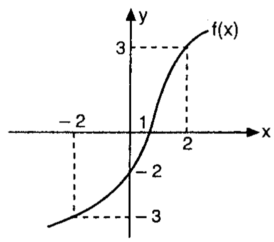
$$f(x) = 2x^2 + 3x$$
$$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 6x + 1$$

olduğuna göre, g(x) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 - x$ B) $x^2 + x$ C) $2x^2 + 1$

D) $2x + 1$ E) $x + 1$

25.



Yukarıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu, $[-2, 2]$ aralığında bire bir ve örtendir.

Buna göre, $\dfrac{f(f(1))}{f^{-1}(0) + f^{-1}(-3)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) −1 C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) 2

26.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \text{ ise} \\ x + 1, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre, $x < 0$ için $(f o f)(x)$ in eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x + 2$ B) $(x + 1)^2$ C) x^4 D) $x^2 + 1$ E) $1 - x^2$

27. Uygun koşullarda,

$$f(x) = 3x - 2 \quad \text{ve} \quad g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

olarak veriliyor.

$(f \text{ o } g^{-1})(2a - 1) = -8$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) 7 B) 5 C) 3 D) 1 E) 0

28.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

kümesinde tanımlı f ve g permütasyon fonksiyonları için,

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad f \text{ o } g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

eşitlikleri veriliyor.

$(g^{-1} \text{ o } f \text{ o } g)^{-1}(x) = 5$ olduğuna göre, x kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

29. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ ve $(f \text{ o } f)(x) = \dfrac{5x+a}{x+a+1}$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 1 D) 3 E) 5

30. Uygun koşullarda,

$$f(x+1) = \frac{2x+1}{x-2}$$

eşitliği ile verilen $f(x + 1)$ fonksiyonunun $f(x)$ türünden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

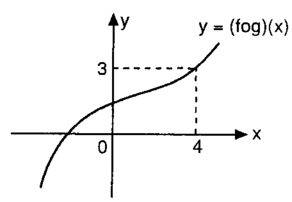
A) $\dfrac{3f(x) - 1}{f(x) - 2}$ B) $\dfrac{2f(x) + 1}{f(x) - 2}$ C) $\dfrac{7f(x) - 4}{f(x) + 3}$ D) $\dfrac{7f(x) - 3}{f(x) + 4}$ E) $\dfrac{3f(x) + 1}{f(x) - 4}$

31. $f\left(\dfrac{4-x}{3}\right) = g^{-1}\left(\dfrac{1+x}{2}\right) = h\left(\dfrac{3x-1}{2}\right)$

olduğuna göre, $(g \text{ o } f)(1) + (h^{-1} \text{ o } g^{-1})(3)$ kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 7 D) 8 E) 10

32. Yandaki şekilde $y = (f \text{ o } g)(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$f(6) = 3$
$g(x) = ax + 2$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

33. a bir reel (gerçel) sayı ve f(x) bire bir ve örten bir fonksiyon olmak üzere,

$$g(x) = f(x) + a$$
$$g(f^{-1}(-3)) = 1$$

olduğuna göre, $g(f^{-1}(1))$ kaçtır?

A) −3 B) −1 C) 1 D) 3 E) 5

TESTİN ÇÖZÜMLERİ

1. Problemde verilen f fonksiyonunun kuralı,

$x \geq 0$ olmak üzere, $f(x) = x + \sqrt{x} - 12$ dir.

Buna göre,

$$f(0).f\left(\frac{9}{4}\right) = \left(0 + \sqrt{0} - 12\right).\left(\frac{9}{4} + \sqrt{\frac{9}{4}} - 12\right)$$

$$= -12.\left(\frac{3}{2} - \frac{39}{4}\right)$$

$$= -18 + 117 = 99 \text{ dur.}$$

Cevap : E

2. $y = f(x)$ in $x = -1$ deki değeri $f(-1)$ olduğundan,

$f(x^2 + 1) = 4x^4 + 2x^2 - 1$

eşitliğinde x^2 yerine -2 yazılırsa,

$f(-2 + 1) = 4.(-2)^2 + 2.(-2) - 1$

$\Rightarrow f(-1) = 11$ dir.

Cevap : A

3. $2f(x) - f(-x) = x^2 + 3$ eşitliğinden,

$x = 2$ için, $2f(2) - f(-2) = 7$ ... (1)

$x = -2$ için, $2f(-2) - f(2) = 7$ ... (2)

elde edilen (1) eşitliğinin iki yanı 2 ile çarpıldıktan sonra elde edilen denklem (2) eşitliği ile taraf tarafa toplanırsa,

$$3.f(2) = 21 \Rightarrow f(2) = 7 \text{ dir.}$$

Cevap : E

4. $f(x^2 + x + 3) = 2x^2 + 2x - 1$

$f(x^2 + x + 3) = 2(x^2 + x) - 1$

olduğundan, $x^2 + x$ yerine $x - 3$ yazılırsa,

$f(x - 3 + 3) = 2.(x - 3) - 1$

$f(x) = 2x - 7$ dir.

Cevap : B

5. $f(x) = 2^{3x-1}$ olduğuna göre,

$$\frac{f(2x+1)}{f(x-1)} = \frac{2^{3.(2x+1)-1}}{2^{3.(x-1)-1}}$$

$$= 2^{6x+2-(3x-4)}$$

$$= 2^{3x+6}$$

$$= 2^6.(2^3)^x = 64.8^x \text{ tür.}$$

Cevap : A

6. $f(x + y) = f(x).f(y)$ olduğuna göre,

$$f\left(6.\frac{1}{3}\right) = f(\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{3}}_{6 \text{ tane}})$$

$$= \underbrace{f\left(\frac{1}{3}\right).f\left(\frac{1}{3}\right). ... .f\left(\frac{1}{3}\right)}_{6 \text{ tane}}$$

$$\Rightarrow f(2) = \left[f\left(\frac{1}{3}\right)\right]^6$$

$$= 2^6 = 64 \text{ tür.}$$

Cevap : A

7. $(x + 1)f(x) = x^2 - 2x - 1 + f(x + 1)$,

$x = 0$ için, $(0 + 1).f(0) = -1 + f(1)$

$\Rightarrow f(1) = 1 + f(0)$ ve

$x = -1$ için $(-1 + 1).f(-1) = 2 + f(0)$

$\Rightarrow 0.f(-1) = 2 + f(0)$

$\Rightarrow f(0) = -2$

olduğundan, $f(1) = 1 + f(0)$

$= 1 + (-2) = -1$ dir.

Cevap : A

8. ***1. yol:***

$$f(x) = \frac{3f(x+1)-1}{3} \Rightarrow f(x) = f(x+1) - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x+1) = -\frac{1}{3}$$

olduğundan, $x = 0$ için $f(0) - f(1) = -\frac{1}{3}$

$x = 1$ için $f(1) - f(2) = -\frac{1}{3}$

$x = 2$ için $f(2) - f(3) = -\frac{1}{3}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$x = 29$ için $f(29) - f(30) = -\frac{1}{3}$

$+$ ―――――――――

$$f(0) - f(30) = -\frac{1}{3} \cdot 30$$

$$\Rightarrow 1 - f(30) = -10$$

$$\Rightarrow f(30) = 11 \text{ dir.}$$

2. yol:

$$f(x) = \frac{3f(x+1)-1}{3} \Rightarrow f(x+1) = f(x) + \frac{1}{3}$$

$x = 0$ için, $f(1) = f(0) + \frac{1}{3}$

$x = 1$ için, $f(2) = f(1) + \frac{1}{3}$

$$f(2) = f(0) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$f(2) = f(0) + 2 \cdot \frac{1}{3}$$

$x = 2$ için, $f(3) = f(2) + \frac{1}{3}$

$$f(3) = f(0) + 3 \cdot \frac{1}{3}$$

$x = n$ için, $f(n) = f(0) + n \cdot \frac{1}{3}$

olduğundan $n = 30$ için, $f(30) = f(0) + 30 \cdot \frac{1}{3}$

$= 11$ dir.

(Burada, $f(n) = f(0) + n \cdot \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow f(n) = 1 + \frac{n}{3}$$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{3+n}{3}$$

şeklinde f nin n değişkenine bağlı kuralı da bulunabilir.)

Cevap : B

9. A) $f(x) = x + 2$ nin görüntü kümesi (G), $G = \{3, 4, 5, \ldots\} \subset N^+$ olduğundan örten değil.

B) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{1 + x^2}$ fonksiyonu bire bir değil.

Örneğin, $f(1) = f(-1) = 0$

C) $f(x) = 3x - 5$ fonksiyonunun görüntü kümesinin elemanları, 3 ile bölündüğünde 1 kalanını veren tamsayılardır, bütün tamsayılar değildir. O halde, f(x) örten değil.

D) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ fonksiyonu için,

$\forall x \in R$ için $\left(1 - \sqrt[3]{x}\right) \in R$ olduğundan f(x) örtendir.

$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow 1 - \sqrt[3]{x_1} = 1 - \sqrt[3]{x_2}$

$$\Rightarrow -\sqrt[3]{x_1} = -\sqrt[3]{x_2}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

olduğundan f(x) bire birdir.

Buna göre, $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ fonksiyonu R den R ye bire bir ve örten bir fonksiyondur.

E) $f(x) = x$ fonksiyonunun görüntü kümesi (G), $g = \{1, 2, 3, \ldots\} \subset Z$ olduğundan örten değildir.

Cevap : D

10. $f : R \to R,\ f(x) = y$ olmak üzere,

A) $y.x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$, $x = 0$ için tanımsız olduğundan fonksiyon değil.

B) $x = 1$ için $y \in R$ olduğundan $x = 1$ değeri bütün $y \in R$ değerleri ile eşleniyor. Fonksiyon değil.

C) $|y| = 2 + |x|$ ifadesinde $\forall x \in R$ için x in iki görüntüsü var. Örneğin, $x = 0$ için $y = \pm 2$ dir. Fonksiyon değil.

D) $y^2 = x^4 + 1$ ifadesinde $\forall x \in R$ için x in iki görüntüsü var. Örneğin, $x = 0$ için $y = \pm 1$ dir. Fonksiyon değil.

E) $x^2 - y^3 = 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ R den R ye fonksiyondur.

Cevap: E

11. ***1 yol:***

$f(x + 1) = 2x + 1$ eşitliği ile $f(x + 1)$ in kuralı verildiğinden önce, $x + 1$ yerine x yazarak, yani

$$x + 1 \to x \Rightarrow x \to x - 1$$

x yerine $x - 1$ yazarak $f(x)$ in kuralını bulalım.

$f(x + 1) = 2x + 1 \Rightarrow f(x - 1 + 1) = 2(x - 1) + 1$

$\Rightarrow f(x) = 2x - 1$ olarak bulunur.

$f(x)$ in görüntü kümesi (tanım kümesi elemanlarına karşılık gelen değerler kümesi) verildiğinden, görüntü kümesinin elemanlarını $2x - 1$ e eşitleyerek bu değerlerin hangi x elemanın görüntüsü olduğunu bulalım. Buna göre,

$f(A) = \{-1, 1, 3\}$ ve $f(x) = 2x - 1$ olduğundan,

$2x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$

$2x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1$

$2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$ olarak bulunur.

O halde, $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi (x değerlerinin kümesi)

$A = \{0, 1, 2\}$ dir.

2. yol:

$f(A) = \{-1, 1, 3\}$ ve $f(x + 1) = 2x + 1$ olduğundan $2x + 1$ i $f(A)$ kümesinin elemanlarına eşitleyerek A kümesini bulalım. Şöyle ki,

$2x + 1 = -1 \Rightarrow x = -1$ için $f(-1 + 1) = 2.(-1) + 1$

$\Rightarrow f(0) = -1$

$2x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$ için $f(0 + 1) = 2.0 + 1$

$\Rightarrow f(1) = 1$

$2x + 1 = 3$ ise $x = 1$ için $f(1 + 1) = 2.1 + 1$

$\Rightarrow f(2) = 3$ tür.

Buna göre, $A = \{0, 1, 2\}$ dir.

Burada, $2x + 1$ in $f(A)$ kümesinin elemanlarına eşitlenmesiyle bulunan x değerlerinin $f(x + 1)$ de yerine yazılmasının yeterli olduğu görülüyor. Yani eşitliğin sağ tarafındaki işlem, f fonksiyonuna ait (x, y) ikililerinin her iki bileşeninin (x ve y nin) birlikte görülmesi için yapılmıştır.

Cevap : C

12. $f : R \to R,\ f(x) = \frac{(a + 1)x - 1}{2 - ax}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise,

$$\frac{a + 1}{-a} = \frac{-1}{2}$$

$\Rightarrow 2a + 2 = a$

$\Rightarrow a = -2$ dir.

$f(x)$ sabit fonksiyon olduğundan,

$f(a) = f(0) = -\frac{1}{2}$ olur.

O halde, $a + f(a) = -2 + f(0)$

$= -2 + \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{5}{2}$ dir.

Cevap : A

13. $f : R \to R,\ f(x) = (a-1)x^2 + bx + 2x + c$

fonksiyonu birim fonksiyon $(I(x) = x)$ ise,

$f(x) = (a-1)x^2 + (b+2)x + c = x$ ve

$a - 1 = 0,\quad b + 2 = 1,\quad c = 0$

$\Rightarrow a = 1,\quad b = -1$ dir.

O halde, $f(ab - c) = ab - c \quad (f(x) = x)$

$= 1.(-1) - 0$

$= -1$ dir.

Cevap: B

14. $f(x-1,\ y+1) = (1 - x^3,\ 3^{y-1}) \ldots (1)$

$f(x, y) = (1, 1) \ldots (2)$

$1 - x^3 = 1$ ve $3^{y-1} = 1$ eşitliklerinden elde edilen $x = 0$ ve $y = 1$ değerleri (1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$f(0-1,\ 1+1) = (1 - 0^3,\ 3^{1-1})$

$\Rightarrow f(-1, 2) = (1, 1) \ldots (1')$

(1') ve (2) eşitliklerinden,

$f(x, y) = f(-1, 2) = (1, 1)$ elde edilir.

Buna göre, $x = -1$ ve $y = 2$ olduğundan,

$x - y = -1 - 2 = -3$ tür.

Cevap: A

15. $(-2, 0)$ noktası şekildeki $g(x)$ doğrusu üzerinde olduğundan, $(-2, 0)$ noktasının koordinatları, $(x = -2$ ve $y = 0)$ $y = g(x) = ax + 2$ denklemini sağlar. O halde,

$$\underset{0}{\underset{\downarrow}{y}} = g(\underset{-2}{\underset{\downarrow}{x}}) = a\underset{-2}{\underset{\downarrow}{x}} + 2 \Rightarrow 0 = g(-2) = a.(-2) + 2 \Rightarrow a = 1 \text{ dir.}$$

Ayrıca, A ve B noktalarında $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları kesiştiklerinden $f(x)$ ve $g(x)$ in bu noktalardaki değerleri birbirine eşittir.

Buna göre,

$f(-3) = g(-3)$ ve $f(2) = g(2)$ dir.

$g(x) = ax + 2 = 1.x + 2 \Rightarrow g(x) = x + 2$

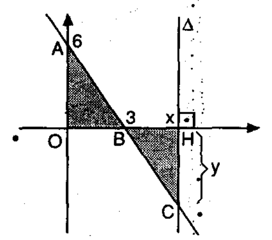
olduğundan,

$f(-3) + g(0) - f(2) = g(-3) + g(0) - g(2)$

$= -1 + 2 - 4 = -3$ tür.

Cevap: B

16.



$x \geq 3$ için, Δ doğrusunun bulunduğu noktanın (H noktasının) apsisine x, [HC] nın uzunluğuna y diyelim.

$\overset{\triangle}{OAB} \sim \overset{\triangle}{HCB}$ (benzerlik kuralından)

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|HC|}{|HB|} \Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{y}{x-3}$$

$\Rightarrow y = 2x - 6$ olur.

Buna göre, tanımlanan fonksiyon, yani taralı alanların toplamı;

$$f(x) = \frac{|OA|.|OB|}{2} + \frac{|HC|.|HB|}{2}$$

$$f(x) = \frac{6.3}{2} + \frac{(2x-6).(x-3)}{2}$$

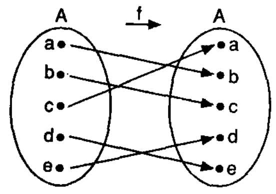
$$f(x) = 9 + \frac{2(x-3)^2}{2}$$

$$f(x) = 9 + (x-3)^2$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 18 \text{ dir.}$$

Cevap : A

17. A da tanımlı bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olması için, bu fonksiyon bire bir ve örten olmalıdır. Dolayısıyla fonksiyonu meydana getiren ikililerin ikinci bileşenleri (yani görüntü kümesinin elemanı olan y değerleri) birbirinden farklı olmalıdır. O halde, (C) şıkkında verilen fonksiyon bire bir ve örten olduğundan, tersi de bir fonksiyon olur.



Cevap: C

18. $f\left(\dfrac{3x}{x+1}\right) = ax^2 - x + 2$ ve

$f^{-1}(0) = 6 \Leftrightarrow f(6) = 0$ olduğundan, $\dfrac{3x}{x+1}$ ifadesini 6 yapan x değerini bulalım.

$$\frac{3x}{x+1} = 6 \Rightarrow 3x = 6x + 6$$
$$\Rightarrow x = -2 \text{ dir.}$$

Bu değer fonksiyonda yerine yazılırsa,

$$f\left(\frac{3.(-2)}{-2+1}\right) = a.(-2)^2 - (-2) + 2$$

$f(6) = 0 = 4a + 4 \Rightarrow a = -1$ dir.

Cevap: B

19. $f\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) = x - 1 \Leftrightarrow f^{-1}(x-1) = \dfrac{x}{1+x^2}$

eşitliğinde x yerine, $(x-1)$ in tersi olan $x+1$ ifadesi yazılırsa,

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1+(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$$

olarak bulunur.

Cevap: C

20. $y = f(x)$ için $x = f^{-1}(y)$ $f(x)$ in tersi olduğundan, $f(x)$ i bulmadan verilen eşitlikten x in $f(x)$ türünden değeri bulunursa $f^{-1}(x)$ bulunmuş olur. Buna göre,

$xf(x) + 1 = 3x - f(x) \Rightarrow 1 + f(x) = 3x - xf(x)$

$$\Rightarrow 1 + f(x) = x(3 - f(x))$$

$$\Rightarrow x = \frac{f(x)+1}{3-f(x)} = f^{-1}(y)$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3-x} \text{ tir.}$$

Cevap: A

21. ***1. yol:***

$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

olduğundan $y = 3$ için x değeri bulunursa,

$x.y = 1 + x \Rightarrow x.3 = 1 + x$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} = f^{-1}(3)$$

2. yol:

$x.y = 1 + x \Rightarrow y = f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{x+1}{x}\right) = x$$

olduğundan $\dfrac{x+1}{x} = 3 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ değeri yerine yazılırsa,

$$f^{-1}(3) = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

3. yol:

$x.y = 1 + x \Rightarrow xy - x = 1$

$$\Rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1}{y-1} \text{ ve}$$

$y = 3$ için $f^{-1}(3) = \dfrac{1}{2}$ dir.

Cevap : D

22. $f : [1, \infty) \to [3, \infty)$

$$f(x) = 4x^2 - 8x + 7$$

olduğundan, $x = f^{-1}(4) \in [1, \infty)$ değerini bulalım.

$f^{-1}(4) = x \Rightarrow f(x) = 4 = 4x^2 - 8x + 7$

$$\Rightarrow 0 = 4x^2 - 8x + 3$$
$$\Rightarrow 0 = (2x-3)(2x-1)$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} = f^{-1}(4) \text{ tür.}$$

($x_2 = \dfrac{1}{2} \notin [1, \infty)$ olduğuna dikkat ediniz.)

Cevap: D

23. ***1. yol:***

f(x) doğrusal fonksiyon olduğundan a ve b reel sayılar olmak üzere, $(a \neq 0)$ f(x) in denklemi,

$f(x) = ax + b$ dir. O halde, verilen eşitliklerden,

$f^{-1}(2) = 4 \Leftrightarrow f(4) = 2 = 4a + b$ ... (1)

$f^{-1}(5) = 2 \Leftrightarrow f(2) = 5 = 2a + b$ ... (2)

ve $f(0) = b$ olduğundan, (2) eşitliğinin iki yanı -2 ile çarpıldıktan sonra elde edilen eşitlik (1) eşitliğiyle taraf tarafa toplanırsa

$-8 = -b$

$\Rightarrow b = f(0) = 8$ dir.

2. yol:

Doğrusal bir ifadede, x in değişme miktarı ile y nin değişme miktarı doğru orantılıdır.

Ayrıca, $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ olduğundan,

2 azalıyor 2 azalıyor

$f^{-1}(2) = 4$ ve $f^{-1}(5) = 2 \Rightarrow f^{-1}(y) = 0$

3 artıyor 3 artarsa

$5 + 3 = 8 = y$ ve

$f^{-1}(8) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 8$ dir.

Cevap: A

24. $f(x) = 2x^2 + 3x$ ve

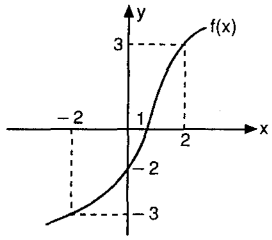
$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 6x + 1$

$\Rightarrow g(2x^2 + 3x) = 2(2x^2 + 3x) + 1$

$\Rightarrow g(x) = 2x + 1$ dir.

Cevap: D

25.



$f(x) = y$ denklemini sağlayan (f(x) eğrisi üzerindeki) noktalar için, x : apsis , y = ordinat ve

$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ olduğundan,

$f^{-1}(x) = y$ denklemini sağlayan (f(x) eğrisi üzerindeki) noktalar için, x : ordinat, y : apsistir.

Buna göre, $y = f(x)$ in grafiğinden $f(1) = 0$ (apsisi 1 olan noktanın ordinatı 0)

$f(f(1)) = f(0) = -2$ (apsisi 0 olan noktanın ordinatı -2)

$f^{-1}(0) = 1$ (ordinatı 0 olan noktanın apsisi 1)

$f^{-1}(-3) = -2$ (ordinatı -3 olan noktanın apsisi -2)

O halde, $\dfrac{f(f(1))}{f^{-1}(0) + f^{-1}(-3)} = \dfrac{-2}{1 + (-2)}$

$= 2$ dir.

Cevap: E

26. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \text{ ise} \\ x + 1, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonuna göre,

$x < 0$ için $f(x) = x^2$ olduğundan,

$(f \circ f)(x) = f(f(x)), \quad x < 0$

$= f(x^2)$ ve

$x < 0$ için $x^2 > 0$ olduğundan,

$f(x^2) = x^2 + 1$ dir. Buna göre,

$(f \circ f)(x) = x^2 + 1$ olur.

Cevap: D

27. $f(x) = 3x - 2$ ve $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ veriliyor.

$(f \circ g^{-1})(2a-1) = -8$

$\Rightarrow (f \circ g^{-1})^{-1}(-8) = 2a - 1$

$\Rightarrow ((g^{-1})^{-1} \circ f^{-1})(-8) = 2a - 1$

$3x - 2 = -8 \Rightarrow x = -2$ olduğundan,

$f^{-1}(-8) = -2$ ise,

$g(\, f^{-1}(-8)\,) = 2a - 1$

$\Rightarrow g(-2) = 2a - 1$

$\Rightarrow \dfrac{2.(-2)+1}{-2-1} = 2a - 1$

$\Rightarrow \dfrac{-3}{-3} = 2a - 1$

$\Rightarrow a = 1$ dir.

Cevap: D

28. $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ve $fog = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

1. yol:

$(g^{-1} \circ f \circ g)^{-1}(x) = 5 \Leftrightarrow (g^{-1} \circ f \circ g)(5) = x$

$\Rightarrow g^{-1} \circ (f \circ g)(5) = x$

$\Rightarrow g^{-1}(2) = x$

$\Rightarrow 1 = x$ olur.

2. yol:

$(g^{-1} \circ (f \circ g))^{-1}(x) = 5$

$\Rightarrow ((f \circ g)^{-1} \circ (g^{-1})^{-1})(x) = 5$

$\Rightarrow (f \circ g)^{-1} \circ g(x) = 5$

$\Rightarrow ((f \circ g)^{-1})(g(x)) = 5$

$\Rightarrow g(x) = 2$

$\Rightarrow x = 1$ dir.

Cevap: A

29. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ ve $(f \circ f)(x) = \dfrac{5x+a}{x+a+1}$

$x = 0$ için $f(0) = -1$

$(f \circ f)(0) = \dfrac{a}{a+1} \Rightarrow f(f(0)) = \dfrac{a}{a+1}$

$\Rightarrow f(-1) = \dfrac{a}{a+1}$

$\Rightarrow \dfrac{2.(-1)+1}{-1-1} = \dfrac{a}{a+1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{a+1}$

$\Rightarrow a = 1$ dir.

Cevap: C

30. ***1. yol:***

$f(x+1) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ eşitliğinde x yerine $x+1$ in tersi olan $x-1$ yazılırsa $f(x)$ elde edilir. Buna göre,

$f(x) = \dfrac{2(x-1)+1}{x-1-2} \Rightarrow f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$

$f^{-1}(x) = y$ fonksiyonu x in $f(x)$ türünden değeri olduğundan,

$x = \dfrac{3f(x)-1}{f(x)-2}$

değeri $f(x+1)$ fonksiyonunda yerine yazılırsa,

$$f(x+1) = \frac{2x+1}{x-2}$$

$$= \frac{2.\dfrac{3f(x)-1}{f(x)-2} + 1}{\dfrac{3f(x)-1}{f(x)-2} - 2}$$

$$= \frac{6f(x) - 2 + f(x) - 2}{3f(x) - 1 - 2f(x) + 4}$$

$$= \frac{7f(x)-4}{f(x)+3} \text{ tür.}$$

2. yol:

$f(x+1)$ in $f(x)$ türünden değeri,

$f(x+1) = F(f(x))$ olsun.

Tanımsızlık ortaya çıkarmayacak herhangi bir x değeri yazılırsa, örneğin $x = 4$ yazılırsa

$$f(5) = F(f(4))$$

$$\frac{2.4+1}{4-2} = F\left(\frac{2.3+1}{3-2}\right)$$

$$\frac{9}{2} = \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)}}{F(7)}$$

şıklarda $f(x)$ yerine 7 yazıldığında $\frac{9}{2}$ ye eşit olan C dir.

Cevap: C

31. $g^{-1}\left(\frac{1+x}{2}\right) = f\left(\frac{4-x}{3}\right)$

$\Leftrightarrow g\left(f\left(\frac{4-x}{3}\right)\right) = \frac{1+x}{2}$

$x = 1$ için, $g(f(1)) = 1$

$(g \circ f)(1) = 1$ dir.

$h\left(\frac{3x-1}{2}\right) = g^{-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)$

$\Leftrightarrow h^{-1}\left(g^{-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)\right) = \frac{3x-1}{2}$

$x = 5$ için, $h^{-1}(g^{-1}(3)) = 7$

$(h^{-1} \circ g^{-1})(3) = 7$ dir.

Buna göre,

$(g \circ f)(1) + (h^{-1} \circ g^{-1})(3) = 1 + 7 = 8$ dir.

Cevap: D

32. $g(x) = ax + 2$ olduğundan,

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(ax+2)$ ve $(4, 3)$ noktası $(f \circ g)(x)$ in grafiği üzerinde olduğundan $y = (f \circ g)(x)$ in denklemini sağlar.

Buna göre,

$x = 4$ ve $y = 3$ için, $(f \circ g)(4) = f(4a+2) = 3$ ve $f(6) = 3$ olduğundan, $4a + 2 = 6 \Rightarrow a = 1$ olur.

Cevap: A

33. $g(f^{-1}(-3)) = 1$ veriliyor.

$g(x) = f(x) + a$ eşitliğinde x yerine $f^{-1}(-3)$ yazılırsa,

$g(f^{-1}(-3)) = f(f^{-1}(-3)) + a$

$1 = -3 + a \Rightarrow a = 4$ tür.

O halde,

$g(x) = f(x) + a \Rightarrow g(x) = f(x) + 4$

eşitliğinde x yerine $f^{-1}(1)$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} g(f^{-1}(1)) &= f(f^{-1}(1)) + 4 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5 \text{ tir.} \end{aligned}$$

Cevap: E

CEVAPLI TEST - 1

1. Aşağıdaki bağıntılardan hangisi bir fonksiyondur?

A) $f : R \rightarrow R \ , \ f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

B) $f : R \rightarrow R \ , \ f(x) = \sqrt{x+2}$

C) $f : R \rightarrow R \ , \ |f(x)| = x^2+1$

D) $f : Z \rightarrow Z \ , \ f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

E) $f : N^+ \rightarrow R \ , \ f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

2. Uygun şartlarda bir f fonksiyonu için,

$$f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{x+1}{1-2x}$$

olduğuna göre, $f(\frac{1}{x})$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{1}{x}$ B) $\frac{1}{x}$ C) $-x$ D) x E) $2x-1$

3. $f : R \rightarrow R$ olmak üzere,

$$f(x^2 - x + 1) = 3x^2 - 3x - 1$$

olduğuna göre, f(3) değeri kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

4. $f : Z \rightarrow Z$ tanımlı olmak üzere,

$f(x) = x.(x+1) + f(x-1)$

$f(4) = 40$

olduğuna göre, f(1) kaçtır?

A) −7 B) −1 C) 2 D) 7 E) 17

5. $f(x-1) = 2^{2x-3}$

olduğuna göre, f(x + 1) in f(x) türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4.f^2(x)$ B) $3.f(x)+2$ C) $2.f(x)+1$

D) $4.f(x)$ E) $f(x)+4$

6. $f : \{-1, 2, 3\} \rightarrow R \ , \ f(x) = 2x+1$ ve

$g : \{-2, -1, 0, 2\} \rightarrow R \ , \ g(x) = x^2-5$

olduğuna göre, 3f + g fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) { (− 4, 3) , (2, 4), (0,5) }
B) { (− 4, − 7) , (2, − 14) }
C) { (− 1, − 7) , (2, 14) }
D) { (− 1, − 7) , (0, 3) , (3 , 5) }
E) { (− 1, 3) , (2 , 4) }

7. Tanımlı olduğu yerlerde,

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

olduğuna göre, f(x + 1) in f(x) türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{3-f(x)}{2-f(x)}$ B) $\dfrac{2-f(x)}{1-f(x)}$ C) $\dfrac{1+2f(x)}{1-f(x)}$

D) $\dfrac{2.f(x)+1}{2f(x)}$ E) $\dfrac{2f(x)-1}{f(x)}$

8. $f(x+3) = 4x - 7a$

$f(5) = 1$

olduğuna göre, f(1) kaçtır?

A) −20 B) −18 C) −15 D) −3 E) −2

9. $f(x^2 + 2x) = 3x^2 + 6x + 9$

olduğuna göre, f(1) kaçtır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

10. $f(x) = \dfrac{4x - m}{x - 3}$

fonksiyonu bir sabit fonksiyon olduğuna göre, m + f(m) işleminin sonucu kaçtır?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

11. $f(x) = x^2 + x - 1$

olduğuna göre, f(x − 1) − f(− x) aşağıdakilerden hangisidir?

A) − 2x B) − 1 C) 0 D) x E) 2

12. $f(x) = 5x + (a.b)\,x - b + 4$

fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre, a . f(2) değeri kaçtır?

A) − 4 B) − 2 C) − 1 D) 1 E) 2

13. Uygun şartlarda f fonksiyonu

$$f\left(\frac{x}{1 + x^2}\right) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

eşitliği ile verildiğine göre, $f^{-1}(2)$ kaçtır?

A) $-\dfrac{3}{10}$ B) $\dfrac{3}{10}$ C) $-\dfrac{3}{2}$ D) $\dfrac{3}{2}$ E) $-\dfrac{1}{2}$

14. $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\sqrt{x}$ B) $\sqrt{x - 1}$ C) $\sqrt{x} - 1$

D) $\sqrt{x + 2}$ E) $\sqrt{x + 1}$

15. $f : R - \{4\} \to R - \{-3\}$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{mx + 7}{3x - n}$$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{-9x + 7}{2x - 12}$ B) $\dfrac{12x + 7}{3x - 9}$ C) $\dfrac{9x + 7}{3x + 12}$

D) $\dfrac{9x + 7}{3x - 9}$ E) $\dfrac{12x + 7}{3x + 9}$

16. Reel sayılar kümesinde bir f fonksiyonu,

"Her bir reel sayıyı, üçte birinin iki fazlasına götürmektedir."

şeklinde tanımlanıyor.

Buna göre, f^{-1} fonksiyonunun tanımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) Her bir reel sayıyı, üç katının iki eksiğine götürmektedir.
B) Her bir reel sayıyı, iki eksiğinin üç katına götürmektedir.
C) Her bir reel sayıyı, iki fazlasının üçte birine götürmektedir.
D) Her bir reel sayıyı, iki eksiğinin üçte birine götürmektedir.
E) Her bir reel sayıyı, üçte birinin iki eksiğine götürmektedir.

17. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

$(f \circ g)(x) = x + 3$

olduğuna göre, g(1) kaçtır?

A) $-\dfrac{10}{3}$ B) $-\dfrac{8}{3}$ C) 1 D) $\dfrac{8}{3}$ E) $\dfrac{10}{3}$

18. $(f \circ g)(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ ve $g(x) = x - 1$

olduğuna göre, f(x) aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\dfrac{x+1}{x-2}$ B) $\dfrac{x}{x-1}$ C) $\dfrac{x^2}{1+x+x^2}$

D) $\dfrac{x-1}{x+2}$ E) $\dfrac{x}{1+x^2}$

19. $(f \circ g)(x) = 4.g^2(x) + 8$

olduğuna göre, f(2) kaçtır?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 18 E) 24

20. f ve g fonksiyonları bire bir ve örtendir.

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$ ve $(f \circ g)(x) = 3x - 5$

olduğuna göre, (g o f)(x) in g(x) türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2.g(x)$ B) $3.g(x)$ C) $12.g(x) + 1$

D) $g(x) - 1$ E) $3.g(x) - 1$

21. $f(x) = x^2 + 2$

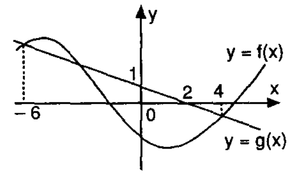
$g(x) = 3x + 1$

$(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 1$

olduğuna göre, a değeri kaçtır?

A) 18 B) 16 C) 12 D) 10 E) 8

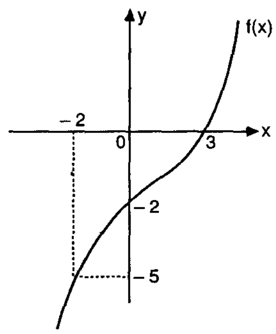
22. Şekilde $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre, $\dfrac{g(4) - g^{-1}(4)}{f(4) - g^{-1}(1)}$ **değeri kaçtır?**

A) 10 B) 3 C) 1 D) −3 E) −5

23.



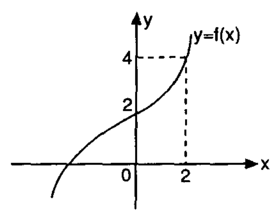
Yukarıdaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f(a + 3) = (f \circ f)^{-1}(-5)$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 0 B) −1 C) 1 D) −2 E) 2

24. Şekilde, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$(f \circ f)(3a - 6) = 4$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

CEVAP ANAHTARI

1-E	2-C	3-E	4-C	5-D	6-C	7-E	8-C	9-D	10-D	11-C	12-B
13-A	14-B	15-E	16-B	17-B	18-B	19-E	20-B	21-A	22-E	23-A	24-C

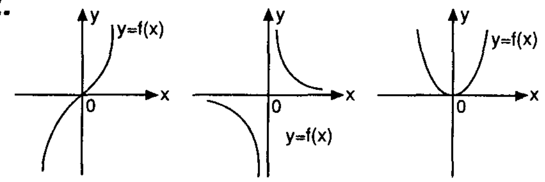
CEVAPLI TEST – 2

1. A = { a, b, c } ve B = { 1, 2, 3, 4, 5 }

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi f : A → B ye fonksiyondur?

A) {(a,2) , (c,3) , (4, c) , (b, 2)}
B) {(a, 3) , (2, a) , (c, 1)}
C) {(a, 1) , (a, 2) , (b, 1), (c, 2)}
D) {(a, 1) , (b, 1) , (c, 1)}
E) {(2, a) , (1, b) , (3, a) , (4, c) , (5, a)}

2.



(I) (II) (III)

Yukarıdaki I, II ve III nolu fonksiyon grafiklerinden hangisi ya da hangileri R – { 0 } dan R – { 0 } a tanımlı, bire bir ve örten fonksiyondur?

A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II

D) I ve III E) I, II ve III

3. A = { – 2, – 1, 0, 1, 2, 27 } olmak üzere,

A dan R ye $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ şeklinde bir f fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre, f(A) kümesinin elemanlarının toplamı kaçtır?

A) 5 B) 3 C) 0 D) – 1 E) – 2

4.
$$f(x + 2) = 2x + f(x + 1)$$
$$f(1) = 7$$

olduğuna göre, f(5) kaçtır?

A) 16 B) 19 C) 23 D) 27 E) 30

5.
$$f(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$$

olduğuna göre, f(3x) fonksiyonunun f(x) türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2f^3(x)$ B) $4f^2(x)$ C) $f^2(x) - 1$

D) $3.f(x) - 4$ E) $4.f^3(x) - 3.f(x)$

6.
$$f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = 2x - 1$$

olduğuna göre, f(x) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x+1}{2x-1}$ B) $\frac{1-x}{x-2}$ C) $\frac{x-3}{x+1}$

D) $\frac{2-x}{x+3}$ E) $\frac{x-1}{x-3}$

7. f : R – {0} → R olmak üzere,

$$2.f\left(\frac{x}{3}\right) - f\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$$

olduğuna göre, f(3) kaçtır?

A) $\frac{16}{5}$ B) $\frac{10}{3}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $-\frac{5}{2}$ E) $-\frac{10}{3}$

8. a bir pozitif reel (gerçel) sayıdır.

$$f(x + 3) = a^{x-3}$$

olduğuna göre, $\frac{f(x+7)}{f(x-2)}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) f(0) B) f(5) C) f(10) D) f(15) E) f(20)

9. $f(x+1) = x^3 - 3x(x-1) - 1$

olduğuna göre, $f(2+\sqrt{3})$ değeri kaçtır?

A) $-3\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) 0 D) $\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

10. $f(x) = \dfrac{(k-2)x+4}{3x+2}$

fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre, k kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

11. $f: R-\{a\} \rightarrow R-\{b\}$ ye tanımlı, bire bir ve örten $y = f(x)$ fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{3x-1}{2x+5}$$

olduğuna göre, $\frac{a}{b}$ kaçtır?

A) $-\frac{5}{2}$ B) $-\frac{5}{3}$ C) $-\frac{5}{4}$ D) -1 E) $-\frac{5}{6}$

12. $f: R \rightarrow R$ olmak üzere,

$$f\left(\frac{4x^2-1}{3}\right) = 2x - 3$$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{x^2-6x+8}{3}$ B) $\dfrac{x^2-6x-8}{3}$

C) $\dfrac{x^2+6x-8}{3}$ D) $\dfrac{x^2+6x+8}{3}$

E) $\dfrac{x^2+6x-7}{3}$

13. $y = f(x)$ doğrusal bir fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) + f(2x) = 6x + 8$$

olduğuna göre, f(2) kaçtır?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

14. f, bire bir ve örten bir fonksiyondur.

$$f^{-1}(x+2) = x - 3$$
$$f(2f^{-1}(a)) = 3$$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) -1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 10

15. $f: R-\left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow R-\{0\}$ olmak üzere,

$$2x+1 = \frac{2.f(x)-2}{f(x)}$$

olduğuna göre, $f^{-1}(6)$ değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) 4

16. A ve B sırasıyla 3 ve 4 elemanlı iki küme olduğuna göre, A dan B ye <u>fonksiyon olmayan</u> kaç tane bağıntı tanımlanabilir?

A) 4096 B) 4032 C) 3948 D) 3900 E) 38400

17.

$$f(x) = x^2 + 6ax + b$$
$$3.g(x) = x - 1$$
$$(g \circ f)(2) = 3a + 1$$

olduğuna göre, a ile b arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a = b$ B) $a = 2b$ C) $a = -b$ D) $a = 3b$ E) $3a = -b$

18. $f(x) = 2^{x+1}$ ve $g(x) = 3^{x-a}$

fonksiyonları için, $(g \circ f)(2) = 9$ eşitliğini sağlayan a değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

19. $f(x) = 2x - 5$

$(f \circ g)(x) = 6x^2 + 2x + 1$

olduğuna göre, g(x) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x^2 + 1$ B) $3x^2 + 2$ C) $2x^2 - x + 1$

D) $3x^2 + x + 3$ E) $x^2 - 1$

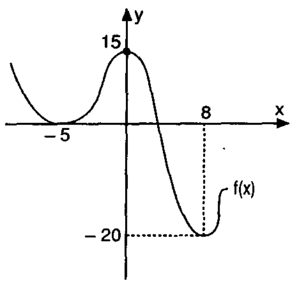
20. f ve g ; R de tanımlı iki fonksiyon olmak üzere,

$$f^{-1}\left(\frac{2-x}{5}\right) = g\left(\frac{3-x}{4}\right)$$

olduğuna göre (f o g)(3) kaçtır?

A) $\frac{11}{5}$ B) $\frac{9}{5}$ C) $-\frac{7}{5}$ D) 0 E) $\frac{3}{4}$

21.



Şekildeki f(x) fonksiyonu için,

$$f(f(3 - f^{-1}(-20))$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 0 B) 8 C) 10 D) 15 E) − 20

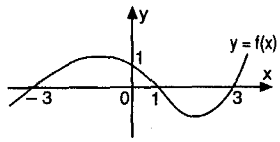
22. A = { 1 , 2 , 3 , 4 } kümesi üzerinde tanımlı f : A → A ve g : A → A fonksiyonları için,

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } g = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğuna göre, $\dfrac{f(4) + g^{-1}(f^{-1}(3))}{(f^{-1} \circ g)(4)}$ **kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

23.



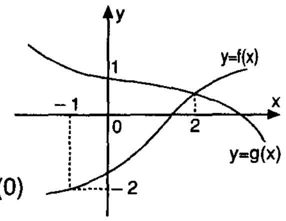
Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$$2a + 1 = f^{-1}(0)$$

eşitliğini sağlayan a değerlerinin toplamı kaçtır?

A) − 2 B) − 1 C) 0 D) 1 E) 2

24. Şekilde y = f(x) ve y = g(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



$$(g^{-1} \circ f)(2) + f^{-1}(k) = g(0)$$

olduğuna göre, k kaçtır?

A) − 2 B) − 1 C) 1 D) 2 E) 5

CEVAP ANAHTARI

1-D	2-C	3-B	4-B	5-E	6-C	7-B	8-D	9-E	10-E	11-B	12-D
13-B	14-C	15-B	16-B	17-E	18-C	19-D	20-A	21-D	22-D	23-B	24-A

CEVAPLI TEST - 3

1. Bir f fonksiyonu, "Her bir pozitif tamsayıyı karekökü ile çarpmaya göre tersinin çarpımına götürür." şeklinde tanımlanmıştır.

Bu fonksiyon aşağıdakilerden hangisi ile gösterilebilir?

A) $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ B) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ C) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

D) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{x}$ E) $f(x) = -\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$

2. Aşağıdakilerden hangisi bire bir ve örten fonksiyondur?

A) $f : R \to R$, $f(x) = x^2 + x + 2$
B) $f : Z \to Z$, $f(x) = 3x + 1$
C) $f : R \to R$, $f(x) = 3x - x^2$
D) $f : R \to Z$, $f(x) = 4x + 3$
E) $f : Z \to Z$, $f(x) = -x + 2$

3. $$f\left(\frac{1-x}{2+x}\right) = \frac{2x+4}{1-x}$$

olduğuna göre, f(3) kaçtır?

A) $-\dfrac{5}{3}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) 0 D) $\dfrac{5}{3}$ E) 1

4. $$x.f(x-1) + f(2x+1) = x^2 + x + 5$$

olduğuna göre, f(0) + f(3) toplamı kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

5. $$f(x) = 2^{x-1}$$

olduğuna göre, f(x − 2y + 1) ifadesi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $f(x).f(y)$ B) $\dfrac{f(x)}{f(y)}$ C) $\dfrac{f(x)}{f(2y)}$

D) $f(x) + f(2y)$ E) $f(x).f(2y)$

6. $$f(x-1) = \begin{cases} 3x-1, & x \geq 1 \text{ ise} \\ x^2-1, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre, f(0) + f(1) toplamı kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 1 D) 5 E) 7

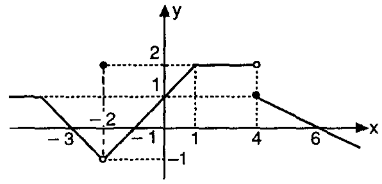
7. $$f(x) = \frac{x+2}{x}$$

olduğuna göre, f(x − 2) nin f(x) türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{2}{f(x)-1}$ B) $\dfrac{f(x)+2}{f(x)}$ C) $\dfrac{f(x)-1}{2-f(x)}$

D) $\dfrac{1}{2-f(x)}$ E) $\dfrac{1+f(x)}{2-f(x)}$

8.



Yukarıdaki şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği veriliyor.

Buna göre, $\dfrac{f(-3) + f(0) + f(\pi)}{f(-2) - f(1) + f(4)}$ **oranı kaçtır?**

A) −3 B) −1 C) 0 D) 1 E) 3

9. $f(x^2 - 3x) = 4x^2 - 6x + 1$

olduğuna göre, $f(-\frac{9}{4})$ kaçtır?

A) $-\frac{9}{4}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 3

10. $f(2x + 1) = 3x - 2$

olduğuna göre, $f(-1) + f(1)$ kaçtır?

A) -7 B) -5 C) -2 D) 0 E) 3

11. $f(x) : R - \{a\} \to R - \{b\}$ olmak üzere,

$$x = \frac{2f(x) + 1}{3 - f(x)}$$

eşitliğini sağlayan $y = f(x)$ fonksiyonu bire bir ve örten olduğuna göre, a.b çarpımı kaçtır?

A) 6 B) 3 C) 1 D) -3 E) -6

12. $f(x) = \dfrac{(2m+1)x + 1}{x - m}$

fonksiyonu için $f(x) = f^{-1}(x)$ olduğuna göre, $m^2 - 1$ değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

13. Uygun şartlarda tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonu,

$$2xy - 4y^2 = x + 6$$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{4x+6}{2x-1}$ B) $\frac{2x^2-6}{2x+1}$ C) $\frac{2x^2}{2x-1}$

D) $\frac{4x^2-2}{2x-1}$ E) $\frac{4x^2+6}{2x-1}$

14. $f : (-\infty, -2] \to [-3, +\infty)$ olmak üzere,

$$f(x) = x^2 + 4x + 1$$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2 + \sqrt{x+3}$ B) $2 - \sqrt{x-3}$

C) $-1 - \sqrt{x-3}$ D) $-2 - \sqrt{x+3}$

E) $1 + \sqrt{x+4}$

15. $f(x - 3) = 5^{2x-1}$

olduğuna göre, $f(-2) + f^{-1}(125)$ kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

16. $f(x) = ax^2 - ax + 1$

$f^{-1}(3) = -1$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

17.
$$f(x) = \begin{cases} 7 - x, & x \geq 4 \text{ ise}, \\ \dfrac{3x-1}{-7}, & 0 \leq x < 4 \text{ ise}, \\ 7x - 2 + k, & x < 0 \text{ ise}, \end{cases}$$

$(f \circ f \circ f)(5) = 3$ olduğuna göre, k kaçtır?

A) 7 B) 10 C) 12 D) 14 E) 19

18. a pozitif bir tamsayı ve $x > 0$ olmak üzere,

$$(f \circ g)(x) = g^2(x) - a^2$$

$$f^{-1}(5) = 3$$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 9 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

19.

$$g(x) = x - 2$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 1$$

olduğuna göre, f(x) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 - 1$ B) $x^2 + x$ C) $x^2 - 3$

D) $2x^2 + 1$ E) $2x^2 - 3$

20. f, g ve h, bire bir ve örten fonksiyondur.

$$(f^{-1} \circ h)(x) = \frac{3}{x}$$

$$(g \circ h)(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$(g \circ f)(m) = 2$$

olduğuna göre, m kaçtır?

A) -4 B) $-\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 4 E) $\frac{8}{3}$

21. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

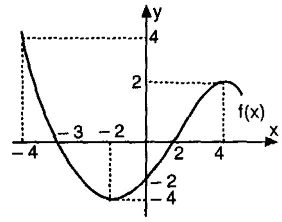
olmak üzere, f ve g permütasyon fonksiyonları veriliyor.

$$(f \circ g^{-1})(a) = 4$$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

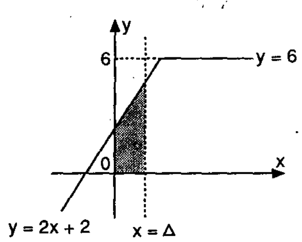
22.



Şekildeki f(x) fonksiyonu için,
$\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f \circ f)}_{29 \text{ tane}}(4)$ **değeri kaçtır?**

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

23.



Yukarıdaki şekilde, $\Delta < 1$ için;

f : x → "Δ nın solundaki taralı alanın ölçüsü" biçiminde bir f fonksiyonu tanımlamıştır.

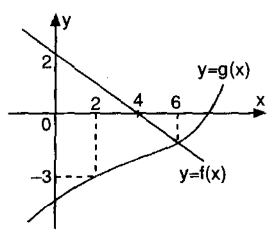
Buna göre, f(6) değeri kaçtır?

A) 24 B) 27 C) 30 D) 32 E) 36

24. Yandaki şekilde,

$y = f(x)$ ve $y = g(x)$

fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



y = g(x) doğrusal bir fonksiyon olduğuna göre,
$(f^{-1} \circ g)(6) + (f \circ g^{-1})(-3)$ değeri kaçtır?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

CEVAP ANAHTARI											
1-C	2-E	3-B	4-B	5-C	6-E	7-D	8-E	9-C	10-A	11-E	12-C
13-E	14-D	15-B	16-D	17-B	18-D	19-C	20-B	21-C	22-A	23-D	24-E

20. BÖLÜM İŞLEM

A, boş olmayan bir küme ve $A \subset B$ olmak üzere, A x A kümesinden B kümesine tanımlı her fonksiyona, A kümesinde tanımlı **ikili işlem** ya da **işlem** denir.

İşlemi $+, -, ., \star, o, \oplus, \otimes, \ldots$ gibi sembollerle gösteririz.

Örnek:

$(4, 1) \xrightarrow{+} 5 \ldots\ldots 4 + 1 = 5$

$(4, 1) \xrightarrow{-} 3 \ldots\ldots 4 - 1 = 3$

$(4, 2) \xrightarrow{\cdot} 8 \ldots\ldots 4.2 = 8$

$(4, 2) \xrightarrow{:} 2 \ldots\ldots 4 : 2 = 2$

$(x, y) \xrightarrow{\star} z \ldots\ldots x \star y = z$

Örnek:

Tamsayılar kümesi üzerinde,

$$a \star b = a^3 - b^3$$

şeklinde " $\star$ " işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, $4 \star 2$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$a \star b = a^3 - b^3$ olduğundan,

$4 \star 2 = 4^3 - 2^3 = 64 - 8 = 56$ dır.

Örnek:

Tamsayılar kümesi üzerinde,

$$a \Delta b = 2a - 3b$$

şeklinde " Δ " işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, $5 \Delta (4 \Delta 2)$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$a \Delta b = 2a - 3b$ olduğundan,

$5 \Delta (4 \Delta 2) = 5 \Delta (2.4 - 3.2) = 5 \Delta (8 - 6)$

$= 5 \Delta 2 = 2.5 - 3.2$

$= 10 - 6$

$= 4$ tür.

Örnek:

B = { N, İ, H, A, L }

★	N	İ	H	A	L
N	L	N	İ	H	A
İ	N	İ	H	A	L
H	İ	H	A	L	N
A	H	A	L	N	İ
L	A	L	N	İ	H

kümesi üzerinde $\star$ işlemi yandaki tabloya göre tanımlanıyor.

a) $N \star A$ sonucunu bulalım.

b) $(A \star H) \star L$ sonucunu bulalım.

c) $H \star x = İ$ ise x i bulalım.

Çözüm:

a) $N \star A = H$

b) $(A \star H) \star L$

$= (L) \star L$

$= H$ dir.

★	N	İ	H	A	L
N	L	N	İ	H	A
İ	N	İ	H	A	L
H	İ	H	A	L	N
A	H	A	L	N	İ
L	A	L	N	İ	H

c) $H \star N = İ$ olduğundan $H \star x = İ$ eşitliğinde $x = N$ dir.

İŞLEMİN ÖZELLİKLERİ

1) Kapalılık Özelliği

A boş olmayan bir küme ve $\star$, A da tanımlı bir işlem olsun.

$\forall x, y \in A$ için $x \star y \in A$ ise **A kümesi " $\star$ " işlemine göre kapalıdır** denir.

Örnek:

A = { 1, 2, 3, 4 } kümesi üzerinde tanımlı,

$$x \star y = x.y + 1$$

işlemine göre, A kümesinin kapalı olup olmadığını bulalım.

Çözüm:

A kümesinin $\star$ işlemine göre kapalı olabilmesi için A ya ait herhangi iki eleman ile yapılan işlemin sonucu yine A nın bir elemanı olmalıdır.

$3 \in A$ ve $4 \in A$ dır.

Fakat, $3 \star 4 = 3.4 + 1 = 13 \notin A$ dır.

Demek ki, A kümesi $\star$ işlemine göre kapalı değildir.

Örnek:

A = { f, e, m }

kümesinin, yandaki tabloda tanımlanan □ işlemine göre kapalı olup olmadığını inceleyelim.

□	f	e	m
f	f	f	f
e	f	e	m
m	f	m	e

Çözüm:

Tablodan da görüleceği gibi, A dan alınan herhangi iki elemanın □ işlemine göre sonucu yine A ya ait bir elemandır. Bunun için, A kümesi □ işlemine göre kapalıdır.

Örnek:

N (Doğal sayılar kümesi), toplama işlemine göre kapalıdır. Çünkü herhangi iki doğal sayının toplamı yine bir doğal sayıdır.

Örnek:

R (Reel sayılar kümesi), çarpma işlemine göre kapalıdır. Çünkü, herhangi iki reel sayının çarpımı yine bir reel sayıdır.

2) Değişme Özelliği

A boş olmayan bir küme ve ★ , A da tanımlı bir işlem olsun.

$\forall x, y \in A$ için, $x \star y = y \star x$ ise ★ **işleminin değişme özelliği vardır** denir.

Örnek:

Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı

$$x \star y = 3x + 3y + 1$$

işleminin değişme özelliğine sahip olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$\forall x, y \in R$ için,

$x \star y = 3x + 3y + 1$

$\quad = 3y + 3x + 1$

$\quad = y \star x$

olduğundan ★ işleminin değişme özelliği vardır.

Örnek:

A = { x, y, z }

kümesinde yandaki tabloyla tanımlanan ● işleminin değişme özelliği vardır. Çünkü, ● işleminin tablosu sol köşegene göre simetriktir.

●	x	y	z
x	z	x	y
y	x	y	z
z	y	z	x

3) Birleşme Özelliği

A, boş olmayan bir küme ve ★ , A da tanımlı bir işlem olsun.

$\forall x, y, z \in A$ için, $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$ ise ★ **işleminin birleşme özelliği vardır** denir.

Örnek:

Tamsayılar kümesi üzerinde tanımlanan + (toplama) ve . (çarpma) işleminin birleşme özelliği vardır. Fakat, – (çıkarma) işleminin birleşme özelliği yoktur.

4) Birim (Etkisiz) Eleman

A, boş olmayan bir küme ve ★ , A da tanımlı bir işlem olsun.

$\forall x \in A$ için, $x \star e = e \star x = x$ olacak şekilde bir $e \in A$ varsa **e ye ★ işleminin birim (etkisiz) elemanı** denir.

Not:

1) Etkisiz eleman varsa, sabit ve bir tanedir.
2) Değişme özelliği olan ★ işleminde $x \star e = e \star x = x$ olacağından bu işlemin etkisiz (birim) elemanı sadece $x \star e = x$ veya sadece $e \star x = x$ eşitliğinden bulunabilir.

Örnek:

Tamsayılar kümesinde tanımlı,

$$x \Delta y = x + y + 2$$

işleminin birim (etkisiz) elemanını bulalım.

Çözüm:

Δ işleminin birim elemanı e olsun.

Δ işlemi değişmeli olduğu için $x \Delta e = x$ şartını sağlayan e elemanını bulmalıyız.

$x \Delta e = x \Rightarrow x + e + 2 = x$

$\Rightarrow e + 2 = 0$

$\Rightarrow e = -2$ dir.

" Δ " işleminin etkisiz elemanı – 2 dir.

Örnek:

$T = \{K, E, M, A, L\}$

kümesi üzerinde yandaki tabloyla tanımlanan □ işleminin etkisiz elemanını bulalım.

□	K	E	M	A	L
K	K	E	M	A	L
E	E	M	A	L	K
M	M	A	L	K	E
A	A	L	K	E	M
L	L	K	E	M	A

Çözüm:

Tablodan da görüleceği gibi,

□	K	E	M	A	L
K	K	E	M	A	L
E	E	M	A	L	K
M	M	A	L	K	E
A	A	L	K	E	M
L	L	K	E	M	A

K □ K = K

E □ K = K □ E = E

M □ K = K □ M = M

A □ K = K □ A = A

L □ K = K □ L = L

olduğundan □ işleminin etkisiz elemanı K dir.

Örnek:

R de tanımlanan,

$$x \bigstar y = x + y + xy$$

işleminin etkisiz elemanını bulalım.

Çözüm:

★ işleminin etkisiz elemanı e olsun.

★ işlemi değişmeli olduğu için $x \bigstar e = x$ şartını sağlayan e elemanını bulmalıyız.

$$x \bigstar e = x \Rightarrow x + e + x.e = x$$
$$\Rightarrow e + x.e = 0$$
$$\Rightarrow e(1 + x) = 0 \text{ dır.}$$

Bu eşitliğin tüm x reel değerlerini sağlanması için $e = 0$ olmalıdır.

"★" işleminin etkisiz elemanı 0 dır.

Örnek:

$\forall x \in A$ için, $x + 0 = 0 + x = x$

$x.1 = 1.x = x$

olduğu için reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan toplama işleminin etkisiz elemanı 0 (sıfır) ve çarpma işleminin etkisiz elemanı 1 (bir) dir.

5) Bir Elemanın Tersi

A boş olmayan bir küme ve ★, A da tanımlı bir işlem olsun. Bu işlemin birim elemanı e ve $x \in A$ için,

$$x \bigstar y = y \bigstar x = e$$

şartını sağlayan **$y \in A$ ya ★ işlemine göre x in tersi denir ve $x^{-1} = y$** şeklinde gösterilir.

Not:

1) Bir işlemin etkisiz elemanı yoksa ters elemandan söz edilemez.

2) Bir elemanın tersinin tersi kendisidir.

3) Etkisiz elemanın tersi kendisidir.

Örnek:

Reel sayılar kümesinde tanımlanan,

$$x \Delta y = x + y - 5xy$$

işlemine göre, 2 nin tersini bulalım.

Çözüm:

Önce Δ işleminin birim elamanı olan e yi bulalım.

Δ işlemi değişmeli olduğundan $x \Delta e = x$ den e yi bulalım.

$$x \Delta e = x \Rightarrow x + e - 5xe = x$$
$$e - 5xe = 0$$
$$e(1 - 5x) = 0$$
$$\therefore \quad e = 0 \text{ dır.}$$

2 nin tersi a olsun.

$$2 \Delta a = 0 \Rightarrow 2 + a - 5.2.a = 0$$
$$2 - 9a = 0$$
$$a = \frac{2}{9} \text{ dur.}$$

Örnek:

$C = \{S, A, K, I, P\}$

kümesinde tanımlanan ☆ işlemine göre her elemanın tersini bulalım.

☆	S	A	K	I	P
S	I	P	S	A	K
A	P	S	A	K	I
K	S	A	K	I	P
I	A	K	I	P	S
P	K	I	P	S	A

Çözüm:

☆ işlemine göre etkisiz eleman K dır.

S ☆ P = P ☆ S = K olduğu için $S^{-1} = P$ dir.

A ☆ I = I ☆ A = K olduğu için $A^{-1} = I$ dır.

K ☆ K = K olduğu için $K^{-1} = K$ dır.

I ☆ A = A ☆ I = K olduğu için $I^{-1} = A$ dır.

P ☆ S = S ☆ P = K olduğu için $P^{-1} = S$ dir.

Örnek:

Reel sayılar kümesinde toplama işlemine göre etkisiz eleman 0 olduğundan,

$\forall x \in R$ için, $x + x^{-1} = x^{-1} + x = 0$

şartını sağlayan $x^{-1} = -x \in R$ dir.

Reel sayılar kümesinde . (çarpma) işlemine göre etkisiz eleman 1 olduğundan,

$\forall x \in R$ için, $x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$

şartını sağlayan $x^{-1} = \dfrac{1}{x} \in R$ dir.

Örneğin, 5 in $+$ işlemine göre tersi -5, . işlemine göre tersi $\frac{1}{5}$ tir.

6) Yutan Elaman

$\forall x \in A$ için, $x \star y = y \star x = y$ ise $y \in A$ **elemanına $\star$ işleminin yutan elemanı denir.**

Örnek:

R de tanımlanan,

$$x \star y = x + y - 3xy$$

işlemine göre, yutan elemanı bulalım.

Çözüm:

Yutan eleman y olsun.

$\star$ işlemi değişmeli olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \forall x \in R \text{ için } x \star y &= y \\ x + y - 3xy &= y \\ x - 3xy &= 0 \\ x(1 - 3y) &= 0 \\ 1 - 3y &= 0 \\ y &= \frac{1}{3} \text{ tür.} \end{aligned}$$

Not.:

Yutan elemanın tersi yoktur.

Örnek:

$B = \{ A, L, İ \}$

$\odot$	A	L	İ
A	A	A	A
L	A	L	İ
İ	A	İ	L

kümesinde tanımlanan $\odot$ işleminin yutan elemanını bulalım.

Çözüm:

Tablodan da görüleceği gibi,

$\odot$	A	L	İ
A	A	A	A
L	A	L	İ
İ	A	İ	L

A $\odot$ A = A

A $\odot$ L = L $\odot$ A = A

A $\odot$ İ = İ $\odot$ A = A

olduğundan, $\odot$ işleminin yutan elemanı A dır.

Örnek:

Reel sayılar kümesinde tanımlanan . işlemine göre yutan eleman 0 dır.

Çünkü, $\forall x \in R$ için, $x.0 = 0.x = 0$ dır.

Reel sayılar kümesinde tanımlanan $+$ işleminin yutan elemanı yoktur.

7) Dağılma Özelliği

Δ ve $\star$, A da tanımlı iki işlem olsun.

$\forall x, y, z \in A$ için,

$x \,\Delta\, (y \star z) = (x \,\Delta\, y) \star (x \,\Delta\, z)$ (soldan dağılma özelliği)

$(y \star z) \,\Delta\, x = (y \,\Delta\, x) \star (z \,\Delta\, x)$ (sağdan dağılma özelliği)

oluyorsa, Δ **işleminin $\star$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır** denir.

Örnek:

Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan . işleminin $+$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Çünkü, $\forall x, y, z \in R$ için,

$x.(y + z) = x.y + x.z$ ve

$(y + z).x = y.x + z.x$ dir.

Örneğin, $2, 4, 6 \in R$ için,

$$\begin{aligned} 2.(4 + 6) &= 2.4 + 2.6 \\ 2.10 &= 8 + 12 \\ 20 &= 20 \text{ ve} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4 + 6).2 &= 4.2 + 6.2 \\ 10.2 &= 8 + 12 \\ 20 &= 20 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Uyarı :

Boş olmayan bir A kümesi üzerinde tanımlı "$\star$" işlemi,

1) A kümesi $\star$ işlemine göre kapalı ise,
2) birleşme özelliği varsa,
3) etkisiz (birim) elemanı varsa,
4) işleme göre, her elemanın tersi varsa bir gruptur. Değişme özelliği de varsa (A, $\star$) değişmeli gruptur.

Örnek:

1) Reel sayılar kümesi toplama (+) işlemine göre değişmeli bir gruptur.

2) Doğal sayılar kümesi ise toplama (+) işlemine göre bir grup değildir. Çünkü 3 ün toplama işlemine göre tersi olan -3 bir doğal sayı değildir.

ÇÖZÜMLÜ TEST

1. Tamsayılar kümesinde tanımlı "☆" işlemi,

$$a \star b = 2a + 3b$$

şeklinde verildiğine göre, 5 ☆ 1 kaçtır?

A) 8 B) 10 C) 13 D) 17 E) 19

2. Tamsayılar kümesinde tanımlı,

$$a \,\Delta\, b = a + b - 4$$

işlemi veriliyor.

x Δ 5 = 6 Δ 7 olduğuna göre, x değeri kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

3. R – { 0 } da,

$$\frac{1}{a \,\Delta\, b} = \frac{2}{a} + \frac{3}{b}$$

biçiminde " Δ " işlemi tanımlanıyor.

Buna göre, 2 Δ 1 değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{7}$ C) 1 D) $\frac{7}{2}$ E) 4

4.

$$x \star y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

biçiminde "☆" işlemi tanımlanıyor.

$$n \star \frac{1}{3} = 7$$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

5. A = { 0, 1, 2, 3, 4 } kümesinde her a ve b için, a Δ b = "a veya b den büyük olmayanı" şeklinde bir Δ işlemi tanımlanıyor.

$$3 \,\Delta\, x = 3$$

olduğuna göre, x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6. R – { 0 } kümesi üzerinde her x, y için,

$$\frac{3}{x} \,\Delta\, \frac{y}{2} = \frac{y}{x}$$

biçiminde bir " Δ " işlemi tanımlanıyor.

Buna göre, x Δ y aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{xy}{6}$ B) 3xy C) $\frac{3xy}{2}$ D) $\frac{2xy}{3}$ E) $\frac{3y}{2x}$

7. Reel sayılar kümesinde " ★ " ve " o " işlemleri,

$$x \bigstar y = x \circ y - 2xy$$
$$a \circ b = a^2 + b^2$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, 2 ★ 1 kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 9

8. Reel sayılar kümesi üzerinde,

$$x \,\square\, y = 2x + 3y - 2(y \,\square\, x)$$

biçiminde " □ " işlemi tanımlanıyor.

Buna göre, 1 □ 2 kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. Reel sayılar kümesinde " ☆ " işlemi,

$$a ☆ b = \frac{a.b}{3}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, ☆ işleminin etkisiz elemanı kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) 3 E) 4

10. Tamsayılar kümesi üzerinde,

$$p \bigstar q = p + q - 2$$

biçiminde " ★ " işlemi tanımlanıyor.

Buna göre, 3 ün " ★ " işlemine göre tersi kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 1 D) 2 E) 3

11. Doğal sayılar kümesinde,

a ★ b = "a ile b nin ortak katlarının en küçüğü"

$$x \Delta y = y^x$$

biçiminde ★ ve Δ işlemleri tanımlanıyor.

Buna göre, (5 ★ 4) Δ 2 değeri kaçtır?

A) 2^{17} B) 2^{18} C) 2^{19} D) 2^{20} E) 2^{21}

12. Reel sayılar kümesi üzerinde her m, n için,

$$m \bigstar n = m.n - m - n + 2$$

biçiminde " ★ " işlemi tanımlanıyor.

Buna göre, " ★ " işleminin etkisiz (birim) elemanı kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

13. Reel sayılar kümesinde " ☆ " işlemi,

$$x ☆ y = x + y + 4.a$$

biçiminde tanımlanıyor.

3 ün " ☆ " işlemine göre tersi – 11 olduğuna göre, a kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

14. Reel sayılar kümesi üzerinde her a, b için,

$$a \Delta b = a + b + 4.a.b$$

biçiminde " Δ " işlemine göre, tersi kendisine eşit olan en küçük reel sayı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{3}{2}$ E) $-\frac{5}{2}$

15. Reel sayılar kümesinde,

$$x \circ y = \frac{2x + 2y + x.y}{2}$$

biçiminde tanımlı " o " işlemine göre, tersi olmayan reel sayı kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) $-\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

16. A = { 1, 2, 3, 4, 5 }

kümesi üzerinde " Δ " işlemi yandaki tablo ile tanımlanmıştır.

Δ	1	2	3	4	5
1	4	5	1	2	3
2	5	1	2	3	4
3	1	2	3	4	5
4	2	3	4	5	1
5	3	4	5	1	2

Buna göre, (1 Δ 4) Δ (2 Δ 5) işleminin sonucu kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17. A = { 1, 2, 3, 4, 5 }

kümesi üzerinde " Δ " işlemi yandaki tablo ile tanımlanmıştır.

Δ	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	1
3	3	4	5	1	2
4	4	5	1	2	3
5	5	1	2	3	4

$$a^2 = a \Delta a$$
$$a^2 = 2 \Delta 4^{-1}$$

olduğuna göre, a kaçtır?
(4^{-1}, 4 ün " Δ " işlemine göre tersidir.)

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18. A = { a, b, c, d, e, f }

kümesinde tanımlı " ☆ " işleminin tablosu yanda verilmiştir.

☆	a	b	c	d	e	f
a	c	d	e	f	a	b
b	d	e	f	a	b	c
c	e	f	a	b	c	d
d	f	a	b	c	d	e
e	a	b	c	d	e	f
f	b	c	d	e	f	a

" ☆ " işlemine göre tersi kendisine eşit olan elemanlar x ve y olduğuna göre, x ☆ y aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) a B) b C) c D) d E) f

TESTİN ÇÖZÜMLERİ

1. $a \star b = 2a + 3b$ olduğundan,
$5 \star 1 = 2.5 + 3.1 = 10 + 3 = 13$ tür.

Cevap: C

2. $a \Delta b = a + b - 4$ olduğundan,
$$x \Delta 5 = 6 \Delta 7$$
$$x + 5 - 4 = 6 + 7 - 4$$
$$x + 1 = 9$$
$$x = 8 \text{ dir.}$$

Cevap: D

3. $\dfrac{1}{a \Delta b} = \dfrac{2}{a} + \dfrac{3}{b}$ olduğundan,
$$\frac{1}{2 \Delta 1} = \frac{2}{2} + \frac{3}{1}$$
$$\frac{1}{2 \Delta 1} = 1 + 3$$
$$\frac{1}{2 \Delta 1} = 4$$
$$\frac{1}{4} = 2 \Delta 1 \text{ dir.}$$

Cevap: A

4. $x \star y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ olduğundan,
$$n \star \frac{1}{3} = 7 \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 7$$
$$\frac{1}{n} + 3 = 7$$
$$\frac{1}{n} = 4$$
$$n = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

Cevap: B

5. Problemde verilen, işlemin tanımına göre, $x \geq 3$ şartını sağlayan x değerleri 3 ve 4 tür.

Buna göre, $3 + 4 = 7$ olur.

Cevap: E

6. $\dfrac{3}{x} \Delta \dfrac{y}{2} = \dfrac{y}{x}$ işleminde x yerine $\dfrac{3}{x}$ ve y yerine 2y yazarsak $x \Delta y$ işlemini buluruz.
O halde,
$$\frac{3}{\frac{3}{x}} \Delta \frac{2y}{2} = \frac{2y}{\frac{3}{x}}$$
$$x \Delta y = \frac{2xy}{3} \text{ tür.}$$

Cevap: D

7. $a \circ b = a^2 + b^2$ olduğundan,
$$x \bigstar y = x \circ y - 2xy$$
$$= x^2 + y^2 - 2xy$$
$$= (x - y)^2 \text{ dir.}$$
O halde, $2 \bigstar 1 = (2 - 1)^2 = 1^2 = 1$ dir.

Cevap: A

8. $x \square y = 2x + 3y - 2(y \square x)$
$$x \square y = 2x + 3y - 2(2y + 3x - 2\,(x \square y))$$
$$x \square y = 2x + 3y - 4y - 6x + 4\,(x \square y)$$
$$x \square y = -4x - y + 4\,(x \square y)$$
$$4x + y = 3(x \square y)$$
$$x \square y = \frac{4x + y}{3} \text{ tür.}$$
O halde, $1 \square 2 = \dfrac{4.1 + 2}{3} = 2$ dir.

Cevap: B

9. ☆ işleminin etkisiz elemanı e olsun. ☆ işlemi değişmeli olduğundan x ☆ e = x eşitliğinden e yi bulmalıyız.

$$x \,☆\, e \Rightarrow \frac{x.e}{3} = x$$
$$\Rightarrow \frac{e}{3} = 1$$
$$\Rightarrow e = 3 \text{ tür.}$$

Cevap: D

10. ★ işleminin etkisiz elemanı e olsun.

$$x \bigstar e = x \Rightarrow x + e - 2 = x$$
$$\Rightarrow e = 2 \text{ dir.}$$

3 ün ★ işlemine göre tersi a olsun.

O halde, $3 \bigstar a = 2 \Rightarrow 3 + a - 2 = 2$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ dir.}$$

Cevap: C

11. 5 ile 4 ün ortak katlarının en küçüğü 5.4 = 20 dir. O halde,

$5 \bigstar 4 = 20$ dir.

$(5 \bigstar 4)\ \Delta\ 2 = 20\ \Delta\ 2 = 2^{20}$ dir.

Cevap: D

12. ★ işleminin birim elemanı e olsun.

$$x \bigstar e = x \Rightarrow x.e - x - e + 2 = x$$
$$\Rightarrow x.e - e = x + x - 2$$
$$\Rightarrow e(x-1) = 2x - 2$$
$$\Rightarrow e(x-1) = 2(x-1)$$
$$\Rightarrow e = 2 \text{ dir.}$$

Cevap: E

13. ☆ işleminin etkisiz elemanı e olsun.

$$x \,☆\, e = x \Rightarrow x + e + 4a = x$$
$$\Rightarrow e = -4a \text{ dır.}$$

3 ün ☆ işlemine göre tersi – 11 olduğundan,

$$3 \,☆\, (-11) = -4a \Rightarrow 3 + (-11) + 4a = -4a$$
$$\Rightarrow -8 = -8a$$
$$\Rightarrow a = 1 \text{ dir.}$$

Cevap: E

14. Δ işleminin etkisiz elemanı e olsun.

$$x\ \Delta\ e = x \Rightarrow x + e + 4xe = x$$
$$\Rightarrow e + 4xe = 0$$
$$\Rightarrow e(1 + 4x) = 0$$
$$\Rightarrow e = 0 \text{ dır.}$$

Tersi kendisine eşit olan sayı a olsun.

O halde,

$$a\ \Delta\ a = 0 \Rightarrow a + a + 4a.a = 0$$
$$\Rightarrow 4a^2 + 2a = 0$$
$$\Rightarrow 2a(2a+1) = 0$$

eşitliğinden $a = 0$ veya $a = -\frac{1}{2}$ olur. a nın en küçük değeri $-\frac{1}{2}$ dir.

Cevap: C

15. $x \circ y = \frac{2x + 2y + x.y}{2} = x + y + \frac{x.y}{2}$ dir.

Bir işlemde tersi olmayan yutan elemandır. o işleminin yutan elemanı a olsun.

$$x \circ a = a \Rightarrow x + a + \frac{x.a}{2} = a \Rightarrow x + \frac{x.a}{2} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{x.a}{2} = -x \Rightarrow \frac{a}{2} = -1$$
$$\Rightarrow a = -2 \text{ dir.}$$

Cevap: A

16. Tablodan görüleceği gibi,

$1\ \Delta\ 4 = 2$, $2\ \Delta\ 5 = 4$ ve $2\ \Delta\ 4 = 3$ olduğundan, $(1\ \Delta\ 4)\ \Delta\ (2\ \Delta\ 5) = 2\ \Delta\ 4 = 3$ tür.

Cevap: C

17. Δ işleminin etkisiz elemanı 1 ve $4\ \Delta\ 3 = 1$ olduğundan 4 ün Δ işlemine göre tersi 3 tür.

$$a^2 = 2\ \Delta\ 4^{-1} \Rightarrow a\ \Delta\ a = 2\ \Delta\ 3$$
$$\Rightarrow a\ \Delta\ a = 4$$
$$\Rightarrow a\ \Delta\ a = 5\ \Delta\ 5$$

olduğundan a = 5 tir.

Cevap: E

18. ☆ işleminin birim elemanı e dir. $a^{-1} = c$, $b^{-1} = b$, $c^{-1} = a$, $d^{-1} = f$, $e^{-1} = e$, $f^{-1} = d$ olduğundan tersi kendisine eşit olan elemanlar e ile b dir. O halde, e ☆ b = b dir.

Cevap: B

CEVAPLI TEST

1. Pozitif reel sayılar kümesi üzerinde,

$$\frac{1}{a \Delta b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

biçiminde " Δ " işlemi tanımlanıyor.

Buna göre, $2 \Delta \left(3 \Delta \frac{1}{4}\right)$ değeri kaçtır?

A) $\frac{13}{19}$ B) $\frac{19}{26}$ C) $\frac{19}{13}$ D) $\frac{6}{29}$ E) 2

2. Reel sayılar kümesinde,

$$x \square y = (2^x + 1).y$$

biçiminde bir " □ " işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, $(-2) \square 4$ kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{4}$ C) 3 D) 4 E) 5

3. Tamsayılar kümesi üzerinde, her x ve y için, değişme özelliğine sahip " Δ " işlemi,

$$2(x \Delta y) = x^2 + y^2 - 2xy + (y \Delta x)$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, $7 \Delta 4$ kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

4. Reel sayılar kümesinde,

$$a \star b = a^2 + b^2 + 2.(b \star a)$$

biçiminde bir " ★ " işlemi tanımlanıyor.

Buna göre, $1 \star 3$ değeri kaçtır?

A) – 6 B) – 7 C) – 8 D) – 9 E) – 10

5. Pozitif reel sayılar kümesinde,

$$a \Delta b = \frac{2.a.b}{a+b}$$

biçiminde bir " Δ " işlemi tanımlanıyor.

$$x \Delta 2 = 1$$

olduğuna göre, x kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

6. Sıfırdan farklı reel sayılar kümesinde,

$$m \square n = \frac{(n \square m) + m}{n}$$

biçiminde bir " □ " işlemi tanımlanıyor.

Buna göre, $1 \square 2$ kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 3

7. Reel sayılar kümesinde, Δ ve o işlemleri,

$$\frac{1}{x \Delta y} = x.y \quad \text{ve} \quad x \circ y = x - y$$

biçiminde tanımlanıyor.

$$(a \Delta 1) \circ (3 \circ 2) = 6$$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{7}$

8. Reel sayılar kümesinde tanımlı,

$$a \odot b = a.b + a + b$$

işlemine göre, tersi kendisinin 3 katına eşit olan reel sayı aşağıdakilerden hangisi <u>olabilir</u>?

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $-\frac{2}{3}$ D) $-\frac{4}{3}$ E) $-\frac{3}{2}$

9. Reel sayılar kümesinde " ★ " ve " ▼ " işlemleri,

$$a \star b = a^2 + b^2 + (a \blacktriangledown b)$$
$$a \blacktriangledown b = 2ab$$

biçiminde tanımlanmıştır.

$$(2 \star n) - 25 = 0$$

eşitliğini sağlayan n değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) – 2 B) – 1 C) 1 D) 2 E) 3

10. Pozitif tamsayılarda her x ve y için,

$$x \square y = x^y + y$$

biçiminde " □ " işlemi tanımlanıyor.

$$3 \square b = 11$$

olduğuna göre, b kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. Reel sayılar kümesinde tanımlı,

$$x \Delta y = x + y - 5xy$$

işlemine göre, hangi elemanın tersi yoktur?

A) $\frac{5}{2}$ B) 2 C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

12. Reel sayılar kümesi üzerinde her a ve b için,

$$\frac{1}{a} \star \frac{1}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$$

işlemi tanımlanıyor.

Buna göre, a ☆ b değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left(\frac{a+b}{a.b}\right)^2$ B) $\frac{(a+b)^2}{a.b}$ C) $\frac{a^2+b^2}{a.b}$

D) $(a + b)^2$ E) $a.b.(a + b)^2$

13. A = { a, b, c, d, e }

kümesi üzerinde " ☆ " işlemi yandaki tablo ile tanımlanmıştır.

☆	a	b	c	d	e
a	c	d	e	a	b
b	d	e	a	b	c
c	e	a	b	c	d
d	a	b	c	d	e
e	b	c	d	e	a

Buna göre, $(a \star c)^{-1} \star (b^{-1} \star e^{-1})^{-1}$ işlemlerinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir? (x^{-1}, x in " ☆ " işlemine göre tersidir.)

A) e B) d C) c D) b E) a

14. Reel sayılar kümesi üzerinde,

$$\frac{x \square y}{3} = x + y + 2 + \frac{x.y}{3}$$

biçiminde " □ " işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre, " □ " işleminin etkisiz elemanı kaçtır?

A) – 3 B) – 2 C) – 1 D) 1 E) 2

15. A = { 1, 2, 3, 4, 5 }

kümesi üzerinde " ✳ " işlemi yandaki tablo ile tanımlanmıştır.

✳	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5

$$(2 * 4)^{-1} * a = 2$$

olduğuna göre, a kaçtır?
(x^{-1}, x in " ✳ " işlemine göre tersidir.)

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16. Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı " ★ " işlemi,

$$m \star n = m + n - 5.m.n$$

olduğuna göre, $\frac{1}{2}$ nin ★ işlemine göre tersi kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

CEVAP ANAHTARI

1-D	2-E	3-C	4-E	5-C	6-E	7-E	8-D
9-E	10-B	11-D	12-B	13-D	14-B	15-C	16-A

21. BÖLÜM

$x, y \in Z$ ve $m \in Z^+ - \{1\}$ olmak üzere,
$x - y$ farkı m nin tam katı ise,

$\boxed{x \equiv y \pmod{m}}$ dir.

Örnek:

$(x - y)$ farkı, 3 ün katı olan (x, y) ikililerini inceleyelim. Bunlardan bazıları,

$(-9, -9), (-7, -7), (0, 0), (1, 1), (2, 2), \ldots$

$(-10, 2), (-7, 1), (3, 0), (9, 0), (1, 100), (56, 2), \ldots$ dir.

Buradan;

$(6, 0)$ için, $6 \equiv 0 \pmod{3}$,

$(-10, 2)$ için, $-10 \equiv 2 \pmod{3}$,

$(100, 1)$ için, $100 \equiv 1 \pmod{3}$ tür.

Kolayca görüleceği gibi (mod 3) e göre 0 a denk olan (3 e bölümünden kalan 0 olan) pek çok sayı vardır. Bu sayıların oluşturduğu kümeye 0 ın **denklik (kalan) sınıfı** denir ve $\overline{0}$ sembolüyle gösterilir.

$\overline{0} = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$ dur.

Benzer şekilde,

$\overline{1} = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$,

$\overline{2} = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$

biçiminde $\overline{1}$ ve $\overline{2}$ kümeleri yazılabilir.

Z de 3 modülüne göre kalan sınıflarının kümesi,

$Z/3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$,

Z de 5 modülüne göre kalan sınıflarının kümesi,

$Z/5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ tür.

> Buradan, m modülüne göre kalan sınıflarının kümesi de,
> $Z/m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{m-1}\}$ olur.

Örnek:

$$26 \equiv 2 \pmod{m}$$

olduğunagöre, m nin alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm:

$26 \equiv 2 \pmod{m} \Rightarrow 24 \equiv 0 \pmod{m}$

olduğundan, m nin alabileceği değerler 24 ün 1 den büyük pozitif bölenlerinin sayısı kadardır.

O halde, m nin alabileceği değerler;

2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 tür.

Diğer bir ifadeyle, m nin alabileceği değerlerin sayısı, $m > 1$ olduğundan,

$24 = 2^3.3^1 \Rightarrow (3 + 1).(1 + 1) = 4.2 = 8$

olduğundan, $8 - 1 = 7$ tanedir.

Örnek:

$$2 - x \equiv 3 \pmod{7}$$

olduğuna göre, x in alabileceği <u>en büyük</u> negatif tamsayı ile <u>en küçük</u> pozitif tamsayının toplamını bulalım.

Çözüm:

$2 - x \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 2 - 3 \equiv x \pmod{7}$

$\Rightarrow -1 \equiv x \pmod{7}$

$\Rightarrow 6 \equiv x \pmod{7}$ dir.

O halde, x in alabileceği değerler,

$\ldots, -15, -8,$ **-1, 6,** $13, 20, \ldots$ dir.

Buradan, istenilen sonuç; $-1 + 6 = 5$ tir.

Örnek:

Bir askeri birlikte 5 günde bir nöbet tutan bir asker, ilk nöbetini salı günü tuttuğuna göre, 11. nöbetini hangi gün tutacağını bulalım.

Çözüm:

5 günde bir nöbet tutan bir asker ilk nöbetini salı günü tutuğuna göre, 11. nöbeti için 10 nöbet kalmıştır. Asker 11. nöbetini, $5.10 = 50$ gün sonra tutacaktır.

$50 \equiv 1 \pmod{7}$ olduğundan, asker ilk nöbetini salı günü tuttuğu için 11. nöbetini salı dan bir gün sonra yani çarşamba günü tutacaktır.

Kural:

Z / m de x, y, u, v ∈ Z olmak üzere,
$x \equiv y \pmod m$, $u \equiv v \pmod m$ ise
1) $x + u \equiv y + v \pmod m$
2) $x - u \equiv y - v \pmod m$
3) $x.u \equiv y.v \pmod m$
4) $k.x \equiv k.y \pmod m$, $k \in Z$
5) $x^n \equiv y^n \pmod m$, $n \in N$ dir.

Örnek:

$3^3 \equiv x \pmod 5$
$2^6 \equiv y \pmod 5$
$x + y \equiv a \pmod 5$

olduğuna göre, a değerini bulalım.

Çözüm:

Kural gereği,
$3^3 = 27 \equiv 2 \equiv x \pmod 5$ ve,
$2^6 = 64 \equiv 4 \equiv y \pmod 5$ olduğundan,
$x + y = 2 + 4 = 6 \equiv 1 \pmod 5$ olur.
O halde, $a = 1$ dir.

Örnek:

3^{66} sayısının 5 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

3^{66} sayısının 5 ile bölümünden kalan x ise
$3^{66} \equiv x \pmod 5$ tir.
Buna göre,

$3^1 \equiv 3 \pmod 5$
$3^2 \equiv 4 \pmod 5$
$3^3 \equiv 2 \pmod 5$
$3^4 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan,

$3^{66} \equiv (3^4)^{16}.3^2 \pmod 5$
$\equiv (1)^{16}.3^2 \pmod 5$
$\equiv 1.4 \pmod 5$
$\equiv 4 \pmod 5$ tir.

O halde, $x = 4$ tür.

Örnek:

$(99)^{1999}$ sayısının 7 ile bölümünden kalanının kaç olacağını bulalım.

Çözüm:

$99 \equiv 1 \pmod 7$ olduğundan,
$(99)^{1999} \equiv (1)^{1999} \equiv 1 \pmod 7$ dir.

O halde, $(99)^{1999}$ sayısının 7 ile bölümünden kalan 1 dir.

Örnek:

$(248)^{66}$ sayısının 5 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$248 \equiv 3 \pmod 5$ olduğundan,
$(248)^{66} \equiv 3^{66} \pmod 5$
$\equiv 4 \pmod 5$ tir.

$3^4 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan,
$3^{66} \equiv (3^4)^{16} . 3^2 \pmod 5$
$\equiv 1^{16} . 9 \pmod 5$
$\equiv 4 \pmod 5$ tir.

Örnek:

2^{125} sayısının 7 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

2^{125} sayısının 7 ile bölümünden kalan x ise
$2^{125} \equiv x \pmod 7$ dir.

$2^1 \equiv 2 \pmod 7$
$2^2 \equiv 4 \pmod 7$
$2^3 \equiv 1 \pmod 7$

$2^{125} \equiv (2^3)^{41}.2^2 \pmod 7$
$\equiv 1^{41}.4 \pmod 7$
$\equiv 1.4 \pmod 7$
$\equiv 4 \pmod 7$

Örnek:

$(2124)^{2002}$ sayısının birler basamağındaki rakamı bulalım.

Çözüm:

Bir sayının 10 a bölümünden kalan birler basamağındaki rakamı verir. $(2124)^{2002}$ sayısının birler basamağındaki rakam x ise

$(2124)^{2002} \equiv x \pmod{10}$ dur.

$2124 \equiv 4 \pmod{10}$ olduğundan,

$4^{2002} \equiv x \pmod{10}$ dur.

$$4^1 \equiv 4 \pmod{10}$$
$$4^2 \equiv 6 \pmod{10}$$
$$4^3 \equiv 4 \pmod{10}$$
$$4^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

Görüldüğü gibi 4 ün tek kuvvetleri için kalan 4, çift kuvvetleri için kalan 6 olmaktadır.

Buna göre, $4^{2002} \equiv 6 \pmod{10}$ dur.

$(2124)^{2002}$ sayısının birler basamağındaki rakam 6 dır.

Örnek:

$$6^{1453} \equiv x \pmod 9$$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm:

$$6^1 \equiv 6 \pmod 9$$
$$6^2 \equiv 0 \pmod 9$$
$$6^3 \equiv 0 \pmod 9$$
$$6^4 \equiv 0 \pmod 9$$

olduğuna göre, 6 nın 2 ve 2 den büyük bütün tam kuvvetlerinin 9 ile bölümünden kalan 0 dır.

Buna göre, $6^{1453} \equiv 0 \pmod 9$ dur.

O halde, $x = 0$ dır.

Örnek:

$(1999)^{2001}$ sayısının 5 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$1999 \equiv 4 \equiv -1 \pmod 5$ olduğundan,

$(1999)^{2001} \equiv (-1)^{2001} \pmod 5$

$\equiv -1 \pmod 5$

$\equiv 4 \pmod 5$ tir.

O halde, $(1999)^{2001}$ sayısının 5 ile bölümünden kalan 4 tür.

Örnek:

$8^{101}.5^{99}$ sayısının 6 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

8^{101} sayısının 6 ile bölümünden kalan x ve 5^{99} sayısının 6 ile bölümünden kalan y ise $8^{101}.5^{99}$ sayısının 6 ile bölümünden kalan x.y dir. Buna göre,

$8^{101} \equiv 2^{101} \equiv x \pmod 6$ dır.

$$2^1 \equiv 2 \pmod 6$$
$$2^2 \equiv 4 \pmod 6$$
$$2^3 \equiv 2 \pmod 6$$
$$2^4 \equiv 4 \pmod 6$$

2 nin tek kuvvetlerinde kalan 2, çift kuvvetlerinde kalan 4 olduğundan, $8^{101} \equiv 2^{101}$ sayısı da 2 ye denktir.

Yani, $x = 2$ dir.

$5^{99} \equiv y \pmod 6$ olsun.

$$5^1 \equiv 5 \pmod 6$$
$$5^2 \equiv 1 \pmod 6$$

$5^{99} \equiv (5^2)^{49}.5 \pmod 6$

$\equiv 1^{49}.5 \pmod 6$

$\equiv 5 \pmod 6$

olduğundan, $y = 5$ tir.

$x.y \equiv 2.5 \pmod 6$

$\equiv 4 \pmod 6$

olduğundan, $8^{101}.5^{99}$ sayısının 6 ile bölümünden kalan 4 tür.

Kural:

x sayısı, m nin katı olmayan pozitif bir tamsayı ve m asal sayı ise, $x^{m-1} \equiv 1 \pmod m$ dir.

Örnek:

$$2^4 \equiv 1 \pmod 5$$
$$3^4 \equiv 1 \pmod 5$$
$$3^6 \equiv 1 \pmod 7$$
$$5^6 \equiv 1 \pmod 7$$
$$7^{10} \equiv 1 \pmod{11}$$
$$5^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

Görüldüğü gibi bu kural ciddi bir kolaylık sağlamaktadır. Örneğin, kural gereği olarak ifade ettiğimiz $7^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ sonucunu görebilmek için artık 10 satır işlem yapmamız gerekmeyecek.

Örnek:

k pozitif tamsayı olmak üzere,

$$5^{6k+2} \equiv x \pmod 7$$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm:

Kural gereği,

$5^6 \equiv 1 \pmod 7$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} 5^{6k+2} &\equiv (5^6)^k.5^2 \pmod 7 \\ &\equiv 1^k.25 \pmod 7 \\ &\equiv 4 \pmod 7 \text{ dir.} \end{aligned}$$

O halde, $x = 4$ bulunur.

Örnek:

$(2513)^{1993}$ sayısının 11 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$2513 \equiv 5 \pmod{11}$ ve kural gereği

$5^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (2513)^{1993} &\equiv 5^{199.10+3} && \pmod{11} \\ &\equiv (5^{10})^{199}.5^3 && \pmod{11} \\ &\equiv 1^{199}.125 && \pmod{11} \\ &\equiv 4 && \pmod{11} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek:

$$3x + 1 \equiv 4 \pmod{12}$$

olduğuna göre, x in alabileceği en küçük <u>pozitif iki tamsayının</u> toplamının kaç olabileceğini bulalım.

Çözüm:

$3x + 1 \equiv 4 \pmod{12} \Leftrightarrow \dfrac{3x+1-4}{12} \in Z$ dir.

Buradan, $\dfrac{3(x-1)}{12} = \dfrac{x-1}{4} \in Z$ dir.

$\dfrac{x-1}{4} \in Z \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod 4$ tür.

O halde, x in alabileceği en küçük pozitif iki tamsayı 1 ve $1 + 4 = 5$ tir.

Buna göre, bu sayıların toplamı, $1 + 5 = 6$ olur.

Örnek:

Z/5 te, $\overline{2}.x^2 + \overline{3} = \overline{1}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\overline{2}.x^2 + \overline{3} = \overline{1}$ denklemini kalan sınıfları biçiminde değil de, ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem biçiminde düşünerek çözelim.

$1 \equiv 11$ (Z/5) olduğundan,

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3 &= 11 \\ 2x^2 &= 9 \\ x^2 &= 4 \\ x = 2 \text{ veya } x &= -2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

O halde, Z/5 te,

$x = 2 \Rightarrow Ç_1 = \{\overline{2}\}$

$x = -2 \Rightarrow Ç_2 = \{\overline{3}\}$ olur. Buradan,

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 \Rightarrow Ç = \{\overline{2}, \overline{3}\}$ tür.

Örnek:

Z/6 da

$$\begin{aligned} x + y &\equiv \overline{1} \\ \overline{3}x + \overline{2}y &\equiv \overline{5} \end{aligned}$$

olduğuna göre, y değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{rl} 3\,/ & x + y \equiv \overline{1} \\ & \overline{3}x + \overline{2}y \equiv \overline{5} \\ \hline & \overline{3}.x + \overline{3}.y \equiv \overline{3} \\ - & \overline{3}.x + \overline{2}.y \equiv \overline{5} \\ \hline & \overline{0}.x + y \equiv -2 \equiv \overline{4} \end{array}$$

olduğundan, $y \equiv \overline{4}$ olur.

ÇÖZÜMLÜ TEST

1. $3 - x \equiv 4 \pmod 5$

denkliğini sağlayan en küçük iki pozitif tamsayının toplamı kaçtır?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

2. $3x - 1 \equiv 2 \pmod 9$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3. $m > 1$ olmak üzere,

$75 \equiv 3 \pmod m$

olduğuna göre, m nin alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

4. n pozitif tamsayı olmak üzere,

$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} \equiv a \pmod 7$

olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 5 E) 6

5. $x^2 \equiv 2 \pmod 7$

olduğuna göre, x in alabileceği en küçük iki pozitif tamsayı değerinin toplamı kaçtır?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

6. $(30)^{2000} \equiv x \pmod{27}$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 9 E) 26

7. $(1999)^{1999} \equiv x \pmod 5$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8. $(199)^{200} \equiv n \pmod 9$

olduğuna göre, n aşağıdakilerden hangisidir?

A) 8 B) 7 C) 4 D) 2 E) 1

9. $(994)^{2001} \equiv a \pmod 6$

olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10. $(468)^{975} \equiv x \pmod{10}$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

11. n pozitif tamsayıdır.

$$6^{10.n+6} \equiv m \pmod{11}$$

olduğuna göre, m aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

12. $$(998)^{2000} \equiv x \pmod{6}$$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. $$7^8 + 5^7 + 7^6 + 5^5 + 7^4$$

toplamının 6 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

14. $$(1998)^{1999} \equiv x \pmod{5}$$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

15. $$(2007)^{1998}$$

sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

16. $$(1998)^{-2001} \equiv x \pmod{5}$$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17. Dört günde bir nöbet tutan bir doktor 11. nöbetini pazartesi günü tuttuğuna göre, 25. nöbetini hangi gün tutar?

A) Pazartesi B) Salı C) Çarşamba D) Perşembe E) Cuma

18. $$(201)^{99} \equiv n \pmod{7}$$

olduğuna göre, n aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

19. Z / 7 de,

$$x^2 + \overline{3} \equiv \overline{0}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{\overline{1}, \overline{6}\}$ B) $\{\overline{2}, \overline{5}\}$ C) $\{\overline{3}, \overline{4}\}$ D) $\{\overline{1}, \overline{5}\}$ E) $\{\overline{2}, \overline{4}\}$

20. Z / 5 te,

$$x + y \equiv \overline{1}$$
$$\overline{3}x + \overline{2}y \equiv \overline{4}$$

denklem sistemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\overline{0}$ B) $\overline{1}$ C) $\overline{2}$ D) $\overline{3}$ E) $\overline{4}$

TESTİN ÇÖZÜMLERİ

1. $3 - x \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow 3 - 4 \equiv x \pmod 5$

$$-1 \equiv x \pmod 5$$
$$4 \equiv x \pmod 5$$

O halde, x in alabileceği değerler,
..., – 6, – 1, 4, 9, 14, 19, ... dur.
x in en küçük iki pozitif tamsayı değerinin toplamı, $4 + 9 = 13$ tür.

Cevap: A

2. $3x - 1 \equiv 2 \pmod 9 \Rightarrow 3x \equiv 3 \pmod 9$

$$x \equiv 1 \pmod 3$$

olduğundan x in alabileceği değerler,
..., – 8, – 5, – 2, 1, 4, 7, 10, 13, ... tür.

O halde, $x = 4$ olabilir.

Cevap: C

3. $75 \equiv 3 \pmod m \Rightarrow 75 - 3 \equiv 0 \pmod m$

$$72 \equiv 0 \pmod m$$

olduğundan m nin alabileceği değerler 72 nin 1 den büyük pozitif bölenlerinin sayısı kadardır.

O halde, $72 = 2^3.3^2$ olduğundan 72 nin pozitif bölenlerinin sayısı : $(3 + 1).(2 + 1) = 4.3 = 12$ dir. m nin alabileceği değerlerin sayısı $12 - 1 = 11$ dir.

Cevap: B

4. $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} \equiv a \pmod 7$

$$2^n(1 + 2 + 2^2) \equiv a \pmod 7$$
$$2^n.7 \equiv a \pmod 7$$
$$0 \equiv a \pmod 7 \text{ dir.}$$

O halde, $a = 0$ olabilir.

Cevap: A

5. $x^2 \equiv 2 \pmod 7$ denkliğini sağlayan x değerleri varsa bu değerlerden en az biri mutlaka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayılarından biridir. Eğer bu değerlerin hiçbiri sağlamıyorsa bu denkliğin çözüm kümesi boş kümedir.

$x = 0$ için $0^2 \equiv 2 \pmod 7$ yanlış
$x = 1$ için $1^2 \equiv 2 \pmod 7$ yanlış
$x = 2$ için $2^2 \equiv 2 \pmod 7$ yanlış
$x = 3$ için $3^2 \equiv 2 \pmod 7$ **doğru**
$x = 4$ için $4^2 \equiv 2 \pmod 7$ **doğru**
$x = 5$ için $5^2 \equiv 2 \pmod 7$ yanlış
$x = 6$ için $6^2 \equiv 2 \pmod 7$ yanlış

O halde, x in alabileceği en küçük iki pozitif tamsayı değerinin toplamı : $3 + 4 = 7$ dir.

Cevap: E

6. $30 \equiv 3 \pmod{27}$ olduğundan,

$$(30)^{2000} \equiv x \pmod{27} \Rightarrow 3^{2000} \equiv x \pmod{27}$$
$$3^3.3^{1997} \equiv x \pmod{27}$$
$$0 \equiv x \pmod{27}$$

olduğundan $x = 0$ olabilir.

Cevap: A

7. $1999 \equiv 4 \equiv -1 \pmod 5$ olduğundan,

$$(1999)^{1999} \equiv x \pmod 5$$
$$(-1)^{1999} \equiv x \pmod 5$$
$$-1 \equiv x \pmod 5$$
$$4 \equiv x \pmod 5 \text{ tir.}$$

O halde, $x = 4$ olabilir.

Cevap: E

8. $199 \equiv 1 \pmod 9$ olduğundan,

$(199)^{200} \equiv n \pmod 9 \Rightarrow 1^{200} \equiv n \pmod 9$

$1 \equiv n \pmod 9$ dur.

O halde, $n = 1$ olabilir.

Cevap: E

9. $994 \equiv 4 \pmod 6$ olduğundan,

$(994)^{2001} \equiv a \pmod 6 \Rightarrow 4^{2001} \equiv a \pmod 6$ dır.

$4^1 \equiv 4 \pmod 6$

$4^2 \equiv 4 \pmod 6$

$4^3 \equiv 4 \pmod 6$ olduğundan, 4 ün tüm pozitif tamsayı kuvveti 4 e denk olduğu görülür.

O halde, $4^{2001} \equiv a \pmod 6$

$4 \equiv a \pmod 6$ dır.

Buradan $a = 4$ olabilir.

Cevap: D

10. $468 \equiv 8 \pmod{10}$ olduğundan,

$(468)^{975} \equiv x \pmod{10} \Rightarrow 8^{975} \equiv x \pmod{10}$ dur.

$8^1 \equiv 8 \pmod{10}$
$8^2 \equiv 4 \pmod{10}$
$8^3 \equiv 2 \pmod{10}$
$8^4 \equiv 6 \pmod{10}$

$8^5 \equiv 8 \pmod{10}$
$8^6 \equiv 4 \pmod{10}$
$8^7 \equiv 2 \pmod{10}$
$8^8 \equiv 6 \pmod{10}$

$\vdots$

975 sayısının 4 e bülümünde bölüm 243, kalan 3 olduğundan,

$8^{975} \equiv 8^{4.243+3} \pmod{10}$

$\equiv 8^3 \pmod{10}$

$\equiv 2 \pmod{10}$ dur.

O halde, $x = 2$ olabilir.

Cevap: B

11. 6 ile 11 aralarında asal ve 11 asal sayı olduğundan, $6^{11-1} \equiv 1 \pmod{11}$ dir.

O halde, $6^{10.n+6} \equiv m \pmod{11}$

$(6^{10})^n.6^6 \equiv m \pmod{11}$

$1^n.6^6 \equiv m \pmod{11}$

$6^6 \equiv m \pmod{11}$ dir.

$6^1 \equiv 6 \pmod{11}$

$6^2 \equiv 3 \pmod{11}$

$6^3 \equiv 7 \pmod{11}$

$(6^3)^2 \equiv 7^2 \pmod{11}$

$6^6 \equiv 5 \pmod{11}$ dir.

O halde, $m = 5$ olabilir.

Cevap: C

12. $998 \equiv 2 \pmod 6$ olduğundan,

$(998)^{2000} \equiv x \pmod 6 \Rightarrow 2^{2000} \equiv x \pmod 6$ dır.

$2^1 \equiv 2 \pmod 6$
$2^2 \equiv 4 \pmod 6$
$2^3 \equiv 2 \pmod 6$
$2^4 \equiv 4 \pmod 6$

görüldüğü gibi 2 nin tek kuvvetleri 2 ye, çift kuvvetleri 4 e denk olduğundan,

$2^{2000} \equiv x \pmod 6 \Rightarrow 4 \equiv x \pmod 6$ dır.

O halde, $x = 4$ olabilir.

Cevap: D

13. $7 \equiv 1 \pmod 6$ ve $5 \equiv -1 \pmod 6$ dır.
$7^8 \equiv 1 \pmod 6$, $7^6 \equiv 1 \pmod 6$, $7^4 \equiv 1 \pmod 6$
$5^7 \equiv -1 \pmod 6$, $5^5 \equiv -1 \pmod 6$ dır.

$7^8 + 5^7 + 7^6 + 5^5 + 7^4$ toplamının 6 ile bölümünden kalan x ise

$7^8 + 5^7 + 7^6 + 5^5 + 7^4 \equiv x \pmod 6$

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \equiv x \pmod 6$

$1 \equiv x \pmod 6$ dır.

O halde, $7^8 + 5^7 + 7^6 + 5^5 + 7^4$ toplamının 6 ile bölümünden kalan 1 dir.

Cevap: D

14. $1998 \equiv 3 \pmod 5$ olduğundan,

$(1998)^{1999} \equiv x \pmod 5 \Rightarrow 3^{1999} \equiv x \pmod 5$ tir.

Kural gereği, $3^4 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 3^{1999} &\equiv (3^4)^{499}.3^3 \pmod 5 \\ &\equiv 1^{499}.2 \pmod 5 \\ &\equiv 2 \pmod 5 \text{ dir.} \end{aligned}$$

O halde, $x = 2$ olabilir.

Cevap: C

15. $(2007)^{1998}$ sayısının birler basamağındaki rakam x ise $(2007)^{1998} \equiv x \pmod{10}$ dur.

$2007 \equiv 7 \pmod{10}$ olduğundan,

$7^{1998} \equiv x \pmod{10}$ dur.

$$\begin{aligned} 7^1 &\equiv 7 \pmod{10} \\ 7^2 &\equiv 9 \pmod{10} \\ 7^3 &\equiv 3 \pmod{10} \\ 7^4 &\equiv 1 \pmod{10} \text{ dur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7^{1998} &\equiv (7^4)^{499}.7^2 \pmod{10} \\ &\equiv 1^{499}.9 \pmod{10} \\ &\equiv 9 \pmod{10} \text{ dur.} \end{aligned}$$

O halde, $x = 9$ dur.

Cevap: E

16. $1998 \equiv 3 \pmod 5$ olduğundan,

$(1998)^{-2001} \equiv x \pmod 5 \Rightarrow 3^{-2001} \equiv x \pmod 5$ tir.

Kural gereği, $3^4 \equiv 1 \pmod 5$ tir.

$$\begin{aligned} 3^4 \equiv 1 \pmod 5 &\Rightarrow (3^4)^{501} \equiv 1^{501} \pmod 5 \\ &\Rightarrow 3^{2004} \equiv 1 \pmod 5 \text{ tir.} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} & 3^{2004} \equiv 1 \pmod 5 \\ \times & 3^{-2001} \equiv x \pmod 5 \\ \hline & 3^{2004-2001} \equiv 1.x \pmod 5 \\ & 3^3 \equiv x \pmod 5 \\ & 2 \equiv x \pmod 5 \end{array}$$

olduğundan, $x = 2$ olabilir.

Cevap: C

17. Dört günde bir nöbet tutan doktorun, 25. nöbetini tuttuğu günü bulabilmemiz için 12. nöbeti ve 25. nöbeti dahil toplam 14 nöbetlik gün geçmesi gerekir. Yani 25. nöbetini $4.14 = 56$ gün sonra tutar. $56 \equiv 0 \pmod 7$ olduğundan, 25. nöbetini yine pazartesi günü tutacaktır.

Cevap: A

18. $201 \equiv 5 \pmod 7$ olduğundan,

$(201)^{99} \equiv n \pmod 7 \Rightarrow 5^{99} \equiv n \pmod 7$ dir.

Kural gereği, $5^6 \equiv 1 \pmod 7$ dir.

$$\begin{aligned} 5^{99} &\equiv (5^6)^{16}.5^3 \pmod 7 \\ &\equiv 1^{16}.125 \pmod 7 \\ &\equiv 1.6 \pmod 7 \\ &\equiv 6 \pmod 7 \end{aligned}$$

olduğundan, $n = 6$ olabilir.

Cevap: E

19. $Z/7$ de

$$\begin{aligned} x^2 + \overline{3} &\equiv \overline{0} \\ x^2 + \overline{3} + \overline{4} &\equiv \overline{0} + \overline{4} \\ x^2 + \overline{7} &\equiv \overline{4} \\ x^2 &\equiv \overline{4} \end{aligned}$$

olduğundan, $x \equiv 2 \pmod 7$ veya

$x \equiv -2 \equiv 5 \pmod 7$ dir.

O halde, $Z/7$ de denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \{\overline{2}, \overline{5}\}$ tir.

Cevap: B

20.

$$\begin{array}{rl} \overline{3}/ & x + y \equiv \overline{1} \\ & \overline{3}x + \overline{2}y \equiv \overline{4} \\ \hline & \overline{3}x + \overline{3}y \equiv \overline{3} \\ + & \overline{3}x + \overline{2}y \equiv \overline{4} \\ \hline & x + \overline{0}.y \equiv \overline{2} \\ & x \equiv \overline{2} \text{ dir.} \end{array}$$

Cevap: C

CEVAPLI TEST

1. $2x + 5 \equiv 3 \pmod 8$

olduğuna göre, x in alabileceği <u>en küçük</u> iki pozitif tamsayının toplamı kaçtır?

A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

2. $2^4 - 8^5 + 2^6 - (13)^7 \equiv a \pmod 5$

olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3. $(98)^{-25} \equiv x \pmod 5$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4. a > 1 olmak üzere,

$a^2 - 1 \equiv 35 \pmod a$

olduğuna göre, a nın alabileceği kaç farklı değer vardır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

5. $(97)^{201} \equiv x \pmod 7$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

6. $(15)^x \equiv 3 \pmod{11}$

olduğuna göre, x in alabileceği <u>en küçük</u> pozitif tamsayı değeri kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

7. $(2000)^{2000} \equiv x \pmod 7$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 2 E) 1

8. $(2002)^{1999} \equiv x \pmod 5$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

9. $(986)^{19}$

sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10. $5^7 + 8^8 + 5^9 + 8^{10}$

toplamının 13 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 5 D) 8 E) 12

11. $1^7 + 2^7 + 3^7 + ... + n^7 + ... + (11)^7$

toplamının birler basamağındaki rakamın sayısal değeri kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

12. $7^1 + 7^3 + ... + 7^{2n-1} + ... + 7^{49}$

işleminin sonucunda elde edilen sayının birler basamağındaki rakamın sayısal değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 7 E) 8

13. $(1998)^{1999} \equiv x \pmod 6$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

14. $(202)^{201} \equiv a \pmod{10}$

olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

15. Erol 12 günde bir, Varol ise 10 günde bir nöbet tutmaktadır.

İkisi birlikte ilk nöbetlerini pazar günü tuttuklarına göre, ikisinin de pazar günü tutacakları bundan sonraki ilk nöbet Erol'un kaçıncı nöbetidir?

A) 33 B) 34 C) 35 D) 36 E) 37

16. $(0! + 2! + 4! + 6! + 8!)^{60!} \equiv x \pmod 5$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17. $2^{1999} \equiv m \pmod{64}$

olduğuna göre, m aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 0 B) 1 C) 7 D) 15 E) 63

18. $x^2 + x + 8 \equiv 0 \pmod 5$

denkliğini sağlayan x in <u>en büyük iki negatif tamsayı</u> değerinin toplamı kaçtır?

A) – 5 B) – 6 C) – 7 D) – 8 E) – 9

19. Z / 5 te,

$$\bar{2}.x^2 + \bar{3}.x + \bar{1} = \bar{0}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{\bar{0}, \bar{1}\}$ B) $\{\bar{1}, \bar{2}\}$ C) $\{\bar{2}, \bar{3}\}$ D) $\{\bar{1}, \bar{4}\}$ E) $\{\bar{2}, \bar{4}\}$

20. $(1998)^{(1999^{2000})} \equiv n \pmod 5$

olduğuna göre, n aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

CEVAP ANAHTARI

1-E	2-A	3-C	4-B	5-E	6-D	7-C	8-D	9-E	10-A
11-D	12-D	13-A	14-B	15-D	16-B	17-A	18-B	19-E	20-D

22. BÖLÜM POLİNOMLAR

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ ve $n \in N$ olmak üzere,

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$

şeklindeki ifadelere **x e göre düzenlenmiş reel katsayılı polinom** (çok terimli) denir.

Burada $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayılarına **polinomun katsayıları,**

$a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, \dots, a_1x, a_0$ ifadelerine **polinomun terimleri** denir.

$a_{n-1}x^{n-1}$ terimindeki a_{n-1}, sayısına **terimin katsayısı**, x in kuvveti olan $n-1$ sayısına **terimin derecesi** denir.

Derecesi en büyük olan terimin derecesine **polinomunun derecesi** denir ve **der[P(x)]** ile gösterilir. Derecesi en büyük olan terimin katsayısına **polinomun başkatsayısı**, a_0 reel sayısına P(x) **polinomunun sabit terimi** denir.

Örnek:

$P(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8x - 10$ polinomunun katsayıları $5, -7, 8, -10$ ve terimleri $5x^3, -7x^2, 8x, -10$ dur.

P(x) polinomunun; başkatsayısı 5, derecesi 3 ve sabit terimi -10 dur.

Örnek:

$$P(x) = x^{10} - 7x^2 - \sqrt{2}\,x - \sqrt{3}$$

$$R(x) = x^2 - 3x - 1$$

polinomlarını inceleyelim.

Çözüm:

P(x) polinomu 10. dereceden reel katsayılı bir polinomdur.

R(x) polinomu 2. dereceden tam katsayılı bir polinomdur.

Örnek:

$$P(x) = \sqrt{12}\,x^3 - 4x^2 + \frac{3}{x} - 1$$

$$Q(x) = 10x^4 - x^2 - \sqrt{x} + 100$$

ifadelerini inceleyelim.

Çözüm:

$P(x) = \sqrt{12}\,x^3 - 4x^2 + \frac{3}{x} - 1$ ifadesi bir polinom değildir. Çünkü, P(x) ifadesindeki $\frac{3}{x} = 3x^{-1}$ teriminin kuvveti $-1 \notin N$ dir.

$Q(x) = 10x^4 - x^2 - \sqrt{x} + 100$ ifadesi bir polinom değildir. Çünkü, Q(x) ifadesindeki $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ teriminin kuvveti $\frac{1}{2} \notin N$ dir.

Örnek:

$$P(x, y) = 3x^2y^4 + 2x^3y^2 - \sqrt{3}\,x^4y^5 - \frac{1}{2}$$

polinomu x ve y değişkenlerine göre düzenlenmiş reel katsayılı bir polinomdur. P(x, y) polinomunda $-\sqrt{3}\,x^4y^5$ teriminin, x e göre derecesi 4, y ye göre derecesi 5, x ve y ye göre derecesi $4 + 5 = 9$ dur. x ve y ye göre başkatsayısı $-\sqrt{3}$ tür.

Yani $der(P(x, y)) = 9$ dur.

Not:

*Bir polinomda; değişkenlerin yerine 1 yazıldığında bu polinomun **katsayılar toplamı**, değişkenlerin yerine 0 (sıfır) yazıldığında ise bu polinomun **sabit terimi** bulunur.*

Örneğin, $P(x + 2)$ nin katsayılar toplamı $x = 1$ için $P(1 + 2) = P(3)$ ve sabit terimi $x = 0$ için $P(0 + 2) = P(2)$ dir.
$Q(x^2 + 2x - 3)$ polinomunun katsayılar toplamı $Q(0)$, sabit terimi $Q(-3)$ tür.

Örnek:

$$P(x) = ax^3 - 7x^2 - 4x + 5 - b$$

polinomunun sabit terimi 3 ve katsayılar toplamı -2 olduğuna göre, $a + b$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$P(x)$ polinomunun sabit terimi 3 ($P(0) = 3$) ise $5 - b = 3$ tür. O halde, $b = 2$ dir.
$P(x)$ polinomunun katsayılarının toplamı -2 ($P(1) = -2$) ise $a - 7 - 4 + 3 = -2$ dir. O halde, $a = 6$ dır.
Buradan, $a + b = 6 + 2 = 8$ bulunur.

Örnek:

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 10$$

polinomu için,

$P(1) = 2.1^3 - 4.1^2 + 3.1 - 10 = 2 - 4 + 3 - 10 = -9$ dur.

$P(-1) = 2(-1)^3 - 4(-1)^2 + 3(-1) - 10 = -2 - 4 - 3 - 10$
$= -19$ dur.

$P(0) = -10$ dur.

$P(2x) = 2(2x)^3 - 4(2x)^2 + 3(2x) - 10$
$= 16x^3 - 8x^2 + 6x - 10$ dur.

$P(x^2) = 2(x^2)^3 - 4(x^2)^2 + 3(x^2) - 10$
$= 2x^6 - 4x^4 + 3x^2 - 10$ dur.

Not:

1) P(x) in çift kuvvetli terimlerinin katsayılarının toplamı: $\dfrac{P(1) + P(-1)}{2}$ *dir.*

2) P(x) in tek kuvvetli terimlerinin katsayılarının toplamı: $\dfrac{P(1) - P(-1)}{2}$ *dir.*

Örnek:

$P(x) = (x^2 + x - 1)^2 - 3x + 2$ polinomunun,

a) Katsayılar toplamını,
b) Sabit terimini,
c) Çift kuvvetli terimlerinin toplamını,
d) Tek kuvvetli terimlerinin toplamını bulalım.

Çözüm:

$P(1) = (1^2 + 1 - 1)^2 - 3.1 + 2 = 0,$
$P(0) = (0^2 + 0 - 1)^2 - 3.0 + 2 = 3,$
$P(-1) = ((-1)^2 - 1 - 1)^2 - 3.(-1) + 2 = 6$
olduğu için, polinomun

a) Katsayılar toplamı: $P(1) = 0$,

b) Sabit terimi: $P(0) = 3$,

c) Çift kuvvetli terimlerinin katsayılar toplamı:

$$\frac{P(1) + P(-1)}{2} = \frac{0 + 6}{2} = 3,$$

d) Tek kuvvetli terimlerinin katsayılar toplamı:

$$\frac{P(1) - P(-1)}{2} = \frac{0 - 6}{2} = -3$$

bulunur.

Not:

1) $P(x) = c,\ c \in R$ *ve* $c \neq 0$
şeklindeki polinomlara ***sabit polinom*** *denir ve sabit polinomun derecesi 0 (sıfır) dır.*

2) $P(x) = 0$
polinomuna ***sıfır polinomu*** *denir ve sıfır polinomunun derecesi bilinemez.*

Örnek:

$$P(x) = (3 - m)x^3 + 4nx + m + 1$$

sabit polinom olduğuna göre, $P(100)$ değerini bulalım.

Çözüm:
$P(x) = (3 - m)x^3 + 4nx + m + 1$
polinomu sabit polinom olduğu için, $3 - m = 0$ ve $4n = 0$ dır. Buradan, $m = 3$ ve $n = 0$ dır.
O halde, $P(x) = 4$ tür ve $P(100) = 4$ tür.

Örnek:

$$R(x) = 2x^2 - ax^2 + bx + c - 5$$

polinomu sıfır polinomu olduğuna göre, $a + b + c$ değerini bulalım.

Çözüm:
$R(x) = (2 - a)x^2 + bx + c - 5$
polinomu sıfır polinomu olduğundan,
$2 - a = 0$,
$b = 0$, $c - 5 = 0$ dır.
Buradan,
$a = 2$, $b = 0$ ve $c = 5$ bulunur.
Buna göre,
$a + b + c = 2 + 0 + 5 = 7$ dir.

A. POLİNOMLARIN EŞİTLİĞİ

P(x) ve Q(x) aynı dereceden iki polinom olmak üzere, P(x) ve Q(x) in eşit dereceli terimlerinin katsayıları aynı ise bu iki polinom birbirine eşittir.

Örnek:

$$P(x) = 4x^3 - 7x^2 + (2 - n)x + 1 - m$$
$$Q(x) = 4x^3 - k.x^2 + 3x + 10$$

polinomları veriliyor.

$P(x) = Q(x)$ olduğuna göre, $k + m + n$ toplamını bulalım.

Çözüm:
$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow (4 = 4, -7 = -k, 2 - n = 3, 1 - m = 10)$ dur.
$-7 = -k \Rightarrow k = 7$,
$2 - n = 3 \Rightarrow n = -1$ ve
$1 - m = 10 \Rightarrow m = -9$ dur.
Buradan,
$k + m + n = 7 + (-9) + (-1) = -3$ tür.

B. POLİNOMLARDA İŞLEMLER

1) Toplama – Çıkarma

İki polinom toplanırken, dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları toplanır ve toplam polinomu elde edilir.
İki polinom çıkarılırken, dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları çıkarılır ve fark polinomu elde edilir.

Örnek:

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x - 3$$
$$Q(x) = 3x^3 + 10x^2 - 7$$

polinomları için $P(x) + Q(x)$ toplamını ve $P(x) - Q(x)$ farkını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{rl} & P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x - 3 \\ + & Q(x) = 3x^3 + 10x^2 - 7 \\ \hline \end{array}$$

$P(x) + Q(x) = (2 + 3)x^3 + (-4 + 10)x^2 + (-8 + 0)x + (-3 - 7)$
$P(x) + Q(x) = 5x^3 + 6x^2 - 8x - 10$ bulunur.

Benzer şekilde,
$P(x) - Q(x) = (2 - 3)x^3 + (-4 - 10)x^2 + (-8 - 0)x - 3 - (-7)$
$P(x) - Q(x) = -x^3 - 14x^2 - 8x + 4$ bulunur.

2) Çarpma

İki polinomun çarpımı, polinomlardan birinin her teriminin diğer polinomun herbir terimi ile ayrı ayrı çarpımlarından elde edilen terimlerin toplamına eşittir.

Örnek:

$$P(x) = x + 2$$
$$Q(x) = x^2 + x - 3$$

olduğuna göre, $P(x).Q(x)$ ve $x^2.P(x) + Q(x)$ polinomlarını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} P(x).Q(x) &= (x + 2)(x^2 + x - 3) \\ &= x.x^2 + x.x - 3.x + 2.x^2 + 2.x + 2.(-3) \\ &= x^3 + x^2 - 3x + 2x^2 + 2x - 6 \\ &= x^3 + 3x^2 - x - 6 \text{ dır.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2.P(x) + Q(x) &= x^2(x + 2) + (x^2 + x - 3) \\ &= x^3 + 2x^2 + x^2 + x - 3 \\ &= x^3 + 3x^2 + x - 3 \text{ tür.} \end{aligned}$$

3) Bölme

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} \vdots & B(x) \\ \hline K(x) & \end{array}$$

P(x) : Bölünen
Q(x) : Bölen
B(x) : Bölüm
K(x) : Kalan

Yukarıdaki bölme işleminde,

1) $der(P(x)) \geq der(Q(x))$
2) $der(K(x)) < der(Q(x))$
3) $P(x) = Q(x).B(x) + K(x)$
4) $der(K(x)) < der(B(x))$ ise Q(x) ile B(x) yer değiştirebilir.
5) K(x) = 0 ise P(x) polinomu, Q(x) polinomuna tam bölünür.

Polinomlarda bölme işlemi, sayılarda bölme işlemine benzer. Bunun için sırasıyla şu işlemler yapılır:

1) Bölünen ve bölen polinomlar, x değişkeninin azalan kuvvetlerine göre sıralanır.
2) Bölünen polinomun soldan ilk terimi, bölen polinomun soldan ilk terimine bölünür. Çıkan sonuç bölümün ilk terimi olarak yazılır.
3) Bulunan bu bölüm, bölen polinomun bütün terimleriyle çarpılarak, aynı dereceli terimler alt alta gelecek şekilde, bölünen polinomun altına yazılır.
4) Bölünenin altına yazılan çarpım polinomu, bölünen polinomdan çıkarılır.
5) Yukarıdaki işlemlere, kalan polinomun derecesi, bölen polinomun derecesinden küçük oluncaya kadar devam edilir.

Örnek:

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ polinomunun $Q(x) = x + 3$ polinomuna bölünmesiyle elde edilen bölümü ve kalanı bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 - 2x^2 + 3x - 1 & x + 3 \\ \cline{3-3} - & x^3 + 3x^2 & x^2 - 5x + 18 \\ \cline{1-2} & -5x^2 + 3x - 1 & \\ - & -5x^2 - 15x & \\ \cline{1-2} & 18x - 1 & \\ - & 18x + 54 & \\ \cline{1-2} & -55 & \end{array}$$

Görüldüğü gibi,
Bölüm: $B(x) = x^2 - 5x + 18$
Kalan: $K = -55$
bulundu.

4) Horner Metodu İle Bölme

Horner metodu, bir P(x) polinomunun ax + b gibi birinci dereceden bir polinoma bölünmesindeki bölüm ve kalanı bulmada kolaylık sağlar.

Örnek:

$R(x) = x^3 + 2x^2 - 5$ polinomunun x – 2 ye bölünmesiyle oluşan bölümü ve kalanı Horner metoduyla bulalım.

Çözüm:

Bölünen: $R(x) = 1.x^3 + 2.x^2 + 0.x - 5$

$$\begin{array}{c|cccc} x - 2 = 0 & x^3 & x^2 & x & \text{sabit} \\ x = 2 & 1 & 2 & 0 & -5 \\ \hline & \downarrow & + 2.1 & 2.4 & \boxed{2.8} \\ \cline{2-5} & 1 & 4 & 8 & \boxed{11: \text{Kalan}} \end{array}$$

Bölüm: $B(x) = 1.x^2 + 4x + 8$ dir.
Kalan: 11 dir.

Yukarıda, bölüm ve kalanı bulmak için sırasıyla şu işlemler yapılmıştır.

1) R(x), x in azalan kuvvetlerine göre sıralandı. (x li terimin katsayısının sıfır olduğuna dikkat ediniz.)
2) R(x) in terimlerinin katsayıları ve bölen polinomun kökü tabloda yerlerine yazıldı. (Tablonun üst tarafına R(x) in katsayıları, en sola da bölenin kökü (x = 2) yazıldı.)
3) x^3 lü terimin katsayısı direk aşağıya alındı ve bölümün kökü olan 2 ile çarpılarak x^2 li terimin katsayısının altına yazılarak toplandı ve 4 bulundu.
4) Bulunan bu 4 ile bölenin kökü olan 2 çarpıldı ve x li terimin altına yazılarak toplandı ve 8 bulundu.
5) Bulunan bu 8 ile bölenin kökü olan 2 çarpıldı ve sabit terimin altına yazılarak toplandı ve 11 (kalan) bulundu.
6) Tablonun en altında bulunan 1, 4, 8 sayıları bölüm (B(x)) polinomunun katsayılarını verir.
$B(x) = x^2 + 4x + 8$ bulunur.

C. P(x) POLİNOMUNUN ax + b İLE BÖLÜNMESİNDEN ELDE EDİLEN KALAN

P(x) polinomunun ax + b ile bölümünden kalan

$P(-\frac{b}{a})$ dır.

Bu ifadenin doğruluğunu gösterelim.

P(x) in ax + b ile bölünmesindeki bölüm B(x), kalan K olsun.

Buna göre, $P(x) = (ax + b).B(x) + K$ dır.

Bu eşitlikte $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ yazılırsa,

$$P(-\frac{b}{a}) = \left(a.(-\frac{b}{a}) + b\right).B(-\frac{b}{a}) + K$$

$P(-\frac{b}{a}) = K$ dır.

Bölen birinci dereceden polinom olduğu için kalan sabit bir sayıdır.

Örnek:

$$P(x) = x^4 - x^2 - 3x + 2$$

polinomunun x – 2 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir. Buna göre,

Kalan:

$K = P(2)$

$= 2^4 - 2^2 - 3.2 + 2$

$= 16 - 4 - 6 + 2$

$= 8$ bulunur.

Örnek:

$$P(x) = x^3 - mx^2 + 2x + 2m - 1$$

polinomunun 2x – 2 ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre, x + 3 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

P(x) in 2x – 2 ile bölümünden kalan 4 ise $2x - 2 = 0$ dan $x = 1$ olur ve $P(1) = 4$ tür.

Buna göre, $P(1) = 1^3 - m.1^2 + 2.1 + 2m - 1$

$4 = 1 - m + 2 + 2m - 1$

$4 = m + 2 \Rightarrow m = 2$ dir.

O halde, $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 3$ tür.

Buna göre, P(x) in x + 3 ile bölümünden kalan

$K = P(-3) = (-3)^3 - 2.(-3)^2 + 2.(-3) + 3$

$= -27 - 18 - 6 + 3 = -48$ dir.

Örnek:

P(x) ve R(x) polinomunun x + 4 ile bölümünden kalanlar sırasıyla – 2 ve 3 tür.

Buna göre, $(x + 1).P(x) + 3.R(x)$ polinomunun x + 4 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

P(x) ve R(x) in x + 4 ile bölümünden kalanlar sırasıyla – 2 ve 3 olduğundan $P(-4) = -2$ ve $R(-4) = 3$ tür.

Buna göre, $(x + 1).P(x) + 3.R(x)$ polinomunun x + 4 ile bölümünden kalan:

$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ ve

$K = (-4 + 1).P(-4) + 3.R(-4)$

$= (-3).(-2) + 3.(3) = 15$ tir.

D. P(x) POLİNOMUNUN $x^n + a$ İLE BÖLÜNMESİNDEN ELDE EDİLEN KALAN

Polinomun $x^n + a$ ile bölümünden kalanı bulmak için ($x^n + a = 0 \Rightarrow x^n = -a$) x^n yerine $-a$ yazılır.

Örnek:

$$P(x) = x^{12} + 3x^8 - 4x + 7$$

polinomunun $x^4 - 2$ ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$x^4 - 2 = 0$ ise $x^4 = 2$ dir.

$P(x) = (x^4)^3 + 3(x^4)^2 - 4x + 7$ polinomunun $x^4 - 2$ ile bölümünden kalan:

$K(x) = (2)^3 + 3(2)^2 - 4x + 7$

$= 8 + 12 - 4x + 7 = -4x + 27$ dir.

Örnek:

$$P(x) = x^6 - x^5 + 3x^3 - 2ax^2 + bx + 3$$

polinomunun $x^2 + 1$ ile bölümünden kalan 3x – 4 olduğuna göre, a.b değerini bulalım.

Çözüm:

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ dir.

$P(x) = (x^2)^3 - x.(x^2)^2 + 3x(x^2) - 2ax^2 + bx + 3$

olduğuna göre, kalan:

$K(x) = (-1)^3 - x(-1)^2 + 3x(-1) - 2a(-1) + bx + 3$

$K(x) = -1 - x - 3x + 2a + bx + 3$

$K(x) = (b - 4)x + 2a + 2$ dir.

Kalan $3x - 4$ olduğundan, ($b - 4 = 3$ ve $2a + 2 = -4$) tür.
Buradan $b = 7$ ve $a = -3$ ise $a.b = -21$ dir.

E. P(x) POLİNOMUNUN (x – a).(x – b).(x – c) ... ÇARPIMI İLE BÖLÜNEBİLMESİ

1) P(x) polinomu, $(x - a).(x - b).(x - c)$ ... çarpımı ile tam bölünebiliyorsa $x - a$, $x - b$, $x - c$, ... çarpanlarıyla da ayrı ayrı tam bölünür.

2) $x - a$, $x - b$, $x - c$, ... aralarında asal polinomlar olmak üzere, P(x) bu polinomlara ayrı ayrı tam bölünebiliyorsa $(x - a).(x - b).(x - c)$ ... çarpımı ile de tam bölünür.

Örnek:

$$P(x) = x^4 - 2mx^2 + x - n$$

polinomu $(x - 1).(x - 2)$ ile tam bölünebildiğine göre, m.n değerini bulalım.

Çözüm:

P(x), $(x - 1).(x - 2)$ ile tam bölünebiliyorsa $x - 1$ e ve $x - 2$ ye tam bölünür. Yani, $P(1) = 0$ ve $P(2) = 0$ dır.

O halde, $P(1) = 1^4 - 2.m.1^2 + 1 - n$

$0 = 1 - 2m + 1 - n$

$2 = 2m + n$ dir ... (1)

$P(2) = 0 \Rightarrow 0 = 2^4 - 2m.2^2 + 2 - n$

$\Rightarrow 0 = 16 - 8m + 2 - n$

$\Rightarrow 18 = 8m + n$ dir ... (2)

(1) ve (2) den $m = \frac{8}{3}$ ve $n = -\frac{10}{3}$ ise

$m.n = -\frac{80}{9}$ dur.

Örnek:

Bir P(x) polinomunun, $x + 1$ ile bölümünden kalan 3 ve $x - 4$ ile bölümünden kalan -7 dir.
Buna göre, P(x) polinomunun $(x + 1)(x - 4)$ ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

P(x) in $x + 1$ ile bölümünden kalan 3 ise
$P(-1) = 3$ tür.
P(x) in $x - 4$ ile bölümünden kalan -7 ise
$P(4) = -7$ dir.

P(x) in $(x + 1).(x - 4)$ ile bölümünde bölüm: B(x) ve (bölen ikinci derece olduğu için kalan en fazla birinci dereceden olur)
kalan: $K(x) = mx + n$ olsun.
Buna göre,
$P(x) = (x + 1).(x - 4).B(x) + mx + n$ dir.

$x = -1$ için $P(-1) = (-1 + 1)(-1 - 4).B(-1) + m(-1) + n$

$3 = -m + n$ ... (1) olur.

$x = 4$ için $P(4) = (4 + 1).(4 - 4).B(4) + 4m + n$

$-7 = 4m + n$ ... (2) olur.

(1) ve (2) den $m = -2$ ve $n = 1$ ise
$K(x) = -2x + 1$ olur.

F. P(x) POLİNOMUNUN $(ax + b)^n$ İLE BÖLÜNEBİLMESİ

P(x) polinomu $(ax + b)^n$ polinomu ile tam bölünebiliyorsa,

$P'(x)$, $P''(x)$, $P'''(x)$, ... $P^{(n-1)}(x)$ polinomları $ax + b$ ile tam bölünebilir.

Burada, $P'(x)$, $P''(x)$, $P'''(x)$, ... $P^{(n-1)}(x)$ polinomları, P(x) in sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü, ... (n – 1). türevleridir.

Örnek:

$$P(x) = x^3 + mx + n - 1$$

polinomu $(x + 1)^2$ ile tam bölünebiliyorsa, m + n değerini bulalım.

Çözüm:

1. yol:

$P(x) = x^3 + mx + n - 1$ polinomu $(x + 1)^2$ ile tam bölünebiliyorsa $P(-1) = 0$ ve $P'(-1) = 0$ dır.
$P(x) = a.x^n \Rightarrow P'(x) = a.n.x^{n-1}$ olduğundan,
$P'(x) = 3.x^2 + m$ dir.
Buna göre,

$$P'(x) = 3x^2 + m \Rightarrow P'(-1) = 3(-1)^2 + m$$
$$0 = 3 + m$$
$$m = -3 \text{ tür} \ldots (1)$$

$$P(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + m.(-1) + n - 1 = 0$$
$$-1 - m + n - 1 = 0$$
$$n - m = 2 \text{ dir} \ldots (2)$$

$$m = -3 \text{ ve } n - m = 2 \Rightarrow n - (-3) = 2$$
$$n = -1 \text{ dir.}$$

O halde, $m + n = (-3) + (-1) = -4$ tür.

2. yol:

$P(x)$ polinomunu $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ e bölelim. Kalanın sıfır olduğunu gözönüne alarak sonuca gidelim.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + mx + n - 1 & x^2 + 2x + 1 \\ \underline{-\; x^3 + 2x^2 + x} & \overline{x - 2} \\ -2x^2 + (m-1)x + n - 1 & \\ \underline{-\; -2x^2 - 4x - 2} & \\ \underbrace{(m+3)}_{0}x + \underbrace{n+1}_{0} & \end{array}$$

$m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3$
$n + 1 = 0 \Rightarrow n = -1$ dir.
O halde, $m + n = -3 - 1 = -4$ tür.

3. yol:

$P(x) = x^3 + mx + n - 1$ polinomu $(x + 1)^2$ ile tam bölünebiliyorsa kalan 0 dır.
Buna göre,

$x^3 + mx + n - 1 = (x + 1)^2.B(x)$

$x^3 + mx + n - 1 = (x^2 + 2x + 1).B(x)$ dir.

$x^2 = -2x - 1$ yazılırsa,

$$x^3 = x(x^2) = x(-2x - 1)$$
$$= -2x^2 - x$$
$$= -2(-2x - 1) - x$$
$$= 3x + 2 \text{ olur.}$$

Buradan,

$3x + 2 + mx + n - 1 = 0$

$mx + n - 1 = -3x - 2$ dir.

Buradan, $m = -3$ ve $n = -1$ olur.

O halde, $m + n = -4$ tür.

Örnek:

$P(x)$ polinomunun $x^2 - 9$ ile bölümünden elde edilen kalan $2x + 3$ olduğuna göre, $2x - 6$ ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$P(x)$ polinomunun $x^2 - 9$ ile bölümünden kalan $2x + 3$ ise,

$P(x) = (x^2 - 9).B(x) + 2x + 3$ tür.

$P(x)$ polinomunun $2x - 6$ ile bölümünden kalan $P(3)$ olduğundan $P(3)$ ü bulmalıyız.

$$x = 3 \text{ için } P(x) = (x^2 - 9).B(x) + 2x + 3$$
$$P(3) = (3^2 - 9).B(x) + 2.3 + 3$$
$$P(3) = 9 \text{ dur.}$$

Örnek:

$P(x)$ polinomunun $x^3 + 1$ ile bölümünden kalan $x^2 + 3x + 5$ olduğuna göre, $x^2 - x + 1$ ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm:

$P(x)$ polinomunun $x^3 + 1$ ile bölümünden kalan $x^2 + 3x + 5$ ise

$P(x) = (x^3 + 1).B(x) + x^2 + 3x + 5$ tür.

$P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1).B(x) + x^2 - x + 1 + 4x + 4$

$P(x) = (x^2 - x + 1)\,[(x + 1).B(x) + 1] + 4x + 4$

olduğundan, $P(x)$ polinomunun $x^2 - x + 1$ ile bölümünden kalan $4x + 4$ tür.

ÇÖZÜMLÜ TEST

1. Aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi polinomdur?

I. $\sqrt{3}\,x^2 + x$ II. $5x^2 - \frac{1}{x}$ III. 15

IV. $2\sqrt{x} + 3$ V. $\sqrt{2}\,x^3 + \frac{x}{3}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. $P(x) = 4x^{4-n} - \sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{2}$

polinomunun derecesi 3 olduğuna göre, P(n) kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3. $P(x) = x^2 - 3x - 8$

olduğuna göre, $x.P(x).P(x^2)$ polinomunun derecesi kaçtır?

A) 16 B) 12 C) 9 D) 8 E) 7

4. $R(x) = ax^3 - 2x^2 + 4x - 7$

polinomunun katsayıları toplamı 1 olduğuna göre, R (– 1) kaçtır?

A) – 19 B) – 18 C) – 17 D) – 16 E) – 15

5. $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax - b + 1$
$Q(x) = x^3 + cx^2 - 8x + 4$

polinomları birbirine eşittir.

Buna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

A) 11 B) 6 C) – 2 D) – 7 E) – 13

6. $P(x) = 2Q(x - 2) + 2x$

bağıntısı veriliyor. P(x) polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan 4 tür.

Buna göre, Q(x) polinomunun x + 1 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

7. $P(x - 2) = ax^2 + bx + 2$

polinomu veriliyor. P(x – 1) polinomunun katsayılar toplamı 8, P(x – 3) polinomunun sabit terimi 2 dir.

Buna göre, a + 2b kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8

8. $P(x) = 2x^{13} + x^6 - x + 1$

polinomunun $x^2 - 1$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2x – 1 B) x – 2 C) x D) x + 2 E) 1

9. $P(x) = 3x^6 - 2x^4 - x^2 + x$

polinomunun $x^3 - x$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) x D) x – 1 E) x + 1

10. $P(x, y) = (x + 1 - y)^3 + y - x + 1$

polinomunun y – x – 1 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

11. **$P(x)$ polinomunun $x^2 - 4$ ile bölümünden kalan $2x$ olduğuna göre, $P^3(x)$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan kaçtır?**

A) 64 B) 27 C) 8 D) 4 E) 1

12.
$$(x + 1).P(x + 2) = x^3 - ax^2 + 1$$

olduğuna göre, $P(2x)$ polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

13.
$$P(2x) = x^2 + 5x - 14$$

olduğuna göre, $P(x)$ polinomu aşağıdakilerden hangisi ile tam bölünebilir?

A) $x - 2$ B) $x - 4$ C) $x + 2$ D) $x + 4$ E) $x + 10$

14. $P(x)$ polinomunun $x - 4$ ile bölümünden kalan 1, $x + 2$ ile bölümünden kalan $- 5$ dir.

Buna göre, $P(x)$ polinomunun $x^2 - 2x - 8$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) x B) $x - 1$ C) $x - 2$ D) $x - 3$ E) $- x + 2$

15.
$$P(x) + P(2 - x) = 2x^2 - 4x$$

olduğuna göre, $P(x)$ polinomunun katsayılarının toplamı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) $- 1$ E) $- 2$

16.
$$P(x).P(x + 1) = x^2 - x$$

olduğuna göre, $P(x)$ polinomu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $- x + 2$ B) $- x - 1$ C) $x - 1$ D) $x + 1$ E) $x^2 - 1$

17. **$P(x)$ polinomunun $x^2 + 1$ ile bölümünden kalan $x + 1$ olduğuna göre, $P^2(x)$ polinomunun $x^2 + 1$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) 1 C) x D) $x + 1$ E) $2x$

18. **$R(x)$ polinomunun $x^2 - x - 2$ ile bölümünden kalan $2x - 1$ olduğuna göre, $x + 1$ ile bölümünden kalan kaçtır?**

A) $- 3$ B) $- 2$ C) $- 1$ D) 0 E) 1

19. $Q(x)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan $- 1$ dir.

$$P(Q(x)) = Q(x).(x + 1) + 3x^2 - 2x + 2$$

olduğuna göre, $P(x + 2)$ polinomunun $x + 3$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 10 B) 8 C) 5 D) 3 E) 1

20.
$$P(x) = ax^3 + x^2 + (b - 1)\,x + c$$

polinomu $(x + 1)^3$ ile tam bölünebildiğine göre, $3a + b$ kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

TESTİN ÇÖZÜMLERİ

1. I. $\sqrt{3}\,x^2 + x$ polinomdur.

II. $5x^2 - \frac{1}{x}$ ifadesinde $\frac{1}{x} = x^{-1}$ dir ve $-1 \notin N$ olduğundan $5x^2 - \frac{1}{x}$ polinom değildir.

III. 15 sabit polinomdur.

IV. $2\sqrt{x} + 3$ ifadesinde $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ dir ve $\frac{1}{2} \notin N$

olduğundan $2\sqrt{x} + 3$ polinom değildir.

V. $\sqrt{2}\,x^3 + \frac{x}{3}$ polinomdur.

O halde; I, III, V polinom olduğundan 3 tanesi polinomdur.

Cevap: C

2. $P(x) = 4x^{4-n} - \sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{2}$ polinomunun derecesi 3 olduğundan,

$4 - n = 3 \Rightarrow n = 1$ dir.

$P(n) = P(1) = 4 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4$ tür.

Cevap: E

3. Çarpım polinomunun derecesi sorulduğundan, P(x) in yalnızca en büyük dereceli terimini hesaba katarak,
$Q(x) = x.P(x).P(x^2)$ polinomunun derecesini bulabiliriz. O halde,

$P(x^2) = (x^2)^2 = x^4$ olduğundan,

$Q(x) = x.P(x).P(x^2)$

$= x.x^2.x^4 = x^7$

olduğundan $der[\,Q(x)\,] = 7$ dir.

Cevap: E

4. R(x) polinomunun katsayılarının toplamı 1 ise,
$a - 2 + 4 - 7 = 1$ dir.

O halde, $a = 6$ ve $R(x) = 6x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ dir.

$R(-1) = 6.(-1)^3 - 2.(-1)^2 + 4(-1) - 7$

$= -6 - 2 - 4 - 7$

$= -19$ dur.

Cevap: A

5. $P(x) = Q(x)$ olduğundan,
$c = -2,\ a = -8$ ve $-b + 1 = 4 \Rightarrow b = -3$ tür.
O halde, $a + b + c = (-8) + (-3) + (-2) = -13$ tür.

Cevap: E

6. P(x) polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan 4 ise $P(1) = 4$ tür. Q(x) polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalan $Q(-1)$ dir.
$P(x) = 2Q(x - 2) + 2x$ eşitliğinde $x = 1$ yazarak sonucu bulalım.

$P(1) = 2Q(1 - 2) + 2.1$

$4 = 2Q(-1) + 2$

$Q(-1) = 1$ dir.

Cevap: D

7. $P(x - 1)$ polinomunun katsayılar toplamı 8 ise,
$P(1 - 1) = 8 \Rightarrow P(0) = 8$ dir.
$P(x - 3)$ polinomunun sabit terimi 2 ise
$P(0 - 3) = 2 \Rightarrow P(-3) = 2$ dir.
$P(x - 2) = ax^2 + bx + 2$ eşitliğinde $x = 2$ ve $x = -1$ değerlerini yazarak sonucu bulalım.

$x = 2$ için $P(2 - 2) = a.2^2 + b.2 + 2$

$8 = 4a + 2b + 2$

$3 = 2a + b$ dir... (1)

$x = -1$ için $P(-1 - 2) = a.(-1)^2 + b(-1) + 2$

$2 = a - b + 2$

$a = b$ dir...(2)

(1) ve (2) den $a = b = 1$ bulunur.
O halde, $a + 2b = 1 + 2.1 = 3$ tür.

Cevap: B

8. P(x) polinomunun $x^2 - 1$ ile bölümünden kalanı bulmak için P(x) polinomunda

($x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$) x^2 gördüğümüz yere 1 yazarak kalanı bulacağız.

$P(x) = 2x^{13} + x^6 - x + 1 = 2(x^2)^6.x + (x^2)^3 - x + 1$ polinomunda x^2 yerine 1 yazılırsa kalan,

$2(1)^6.x + (1)^3 - x + 1 = 2x + 1 - x + 1$
$= x + 2$ bulunur.

Cevap: D

9. P(x) polinomunun $x^3 - x$ ile bölümünden kalanı bulmak için P(x) polinomunda

($x^3 - x = 0 \Rightarrow x^3 = x$) x^3 gördüğümüz yere x yazarak kalanı bulacağız.

$P(x) = 3x^6 - 2x^4 - x^2 + x = 3(x^3)^2 - 2(x^3).x - x^2 + x$ polinomunda $x^3 = x$ alınırsa kalan,

$3(x)^2 - 2.(x).x - x^2 + x = 3x^2 - 2x^2 - x^2 + x$
$= x$ bulunur.

Cevap: C

10. P(x, y) polinomunun $y - x - 1$ ile bölümünden kalanı bulmak için P(x, y) polinomunda,

($y - x - 1 = 0 \Rightarrow y - x = 1$) $y - x$ gördüğümüz yere 1 yazarak kalanı bulalım.

$P(x, y) = (-(y - x) + 1)^3 + (y - x) + 1$ polinomunda $y - x = 1$ alınırsa kalan,

$(-(1) + 1)^3 + 1 + 1 = 2$ bulunur.

Cevap: C

11. P(x) polinomunun $x^2 - 4$ ile bölümünden kalan 2x ise $P(x) = (x^2 - 4).B(x) + 2x$ tir.

$P^3(x)$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan $(P(2))^3$ tür.

$x = 2$ için $P(x) = (x^2 - 4).B(x) + 2x$
$P(2) = (2^2 - 4).B(2) + 2.2$
$P(2) = 0.B(2) + 4$
$P(2) = 4$ tür.

O halde, $(P(2))^3 = 4^3 = 64$ tür.

Cevap: A

12. P(2x) polinomunun katsayılar toplamı P(2.1) = P(2) dir.

$(x + 1).P(x + 2) = x^3 - ax^2 + 1$ eşitliğinde $x = 0$ verilirse P(2) bulunur.

O halde, $x = 0$ için,

$(0 + 1).P(0 + 2) = 0^3 - a.0^2 + 1$
$P(2) = 1$ bulunur.

Cevap: A

13. $P(2x) = x^2 + 5x - 14$ eşitliğinde x yerine $\frac{x}{2}$ yazarak P(x) polinomunu bulalım.

$P(2.\frac{x}{2}) = (\frac{x}{2})^2 + 5.\frac{x}{2} - 14$

$P(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} - 14$

$P(x) = \frac{x^2 + 10x - 56}{4}$

$P(x) = \frac{(x + 14)(x - 4)}{4}$

P(x) polinomu $x - 4$ ile tam bölünür.

Cevap: B

14. P(x) polimonunun $x - 4$ ile bölümünden kalan 1 ise P(4) = 1 dir. P(x) polinomunun $x + 2$ ile bölümünden kalan -5 ise $P(-2) = -5$ tir. P(x) polinomunun $x^2 - 2x - 8$ ($x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$ olduğuna dikkat ediniz) ile bölümünden kalan $ax + b$ olsun.

$P(x) = (x - 4)(x + 2).B(x) + ax + b$

eşitliğinde $x = 4$ ve $x = -2$ için a ve b değerini bulalım.

$x = 4$ için $P(4) = 4a + b = 1$
$x = -2$ için $P(-2) = -2a + b = -5$ bulunur.

Buradan $a = 1$, $b = -3$ ve $ax + b = x - 3$ bulunur.

O halde, P(x) polinomunun $x^2 - 2x - 8$ ile bölümünden kalan $x - 3$ tür.

Cevap: D

15. $P(x) + P(2-x)$ polinomunun derecesi iki ise $P(x)$ polinomunun derecesi de ikidir.

$P(x) = ax^2 + bx + c$ olsun.

$$P(x) + P(2-x) = 2x^2 - 4x$$
$$ax^2 + bx + c + a(2-x)^2 + b(2-x) + c = 2x^2 - 4x$$
$$2ax^2 - 4ax + 4a + 2b + 2c = 2x^2 - 4x$$

olduğundan; $2a = 2$, $-4a = -4$ ve $4a + 2b + 2c = 0$ dır.

Buradan $a = 1$ ve $4.1 + 2b + 2c = 0$ ise $b + c = -2$ bulunur.

O halde, $P(1) = a + b + c = 1 + (-2) = -1$ dir.

Cevap: D

16. $P(x).P(x+1)$ polinomu, ikinci dereceden bir polinom olduğu için $P(x)$ polinomu birinci dereceden bir polinomdur.

$P(x) = ax + b$ olsun. $P(x+1) = a(x+1) + b$ olur.

$$P(x).P(x+1) = x^2 - x$$
$$(ax+b).(ax+a+b) = x^2 - x$$
$$a^2x^2 + (a^2 + 2ab)x + b(a+b) = x^2 - x$$

olduğundan, $a^2 = 1$, $a^2 + 2ab = -1$, $b(a+b) = 0$ dır. $a^2 = 1$ ise $a = 1$ veya $a = -1$ dir.

$a = 1$ için $a^2 + 2ab = -1$
$$1 + 2b = -1$$
$$b = -1 \text{ dir.}$$

$P(x)$ polinomu $x - 1$ olabilir.

Cevap: C

17. $P(x)$ polinomunun $x^2 + 1$ ile bölümünden kalan $x + 1$ ise,

$P(x) = (x^2 + 1).B(x) + x + 1$

$(P(x))^2 = ((x^2 + 1).B(x) + x + 1)^2$ dir.

$(P(x))^2$ polinomunun $x^2 + 1$ ile bölümünden kalanı bulmak için $(P(x))^2$ polinomunda x^2 yerine -1 yazarak kalanı bulalım.

$$((x^2+1).B(x) + x + 1)^2 = ((-1+1).B(x) + x + 1)^2$$
$$= (x+1)^2$$
$$= x^2 + 2x + 1$$
$$= -1 + 2x + 1$$
$$= 2x \text{ olur.}$$

Cevap: E

18. $R(x)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalan $R(-1)$ dir. $R(x)$ polinomunun $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ ile bölümünden kalan $2x - 1$ ise,

$R(x) = (x-2)(x+1).B(x) + 2x - 1$

$R(-1) = (-1-2)(-1+1).B(-1) + 2(-1) - 1$

$R(-1) = (-3).0.B(-1) - 2 - 1$

$R(-1) = -3$ tür.

Cevap: A

19. $Q(x)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan -1 ise $Q(1) = -1$ dir. $P(x+2)$ polinomunun $x + 3$ ile bölümünden kalan $P(-1)$ olduğundan $P(-1)$ değerini bulmalıyız.

$x = 1$ için $P(Q(x)) = Q(x).(x+1) + 3x^2 - 2x + 2$
$$P(Q(1)) = Q(1).(1+1) + 3.1^2 - 2.1 + 2$$
$$P(-1) = -1.2 + 3 - 2 + 2$$
$$P(-1) = 1 \text{ dir.}$$

Cevap: E

20. ***1. Yol:***

$P(x)$ polinomu $(x+1)^3$ ile tam bölünebiliyor ise $P(x) = k.(x+1)^3$ tür. O halde,

$ax^3 + x^2 + (b-1)x + c = k.(x+1)^3$

$ax^3 + x^2 + (b-1)x + c = kx^3 + 3kx^2 + 3kx + k$

$a = k$, $1 = 3k$, $b - 1 = 3k$, $c = k$ dır.

$3k = 1 \Rightarrow k = \dfrac{1}{3} = a = c$ dir.

$b - 1 = 3k \Rightarrow b - 1 = 1 \Rightarrow b = 2$ dir.

Buradan $3a + b = 3.\dfrac{1}{3} + 2 = 3$ tür.

2. Yol:

$P(x)$ polinomu $(x+1)^3$ ile tam bölünebiliyor ise $P(-1) = 0$, $P'(-1) = 0$ ve $P''(-1) = 0$ dır.

$P(-1) = 0 \Rightarrow a.(-1)^3 + (-1)^2 + (b-1)(-1) + c = 0$
$$-a + 1 - b + 1 + c = 0$$
$$a + b - c = 2 \text{ dir... (1)}$$

$P'(x) = 3ax^2 + 2x + b - 1$

$P'(1) = 0 \Rightarrow 3a.(-1)^2 + 2(-1) + b - 1 = 0$
$$3a - 2 + b - 1 = 0$$
$$3a + b = 3 \text{ tür... (2)}$$

a, b, c değerlerini bulmamıza gerek kalmadı. Çünkü, bizden zaten $3a + b$ değerini istiyordu. Onu da (2) de bulduk.

Cevap: B

CEVAPLI TEST – 1

1. $P(x) = 2x^{n-1} + x^{3-n} - 3^{\frac{n}{2}}$

ifadesi bir polinom olduğuna göre, n kaç farklı değer alabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. P(x) ve Q(x) polinom olmak üzere,

$$\text{der}(P(x).Q(x)) = 5$$
$$\text{der}[P((Q(x)] = 6$$

olduğuna göre, der[P(x) + Q(x)] kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3. $P(x + 2) = 2x^2 - x + 1$

polinomu veriliyor.

P(x + 1) polinomunun x – 2 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4. P(x – 1) polinomunun katsayılarının toplamı 4, sabit terimi 3 tür.

$$P^2(x + 2) + 2.P(x + 1)$$

polinomunun x + 2 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 6 B) 16 C) 20 D) 22 E) 26

5. $Q(2x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

olduğuna göre, Q(x) polinomunun x – 3 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

6. P(x + 1) polinomunun katsayılarının toplamı, Q(x – 1) polinomunun katsayılarının toplamına eşittir.

$$\frac{P(x-2)}{Q(x-4)} = x^2 - 4mx + 1$$

olduğuna göre, m kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

7. $P(x) = 3x^2 + ax + 5$

polinomu veriliyor.

P(2x – 1) polinomunun $x - \frac{1}{2}$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8. P(x) polinomu x – 3 ile tam bölünebildiğine göre, aşağıdakilerden hangisi x – 3 ile tam bölünemez?

A) (x + 2).P(x)
B) (x – 3) + 3P(x)
C) x – 3P(x)
D) $x^2 - 9 + P^2(x)$
E) (x – 3).P(x + 1)

9. $P(x) = x^{39} + 2x^{25} - mx^3 + n - 1$

polinomu $x^2 - 1$ ile tam bölünebildiğine göre, $m^3 + n$ kaçtır?

A) 2 B) 9 C) 28 D) 65 E) 126

10. $P(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 2$

olduğuna göre, P(x) polinomunun $x^2 + 1$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) x – 1 B) – x + 1 C) – x – 1
D) 0 E) 1

11. $(x-2).P(x) = x^2 + ax + 2a$

olduğuna göre, P(x) polinomunun x – 3 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

12. $P(4x-3a) = 3x^2 - 9x + 1$

polinomu veriliyor.

P(x) polinomunun x – a ile bölümünden kalan 1 olduğuna göre, a kaç olabilir?

A) – 2 B) – 1 C) 1 D) 2 E) 3

13. **P(x) polinomunun $x^2 - 2x - 1$ ile bölümünden kalan 2x – 1 olduğuna göre, $P^2(x)$ polinomunun $x^2 - 2x - 1$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 2x – 1 B) – 4x + 5 C) 4x – 5 D) 4x + 5 E) 5x – 4

14. Sabit terimi – 1 olan bir P(x) polinomunun (x – 2) ile bölümünden kalan 5 tir.

Buna göre, P(x) polinomunun $x^2 - 2x$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) – x – 3 B) – x + 3 C) x – 1 D) 1 E) 3x – 1

15. $P(x) = 3x^{24} - ax^{12} + 2x^6 - 12$

polinomunun çarpanlarından biri $x^3 - \sqrt{2}$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

16. $P(ax-1) = 3ax - 5$

polinomu veriliyor.

P(ax + 2) polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

17. **Bir P(x) polinomunun $(x+3)^2$ ile bölümünden kalan 2x + 1 olduğuna göre, x + 3 ile bölümünden kalan kaçtır?**

A) – 5 B) – 3 C) 1 D) 3 E) 5

18. $P(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + a$

polinomunun bir çarpanı x – 2 dir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi P(x) polinomunun diğer çarpanlarından biri <u>değildir</u>?

A) 1 B) x – 2 C) x + 2 D) x – 5 E) x + 5

19. P(x) bir polinomdur.

$P(x+1) + P(2x-1) = 9x + 4$

olduğuna göre, P(1) – P(5) kaçtır?

A) – 12 B) – 8 C) – 4 D) 9 E) 13

20. $P(x) = (a+1)x^2 + x + b$

polinomu $x^2 - 2x + 1$ ile tam bölünebildiğine göre, P(x – 1) polinomunun x – 2 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

CEVAP ANAHTARI

1-A	2-B	3-C	4-D	5-B	6-D	7-D	8-C	9-C	10-D
11-B	12-E	13-D	14-E	15-B	16-C	17-A	18-E	19-A	20-A

CEVAPLI TEST – 2

1. P(x) polinomu 2. dereceden, Q(x) polinomu 3. dereceden polinomdur.

Buna göre, $x^2.P(x).Q^2(x)$ polinomunun derecesi kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 10 E) 12

2. $$\frac{3x-2}{x^2-x}=\frac{A}{x}-\frac{B}{x-1}$$

olduğuna göre, A – 2B kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3. $$P(x^2+2x)=2x^2+4x+1$$

polinomu veriliyor.

P(x) polinomunun x – 3 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

4. P(x – 1) ve Q(x + 1) polinomlarının x ile bölümünden kalanlar sırasıyla 1 ve 2 dir.

Buna göre, $2P(x-2)+Q^2(x)$ polinomunun x – 1 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

5. $$(ax+2)\,P(x-3)=x^3-ax^2+5x+4$$

eşitliği veriliyor.

P(x) polinomunun x + 2 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre, a kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

6. $$P(2x+1)=Q(x-1).(x^2+1)$$

eşitliği veriliyor.

P(x + 3) polinomunun sabit terimi 2 olduğuna göre, Q(x) polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7. $$P(x-3)=2.R(x)-7$$
$$Q(x)=P(x-2)+x$$

bağıntıları veriliyor.

Q(x) polinomunun x – 3 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre, R(x + 1) polinomunun x – 3 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8. $$P(x)=ax^3+(b+1)x-a+2b$$

polinomu x^2-1 ile tam bölünebildiğine göre, a + b kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{5}{3}$ E) 2

9. $$P(Q(x)-1)=2x^2+ax-2a-1$$

bağıntısı veriliyor.

P(x) polinomunun x – 2 ile bölümünden kalan 3, Q(x) polinomunun x – 1 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre, a kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

10. $$P(x-1).P(x+1)=x^2-2x$$

olduğuna göre, P(x) polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

11. $P(Q(x) - 1)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan ile $P(x - 1)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan birbirine eşittir.

Buna göre, $Q(x - 1)$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

12. $x^3 - 2x^2 + nx + n + 4 = (x + 1)\,P(x - 1) + x - 1$

eşitliği veriliyor.

P(x) polinomunun çarpanlarından biri $x - 1$ olduğuna göre, n kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

13. P(x) polinomunun $x^2 - 2x - 3$ ile bölünmesinde bölüm B(x), kalan $(4 - x)$ tir.

B(x) polinomu $x^2 + x$ ile tam bölünebildiğine göre, P(x) polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) -3 B) -2 C) 0 D) 3 E) 4

14. $P(x - 3)$ polinomunun $x - 3$ ile bölümünden kalan 6, $x - 2$ ile bölümünden kalan 4 tür.

Buna göre, $P(x + 2)$ polinomunun $x^2 + 5x + 6$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) $2x + 3$ B) $2x - 5$ C) $2x + 5$ D) $2x + 10$ E) $2x - 10$

15. $2P(x) + P(-x) = 3x^2 - 2x + 9$

olduğuna göre, $P(x + 1)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

16. P(x) polinomunun $x^2 - 1$ ile bölünmesinde bölüm Q(x), kalan $2x - 2$ dir.

Q(x) polinomunun $2x - 3$ ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre, P(x) polinomunun $2x - 3$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

17. Bir P(x) polinomunun $x^3 + x^2 - x$ ile bölümünden kalan $x^2 - 2x$ olduğuna göre, $x^2 + x - 1$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-3x - 1$ B) $-3x$ C) $-3x + 1$ D) $6 - 3x$ E) $6 + 3x$

18.
$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$
$$Q(x) = x^5 + 5x^2 - 3x + 1$$

olduğuna göre, $x^2.P(x).Q(x)$ polinomunun x^4 lü teriminin katsayısı kaçtır?

A) 7 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

19. $2x^3 - 5x^2 - 3x = (2x + 1).P(x)$

olduğuna göre, P(x) polinomu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 + 3x + 1$ B) $x^2 + 3x$ C) $x^2 - 3x$ D) $x^2 - 3$ E) $x^2 + 3$

20. $P(x) = ax^3 + (b - 1)x^2 - bx + c$

polinomunun iki katlı bir kökü $x = 1$ olduğuna göre, a ile b arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

.) $b - 3a = 0$ B) $3a + b = 2$ C) $3a - b = 2$ D) $a - 3b = 1$ E) $a + 3b = 1$

CEVAP ANAHTARI

1-D	2-E	3-E	4-C	5-D	6-B	7-D	8-B	9-A	10-B
11-C	12-B	13-E	14-D	15-E	16-A	17-C	18-D	19-C	20-B

23. BÖLÜM İKİNCİ ve ÜÇÜNCÜ DERECEDEN DENKLEMLER

A. İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

a, b, c reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ifadesine x e göre düzenlenmiş ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Örnek:

$3x^2 - 7x + 2 = 0$ ifadesi x e bağlı ikinci dereceden denklemdir. Bu denklemde, katsayılar; $a = 3$, $b = -7$, $c = 2$ dir.

Örnek:

$\sqrt{3}\,t^2 - 5 = 0$ ifadesi t ye bağlı ikinci dereceden bir denklemdir. Bu denklemde katsayılar;

$a = \sqrt{3}$, $b = 0$, $c = -5$ tir.

Örnek:

$$(k-2)x^4 + mx^3 + x^{4n-14} + x - 1 = 0$$

denklemi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre; k, m ve n değerlerini bulalım.

Çözüm:

Denklemin ikinci dereceden denklem olabilmesi için,

$k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$

$m = 0$

$4n - 14 = 2 \Rightarrow n = 4$ olmalıdır.

B. DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde,

$\Delta = b^2 - 4ac$ ifadesine, denklemin diskriminantı denir.

1) $\Delta > 0$ ise, denklemin farklı iki reel kökü vardır. Bu kökler,

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{dır.}$$

2) $\Delta = 0$ ise, denklemin eşit iki reel kökü vardır. Bu kökler,

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \quad \text{dır.}$$

Denklemin bu köküne çift katlı kök veya çakışık iki kök denir.

3) $\Delta < 0$ ise denklemin reel kökü yoktur.

Örnek:

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 3x + 1 = 0$ denkleminde $a = 1$, $b = -3$, $c = 1$ olduğundan $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.(1).(1)$ dir.

$\Delta = 5 > 0$ olduğu için denklemin farklı iki reel kökü vardır.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Buna göre çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\} \quad \text{olur.}$$

Örnek:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.(1).(4) = 0$ dır.

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2(1)} = 2 \quad \text{dir.}$$

Buna göre, çözüm kümesi, $Ç = \{2\}$ dir.

Örnek:

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$3x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$

$\Rightarrow \Delta = 4 - 4.1.3$

$\Rightarrow \Delta = -8 < 0$ dır.

$\Delta < 0$ olduğundan, denklemin reel kökü yoktur.

Buna göre, $Ç = \varnothing$ dir.

Örnek:

$$x^2 - 2mx + m^2 + 2m - 1 = 0$$

denkleminin birbirine eşit iki reel kökü olduğuna göre, m değerini bulalım.

Çözüm:

İkinci dereceden denklemin birbirine eşit iki reel kökünün olması için, $\Delta = 0$ olmalıdır. Buna göre, $b^2 - 4ac = 0$ dır.

$(-2m)^2 - 4.(1).(m^2 + 2m - 1) = 0$

$4m^2 - 4m^2 - 8m + 4 = 0$

$-8m + 4 = 0$

$m = \frac{1}{2}$ dir.

Uyarı:

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözümünde, $ax^2 + bx + c$ ifadesi kolayca çarpanlarına ayrılabiliyorsa, formül kullanmadan da denklemin kökleri bulunabilir.

Örnek:

1) $3x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ dır.

2) $4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1)(2x + 1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ veya $x_2 = -\frac{1}{2}$ dir.

3) $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ veya $x_2 = 5$ tir.

4) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 2$ veya $x_2 = 3$ tür.

5) $2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3).(2x + 1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 3$ veya $x_2 = -\frac{1}{2}$ dir.

C. İKİNCİ DERECEDEN BİR DENKLEME DÖNÜŞTÜRÜLEBİLEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Bazı denklemler, ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olmadığı halde, bazı düzenlemelerle ikinci dereceden bir bilinmeyenli denkleme dönüştürülebilir.

1) Polinomların Çarpımı Veya Bölümü Şeklindeki Denklemlerin Çözümü

1) $P(x).Q(x) = 0 \Leftrightarrow (P(x) = 0$ veya $Q(x) = 0)$ dır.

2) $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow (P(x) = 0$ ve $Q(x) \neq 0)$ dır.

Örnek:

$$(x^3 - 4x).(x^2 - 3x + 2) = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$(x^3 - 4x).(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$(x^3 - 4x = 0$ veya $x^2 - 3x + 2 = 0)$ dır.

$x(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2)$ dir. ... (1)

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x_4 = 2$ veya $x_5 = 1)$ dir. ... (2)

(1) ve (2) deki köklerin birleşim kümesi verilen denklemin çözüm kümesidir.

Buna göre, $Ç = \{-2, 0, 1, 2\}$ dir.

Örnek:

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 16} = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 16} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 7x + 12 = 0$ ve

$x^2 - 16 \neq 0)$ dır. Buna göre,

$x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 4) = 0$

Buradan, $x = 3$ ve $x = 4$ bulunur. ... (1)

$x^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 4) \neq 0$

Buradan, $x \neq 4$ ve $x \neq -4$ olmalıdır. ... (2)

(1) ve (2) sonuçları birlikte düşünülürse denklemin çözüm kümesi, $Ç = \{3\}$ tür.

2) Yardımcı Bilinmeyen Kullanılarak Çözülebilen Denklemlerin Çözümü

Verilen denklemlerdeki aynı türden ifadeleri yeniden adlandırarak denklem basitleştirilir.

Örnek:

$$(x^2-3x)^2-3x^2=4-9x$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$(x^2-3x)^2-3x^2=4-9x$

$(x^2-3x)^2-3x^2+9x-4=0$

$(x^2-3x)^2-3(x^2-3x)-4=0$

$x^2-3x=a$ dönüşümü yapılırsa

$a^2-3a-4=0 \Rightarrow (a-4)(a+1)=0$ ise $a=4$ veya $a=-1$ dir.

Buradan, $x^2-3x=4 \Rightarrow x^2-3x-4=0$

$\Rightarrow x_1=4$ veya $x_2=-1$

$x^2-3x=-1 \Rightarrow x^2-3x+1=0$

$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=9-4=5$

$x_3=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_4=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ olur.

O halde verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç=\left\{-1, 4, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ olur.

Örnek:

$$\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+3=0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+3=0$ denkleminde $\sqrt[4]{x}=t$ dönüşümü yapılırsa $\sqrt{x}=t^2$ olur.

Buradan denklem, $t^2-4t+3=0$ dır.

$(t-3).(t-1)=0$ ise $t_1=3$ ve $t_2=1$ dir.

$\sqrt[4]{x}=t_1=3 \Rightarrow x_1=81$ ... (1)

$\sqrt[4]{x}=t_2=1 \Rightarrow x_2=1$ ... (2)

(1) ve (2) sonuçları birleştirilirse çözüm kümesi,

$Ç=\{1, 81\}$ olur.

3) Köklü Denklemlerin Çözümü

Bir denklemde bilinmeyen, kök içinde bulunuyorsa bu denkleme köklü denklem denir.

Denklemde köklü terim bir tane ise eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılır. Eğer iki tane ise köklü terimlerin biri eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılır. Sonra kökün derecesine göre kuvvet alınır. Gerekli işlemler yapılarak denklem çözülür. Bulunan köklerden başlangıçtaki denklemi sağlayanlar çözüm kümesinin elemanı olur.

Örnek:

$$x-2=\sqrt{2x-1}$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$x-2=\sqrt{2x-1}$

$x^2-4x+4=2x-1$

$x^2-6x+5=0 \Rightarrow (x-1)(x-5)=0$

$x=1$ ve $x=5$ tir. $x=1$ denklemini sağlamadığından denklemin gerçel kökü $x=5$ tir. O halde,

$Ç=\{5\}$ tir.

Örnek:

$$\sqrt{2a+17}-\sqrt{a}=3$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\sqrt{2a+17}-\sqrt{a}=3$

$\Rightarrow \sqrt{2a+17}=3+\sqrt{a}$

$\Rightarrow 2a+17=9+6\sqrt{a}+a$

$\Rightarrow a+8=6\sqrt{a}$

$\Rightarrow a^2+16a+64=36a$

$\Rightarrow a^2-20a+64=0$

$\Rightarrow (a-4)(a-16)=0$ olur.

$a=4$ veya $a=16$

değerleri başlangıçtaki denklemi sağladığından,

$Ç=\{4, 16\}$ olacaktır.

4) Mutlak Değer İçeren Denklemler

Bu tip denklemlerin çözümü mutlak değer tanımı göz önüne alınarak yapılacaktır.

Örnek:

$$x\,|x-2| = 2x-3$$

denkleminin reel köklerini bulalım.

Çözüm:

$x\,|x-2| = 2x-3$

$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ için $|x-2| = x-2$ dir.

Buradan, $x.(x-2) = 2x-3$

$x^2-2x = 2x-3$

$x^2-4x+3 = 0$

$(x-1)(x-3) = 0$ ise

$x = 1$ veya $x = 3$ tür. Burada

$x \geq 2$ için $x_1 = 3$ denklemin köküdür... (1)

$x-2 < 0 \Rightarrow x < 2$ için $|x-2| = -x+2$ dir.

$x(-x+2) = 2x-3$

$-x^2+2x = 2x-3 \Rightarrow x^2 = 3$ tür.

$\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ veya $x = -\sqrt{3}$

Burada $x < 2$ için,

$x_2 = \sqrt{3}$ veya $x_3 = \sqrt{3}$ denklemin kökleridir. ... (2)

(1) ve (2) durumları birleştirilirse,

$Ç = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 3\}$ olur.

Örnek:

$$x^2.|x-3| = |3-x|$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$|x-3| = |3-x|$ tir. O halde,

denklem $x^2.|x-3| = |x-3|$ olur.

$x^2.|x-3| - |x-3| = 0$

$\Rightarrow |x-3|(x^2-1) = 0$

$\Rightarrow |x-3| = 0$ veya $x^2-1 = 0$

$\Rightarrow x-3 = 0$ veya $(x-1)(x+1) = 0$

$x_1 = 3$ $\quad x_2 = 1$ veya $x_3 = -1$

olduğundan denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \{-1, 1, 3\}$ tür.

Uyarı:

$ax^2+bx+c=0$

ikinci dereceden denkleminde,

1) $a+b+c=0$ *ise* $Ç = \left\{1, \frac{c}{a}\right\}$ *dır.*

2) $a-b+c=0$ *ise* $Ç = \left\{-1, -\frac{c}{a}\right\}$ *dır.*

3) $b=0$ *ise denklemin simetrik kökleri vardır.* $(a \neq 0,\ a.c < 0)$

4) Birbirinden farklı iki tane ikinci dereceden denklemin kökleri aynı ise katsayılar orantılıdır. Yani,

$ax^2+bx+c=0$

$dx^2+ex+f=0$

çözüm kümeleri aynı ise,

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ *dir.*

Örnek:

$$(k^2-3k)x^2 + (9-k^2)\,x - 3 = 0$$

denkleminin simetrik iki kökü olduğuna göre, k değerini bulalım.

Çözüm:

$9-k^2 = 0 \Rightarrow (3-k)(3+k) = 0$

$k = -3$ veya $k = 3$ olur. Ancak $k^2-3k \neq 0$ olacağından $k \neq 3$ tür. Dolayısıyla k değeri -3 tür.

Örnek:

$$(k-2)x^2 + mx - 2 = 0$$
$$3mx^2 - (2m+1)x + 1 = 0$$

denkleminin çözüm kümeleri aynı ise k değerini bulalım.

Çözüm:

$\frac{k-2}{3m} = \frac{m}{-(2m+1)} = \frac{-2}{1}$ dir.

$\frac{m}{-2m-1} = \frac{-2}{1} \Rightarrow m = 4m+2$

$\Rightarrow m = -\frac{2}{3}$

$\frac{k-2}{3m} = \frac{-2}{1} \Rightarrow k-2 = -6m$

$\Rightarrow k-2 = -6\left(-\frac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow k-2 = 4$

$\Rightarrow k = 6$ olur.

D. İKİNCİ DERECEDEN BİR DENKLEMİN KÖKLERİ İLE KATSAYILARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde, $\Delta > 0$ ise,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

şeklinde iki farklı reel kökü vardır.

Bu iki eşitlik kullanılarak kökler ile katsayılar arasındaki bağıntılar bulunabilir.

1) Köklerin toplamı, $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

2) Köklerin çarpımı, $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

3) Köklerin farkının mutlak değeri,

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

Örnek:

$$(2m + 2)x^2 + (4 - 4m)x + m - 2 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, $x_1 = \frac{1}{x_2}$ ise kökler toplamını bulalım.

Çözüm:

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 . x_2 = 1 \quad \left(x_1 . x_2 = \frac{c}{a}\right)$$

$$\frac{m-2}{2m+2} = 1 \Rightarrow m - 2 = 2m + 2 \Rightarrow m = -4 \text{ tür.}$$

Kökler toplamı $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4m - 4}{2m + 2}$

$m = -4$ için $x_1 + x_2 = \frac{4(-4) - 4}{2(-4) + 2} = \frac{10}{3}$ tür.

Örnek:

$$3x^2 - 6x + 2m - 3 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$$2x_1 - 3x_2 = -6$$

olduğuna göre, m değerini bulalım.

Çözüm:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{(-6)}{3} = 2$ dir.

$$2x_1 - 3x_2 = -6$$

$$3 / \quad x_1 + x_2 = 2$$

$$+ \overline{}$$

$5x_1 = 0$ ise $x_1 = 0$ denklemin bir köküdür ve denklemi sağlar.

$x = 0$ için $2m - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$ dir.

Örnek:

$$x^2 - 27x + 1 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, $x_2\sqrt{x_1} - x_1\sqrt{x_2}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$x_2\sqrt{x_1} + x_1\sqrt{x_2} = t$ olsun.

Eşitliğin her iki tarafının karesini alalım.

$$x_2^2.x_1 + x_1^2.x_2 - 2.x_1.x_2\sqrt{x_1.x_2} = t^2$$

$$\Rightarrow x_1.x_2(x_1 + x_2) - 2x_1.x_2.\sqrt{x_1.x_2} = t^2$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a}.\left(-\frac{b}{a}\right) - 2\frac{c}{a}\sqrt{\frac{c}{a}} = t^2$$

$$\Rightarrow 27 - 2 = t^2$$

$$\Rightarrow t = 5 \text{ tir.}$$

Örnek:

$$x^2 - 4x + 2m - 2 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -1$$

olduğuna göre, m değerini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -1 \Rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1.x_2} = -1$$

$$x_1^2 + x_2^2 = -x_1.x_2 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = -x_1.x_2$$

$(x_1 + x_2)^2 = x_1.x_2 \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c}{a}$ dır.

$16 = 2m - 2 \Rightarrow m = 9$ dur.

Örnek:

$$3x^2 - (m + 2)x - m = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2$$

olduğuna göre, m değerini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1.x_2} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{-(m+2)}{3}}{-\frac{m}{3}} = -2$$

$$\Rightarrow m + 2 = 2m$$

$$\Rightarrow m = 2 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$ax^2 + (4a + 1)x - 7 = 0$$

denkleminin x_1 ve x_2 kökleri arasında a ya bağlı olmayan bağıntıyı bulalım.

Çözüm:

$ax^2 + (4a + 1)x - 7 = 0$ için

$$x_1 + x_2 = \frac{-4a - 1}{a} = -4 - \frac{1}{a}$$

$$x_1.x_2 = \frac{-7}{a} = 7(-\frac{1}{a})$$

$$\Rightarrow \frac{x_1.x_2}{7} = -\frac{1}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -4 - \frac{1}{a} = -4 + \frac{x_1.x_2}{7} \text{ dir.}$$

O halde, kökler arasındaki bağıntı

$7x_1 + 7x_2 - x_1.x_2 + 28 = 0$ dır.

E. KÖKLERİ VERİLEN İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMİN YAZILMASI

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem genel olarak,

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

şeklinde yazılır.

Buradan,

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0$$

yani, kökler toplamını ve kökler çarpımını bulmak yeterli olacaktır.

Örnek:

Kökleri -7 ve 3 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazalım.

Çözüm:

Kökler toplamı: $3 + (-7) = -4$

Kökler çarpımı: $3.(-7) = -21$

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0$

$x^2 - (-4)x - 21 = 0$

Buradan; $x^2 + 4x - 21 = 0$ dır.

Örnek:

Kökleri arasında;

$$\frac{x_1}{-2} = \frac{3}{x_2} \quad \text{ve} \quad 2x_1 + x_2 = x_1 + 7$$

bağıntıları olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazalım.

Çözüm:

$$\frac{x_1}{-2} = \frac{3}{x_2} \Rightarrow x_1.x_2 = -6 \quad \text{ve}$$

$2x_1 + x_2 = x_1 + 7 \Rightarrow x_1 + x_2 = 7$ değerleri

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$x^2 - 7x - 6 = 0$ olur.

Örnek:

Kökleri arasında;

$2x_1 + 2x_2 = 5 - x_1.x_2$

$2x_1 + x_2 - 2x_1.x_2 = 10 + x_1$

bağıntıları olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{rl} 2\,/ & 2(x_1 + x_2) + x_1.x_2 = 5 \\ + & x_1 + x_2 - 2x_1.x_2 = 10 \\ \hline & 5(x_1 + x_2) = 20 \Rightarrow x_1 + x_2 = 4 \quad \text{ve} \end{array}$$

$x_1 + x_2 - 2x_1.x_2 = 10$

$\Rightarrow 4 - 2x_1.x_2 = 10 \Rightarrow x_1.x_2 = -3$ tür.

O halde, bu denklem;

$x^2 - 4x - 3 = 0$ dır.

Örnek:

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

denkleminin kökleri a ve b dir. Kökleri $\frac{3}{a}$ ve $\frac{3}{b}$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazalım.

Çözüm:

Kökleri $\frac{3}{a}$ ve $\frac{3}{b}$ ise,

$a + b = 2$ ve $a.b = -3$ olduğundan,

kökler toplamı: $\frac{3}{a} + \frac{3}{b}$

$$= \frac{3(a+b)}{a.b} = \frac{3.2}{-3} = -2 \text{ dir... (1)}$$

kökler çarpımı: $\frac{3}{a} . \frac{3}{b}$

$$\frac{9}{ab} = \frac{9}{-3} = -3 \quad \text{tür... (2)}$$

(1) ve (2) den istenen denklem,

$x^2 - (-2)x - 3 = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$ olur.

Uyarı:

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve $m \neq 0$ olmak üzere,
kökleri $mx_1 + n$ ve $mx_2 + n$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem,
$mx_1 + n = x$ eşitliğinden elde edilen $x_1 = \frac{x-n}{m}$ değerinin, $ax^2 + bx + c = 0$ eşitliğinde x yerine $\frac{x-n}{m}$ yazılmasıyla bulunur.

Örnek:

$$4x^2 - 6x - 1 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.
Bu köklerin 2 katının 1 fazlasını kök kabul eden ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulalım.

Çözüm:

1. yol:

Yeni denklemin kökleri $\{ 2x_1 + 1, \ 2x_2 + 1 \}$ olacaktır.
O halde, denklemde

$2x_1 + 1 = x \Rightarrow x_1 = \frac{x-1}{2}$ için, x yerine $\frac{x-1}{2}$ yazılırsa,

$4x^2 - 6x - 1 = 0$

$4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{x-1}{2}\right) - 1 = 0$

$(x-1)^2 - 3(x-1) - 1 = 0$

$x^2 - 2x + 1 - 3x + 3 - 1 = 0$

$x^2 - 5x + 3 = 0$ olur.

2. yol:

$4x^2 - 6x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere,
kökleri $y_1 = 2x_1 + 1$ ve $y_2 = 2x_2 + 1$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem,

$x^2 - (y_1 + y_2)x + y_1 . y_2 = 0$ olur.

Buna göre,

$y_1 + y_2 = (2x_1 + 1) + (2x_2 + 1)$

$= 2(x_1 + x_2) + 2$

$= 2\left(-\frac{-6}{4}\right) + 2 = 5$ ve

$y_1 . y_2 = (2x_1 + 1)(2x_2 + 1)$

$= 4x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1$

$= 4.\left(\frac{-1}{4}\right) + 2.\left(-\frac{-6}{4}\right) + 1$

$= 3$ olduğundan,

bu değerler yerine yazılırsa,

$x^2 - (y_1 + y_2)x + y_1.y_2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 3 = 0$ olur.

Örnek:

$x^2 - 2x - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre, kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulalım.

Çözüm:

1. yol:

$y_1 = \dfrac{1}{x_1}$ ve $y_2 = \dfrac{1}{x_2}$ olsun.

$y_1 = \dfrac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{y_1}$ değeri, $x^2 - 2x - 4 = 0$ denkleminde x yerine yazılırsa,

$\left(\dfrac{1}{y_1}\right)^2 - 2.\dfrac{1}{y_1} - 4 = 0$

$\Rightarrow -4y_1^2 - 2y_1 + 1 = 0$ ve

y_1 yerine x yazılırsa,

$-1 /\ -4x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 4x^2 + 2x - 1 = 0$ dır.

2. yol:

$y_1 + y_2 = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 . x_2}$

$= \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$ ve

$y_1 . y_2 = \dfrac{1}{x_1} . \dfrac{1}{x_2} = -\dfrac{1}{4}$ değerleri,

$x^2 - (y_1 + y_2)x + y_1y_2 = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$x^2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)x - \dfrac{1}{4} = 0$

eşitliğinin iki yanı 4 ile çarpılırsa $4x^2 + 2x - 1 = 0$ olur.

F. ÜÇÜNCÜ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

a, b, c, d reel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere, üçüncü dereceden bir bilinmeyenli,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

denkleminin kökleri olan x_1, x_2 ve x_3 ile katsayıları arasında şu bağıntılar vardır.

$x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{-b}{a}$

$x_1.x_2 + x_2.x_3 + x_1.x_3 = \dfrac{c}{a}$

$x_1.x_2.x_3 = \dfrac{-d}{a}$

Kökler aritmetik dizi oluşturuyorsa:

$2x_2 = x_1 + x_3$ tür.

Kökler geometrik dizi oluşturuyorsa:

$x_2^2 = x_1.x_3$ tür.

Uyarı:

n, 1 den büyük pozitif tamsayı olmak üzere,

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$

denkleminde;

Kökler toplamı $= \dfrac{-a_{n-1}}{a_n}$ *ve*

Kökler çarpımı $= (-1)^n.\dfrac{a_0}{a_n}$ *dir.*

Örnek:

$$-2x^5 + (4m - 2)x^4 + 3x^2 - m + 2 = 0$$

beşinci dereceden denklemde kökler toplamı 5 olduğuna göre kökler çarpımını bulalım.

Çözüm:

Kökler toplamı $= \dfrac{-(4m-2)}{-2} = 5$

$4m - 2 = 10 \Rightarrow m = 3$ tür.

Kökler çarpımı $= (-1)^5.\dfrac{(-m+2)}{-2}$

$\Rightarrow \dfrac{-(-3+2)}{-2} = -\dfrac{1}{2}$ dir.

Örnek:

$x^2 - 2kx + 3 = 0$

$2x^3 + (2 - 4k)x^2 + 2x + n = 0$

denklemlerinin x_1 ve x_2 kökleri ortak olduğuna göre, n değerini bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 2kx + 3 = 0$ denkleminde,

$x_1 + x_2 = 2k$ ve $x_1.x_2 = 3$

$2x^3 + (2 - 4k)x^2 + 2x + n = 0$ denkleminde,

$x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{4k-2}{2} = 2k - 1$

$x_1 + x_2 = 2k$ ise $2k + x_3 = -1 + 2k$

$x_3 = -1$ dir.

$x_1.x_2.x_3 = \dfrac{-n}{2}$ ve $x_1.x_2 = 3$ ise

$3.x_3 = \dfrac{-n}{2} \Rightarrow 3(-1) = \dfrac{-n}{2}$

$\Rightarrow n = 6$ dır.

Örnek:

$$-x^3 + 6x^2 + (3 - m)x - 2m + 2 = 0$$

denkleminin kökleri aritmetik dizi oluşturduğuna göre, m değerini bulalım.

Çözüm:

Verilen denklemde $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ ... (1)
kökler aritmetik dizi oluşturduğuna göre,
$2x_2 = x_1 + x_3$ tür.
(1) denkleminde $x_1 + x_3$ yerine $2x_2$ yazılırsa,
$2x_2 + x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 2$ olur.
$x_2 = 2$ verilen denklemin bir kökü olduğuna göre, denklemi sağlar. O halde,

$$-8 + 24 + 6 - 2m - 2m + 2 = 0$$
$$24 - 4m = 0$$
$$m = 6 \text{ olur.}$$

Örnek:

$$3x^3 - px^2 + (1 - p)x + 81 = 0$$

denkleminin kökleri geometrik dizi oluşturduğuna göre p yi bulalım.

Çözüm:

Kökler çarpımı,

$$x_1.x_2.x_3 = \frac{-81}{3} = -27 \text{ ... (1)}$$

kökler geometrik dizi oluşturuyorsa
$x_2^2 = x_1.x_3$ dir. (1) bağıntısında yerine yazılırsa,

$$x_2.x_1.x_3 = x_2.x_2^2 = x_2^3 = -27$$
$$x_2 = -3 \text{ olur.}$$

$x_2 = -3$ denklemin köküdür ve denklemi sağlar. O halde,

$$3(-3)^3 - p.(-3)^2 + (1 - p)(-3) + 81 = 0$$
$$-81 - 9p + 3p - 3 + 81 = 0$$
$$-6p - 3 = 0$$
$$p = -\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Örnek:

$$x^3 + mx - 2 = 0$$

denkleminin kökleri arasında $x_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3}$ bağıntısı var ise m değerini bulalım.

Çözüm:

$$x_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} \Rightarrow x_2.x_1.x_3 = x_3 + x_1$$

kökler çarpımı ; $x_1.x_2.x_3 = 2$ dir.
Yerine yazılırsa $2 = x_1 + x_3$ olur.
kökler toplamı ; $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ dır.
$x_1 + x_3 = 2 \Rightarrow 2 + x_2 = 0$ ve $x_2 = -2$ dir.
$x = -2$ denkleminin köküdür.
O halde;

$$(-2)^3 + m(-2) - 2 = 0$$
$$-8 - 2m - 2 = 0$$
$$-10 = 2m \text{ ise } m = -5 \text{ tir.}$$

Örnek:

$$x^3 + x - 10 = 0$$

denkleminin köklerinin işaretlerini inceleyelim.

Çözüm:

$x^3 + x - 10 = 0$ denkleminin kökleri
x_1, x_2 ve x_3 olsun.
$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ve $x_1.x_2.x_3 = 10$

olduğundan denklemin köklerinin iki tanesi negatif, bir tanesi pozitiftir.

ÇÖZÜMLÜ TEST

1. $$x^2 - \frac{1}{1-x} = 4x - 5 - \frac{x}{1-x}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) { 0, 1 } B) { 0 } C) { 1, 2 } D) { 2 } E) { 0, 2 }

2. $$2x - \sqrt{2x-1} = 1$$

denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

3. $$ax^2 - 2x + b + 4 = 0$$

denkleminin köklerinden biri 2 olduğuna göre, $\frac{b}{a}$ oranı kaçtır?

A) 4 B) $\frac{1}{4}$ C) 1 D) $-\frac{1}{4}$ E) – 4

4. $$(m+2)x^2 + 2mx + 1 = 0$$

denkleminin çift katlı bir kökü aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5. $$3x^2 + (x_1 + 1)x + 6x_2 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, $\frac{x_1}{x_2}$ oranı kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) 0 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

6. $$3x^2 - ax - 4 = 0$$

denkleminin köklerinden biri – 1 olduğuna göre, köklerin farkı kaç olabilir?

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{5}{7}$ C) 1 D) $\frac{7}{5}$ E) $\frac{7}{3}$

7. $$3m^2 - 6mx + m + 2 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$$3x_1 - 3x_2 = -4$$

olduğuna göre, m kaçtır?

A) – 3 B) – 2 C) 0 D) 2 E) 3

8. $$x^2 - 3x - 2\sqrt{3} = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, $x_1^2 x_2^3 + x_1^3 x_2^2$ toplamı kaçtır?

A) 14 B) 20 C) 28 D) 32 E) 36

9. $$3x^2 + (4-m)x + 12 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_1 dir.

$$\sqrt{x_1} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre, m kaçtır?

A) 12 B) 15 C) 17 D) 18 E) 19

10. m pozitif gerçel (reel) sayı olmak üzere,

$$x^2 - (2m-1)x + m^2 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{3}{2}$$

olduğuna göre, m kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 3

11. $mx^2 + (m-1)x + m - 5 = 0$

denkleminin simetrik iki kökü olduğuna göre, bu köklerin çarpımı kaçtır?

A) 4 B) 2 C) 0 D) − 2 E) − 4

12. $x^2 - (m+1)x + n = 0$
$-2x^2 + nx + m = 0$

denkleminin çözüm kümeleri aynı olduğuna göre, 3n − m kaçtır?

A) − 2 B) − 1 C) 0 D) 2 E) 4

13. $x^2 - (m+1)x + m = 0$

denkleminin köklerinin aritmetik ortalamasının geometrik ortalamasına oranı $\frac{5}{4}$ olduğuna göre, m nin tamsayı değeri kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

14. $x^2 - (a+5)x - 7 = 0$
$x^2 + (a-9)x + 7 = 0$

denkleminin birer kökleri eşit olduğuna göre, farklı olan köklerinin toplamı kaçtır?

A) − 8 B) − 7 C) 0 D) 7 E) 8

15. Kökleri x_1 ve x_2 olan denklemin kökleri arasında,

$$\frac{x_1}{-3} = \frac{2}{x_2} \quad \text{ve} \quad 2x_1 + x_2 = x_1 - x_1.x_2$$

bağıntıları olan ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 + 3x - 1 = 0$ B) $x^2 + 6x - 6 = 0$
C) $x^2 - 6x - 6 = 0$ D) $x^2 - 6x + 6 = 0$
E) $x^2 - 3x + 6 = 0$

16. $m < 0$ olmak üzere,

$4mx^2 - (4m-1)x + m = 0$

denkleminin kökleri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Reel kökü yoktur.
B) Eşit iki kökü vardır.
C) Zıt işaretli iki kökü vardır.
D) Pozitif iki kökü vardır.
E) Negatif iki kökü vardır.

17. $x^2 + 3x + 1 = 0$

denkleminin köklerinin 2 katının 1 fazlasını kök kabul eden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 + 5x + 3 = 0$ B) $x^2 - 5x + 3 = 0$
C) $x^2 - 4x + 1 = 0$ D) $x^2 + 4x - 1 = 0$
E) $x^2 - 4x - 1 = 0$

18. $x^3 - mx^2 + (m+5)x - 6 = 0$

denkleminin kökleri ardışık üç tamsayı olduğuna göre, m kaçtır?

A) − 3 B) 0 C) 3 D) 6 E) 9

19. $x^2 - 5x + 2 = 0$

denkleminin kökleri,

$x^3 - (m+1)x^2 + 2mx - 2 = 0$

denkleminin de kökleri olduğuna göre, m kaçtır?

A) − 1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

20. $x^3 - ax^2 + 2 = 0$

denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 tür.

$x_1.x_2 = 2$ olduğuna göre, $x_1 + x_2$ kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

TESTİN ÇÖZÜMLERİ

1. $x^2 - \dfrac{1}{1-x} = 4x - 5 - \dfrac{x}{1-x}$

$x^2 - \dfrac{1}{1-x} = 4x - 5 - \dfrac{x}{1-x}$

$x^2 - 4x + 5 - \dfrac{(1-x)}{1-x} = 0$

$x^2 - 4x + 5 - 1 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$ olduğundan,

$(x-2)^2 = 0$ ve $x = 2$ dir.

Cevap : D

2. $2x - \sqrt{2x-1} = 1 \Rightarrow 2x - 1 = \sqrt{2x-1}$

denkleminde her iki tarafın karesini alalım.

$4x^2 - 4x + 1 = 2x - 1$

$4x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$

O halde, $(2x-1).(x-1) = 0$ olur.

Buradan, $x = \dfrac{1}{2}$ veya $x = 1$ dir.

Toplamları, $\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$ dir.

Cevap : C

3. $ax^2 - 2x + b + 4 = 0$

denkleminin bir kökü 2 olduğundan $x = 2$ denklemi sağlar.

Yani, $a(2)^2 - 2(2) + b + 4 = 0$

$4a + b = 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} = -4$ olur.

Cevap : E

4. $(m+2)x^2 + 2mx + 1 = 0$

denkleminin çift katlı kökü olduğuna göre,

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ dır.

$4m^2 - 4m - 8 = 0$

$m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) = 0$

O halde, $m = 2$ veya $m = -1$ olabilir.

Cevap: C

5. $3x^2 + (x_1 + 1)x + 6x_2 = 0$ denkleminin kökleri; x_1 ve x_2 olsun.

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\dfrac{x_1 - 1}{3}$

$3x_1 + 3x_2 = -x_1 - 1 \Rightarrow 4x_1 + 3x_2 = -1$ dir. ... (1)

$x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow x_1.x_2 = \dfrac{6x_2}{3}$

$x_1.x_2 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = 2$ dir. $x_1 = 2$ değeri (1) de yerine yazılırsa,

$4.(2) + 3x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = -3$ tür.

O halde, $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{-2}{3}$ tür.

Cevap : B

6. $3x^2 - ax - 4 = 0$ denkleminde,

$x = -1$ denklemin kökü olduğundan denklemi sağlar.

$3(-1)^2 - a(-1) - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$ dir.

Yerine yazılırsa denklem $3x^2 - x - 4 = 0$ olur.

Kökler farkı, $|x_1 - x_2| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ dır.

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{1 + 4.4.3}}{|3|} = \dfrac{\sqrt{49}}{3} = \dfrac{7}{3}$ tür.

Cevap: E

7. $3mx^2 - 6mx + m + 2 = 0$ denkleminin

kökler toplamı, $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2$ olduğundan,

$$\begin{array}{rl} 3\,/ & x_1 + x_2 = 2 \\ + & 3x_1 - 3x_2 = -4 \\ \hline & 6x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{3} \text{ tür.} \end{array}$$

$x_1 = \dfrac{1}{3}$ denklemin kökü olduğundan denklemi sağlar.

$3m\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 - 6m\left(\dfrac{1}{3}\right) + m + 2 = 0$

$\dfrac{m}{3} - 2m + m + 2 = 0$

$m - 3m + 6 = 0 \Rightarrow -2m + 6 = 0 \Rightarrow m = 3$ tür.

Cevap: E

8. $x^2 - 3x - 2\sqrt{3} = 0$ olduğundan,

$$x_1^2.x_2^3 + x_1^3.x_2^2 = x_1^2.x_2^2(x_1 + x_2)$$
$$= (\frac{c}{a})^2.(-\frac{b}{a})$$
$$= (-2\sqrt{3})^2.3$$
$$= 12.3$$
$$= 36 \text{ dır.}$$

Cevap: E

9. $3x^2 + (4 - m)x + 12 = 0$ denkleminde,

$x_1.x_2 = \frac{12}{3} = 4$ olduğundan,

$$\sqrt{x_1} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x_1.x_2} - 1}{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 2 = \sqrt{x_2}$$
$$\Rightarrow x_2 = 4 \text{ tür.}$$

$x_2 = 4$ denklemin kökü olduğundan denklemi sağlar. Buna göre,

$$3x^2 + (4 - m)x + 12 = 3.(4)^2 + 4.(4 - m) + 12$$
$$0 = 48 + 16 - 4m + 12$$
$$4m = 76$$
$$m = 19 \text{ dur.}$$

Cevap: E

10. $x^2 - (2m - 1)x + m^2 = 0$ olduğundan,

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} + \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1.x_2}} = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{2m - 1}{|m|} = \frac{3}{2} \text{ dir.}$$

$m > 0$ olduğundan, $\frac{2m - 1}{m} = \frac{3}{2}$

$$4m - 2 = 3m$$
$$m = 2 \text{ dir.}$$

Cevap: D

11. $mx^2 + (m - 1)x + m - 5 = 0$ denkleminin simetrik kökü olduğuna göre,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 0 \Rightarrow \frac{1 - m}{m} = 0$$

Buradan, $m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$ dir.

Kökler çarpımı, $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m - 5}{m}$

$$= \frac{1 - 5}{1}$$
$$= -4 \text{ tür.}$$

Cevap: E

12. $x^2 - (m + 1)x + n = 0$ denklemi ile $-2x^2 + nx + m = 0$ denkleminin çözüm kümeleri aynı olduğundan,

$$\frac{1}{-2} = \frac{-(m + 1)}{n} = \frac{n}{m} \text{ dir.}$$

$n = 2m + 2$ ve $m = -2n$ olduğundan,

$$n = 2(-2n) + 2 \Rightarrow 5n = 2$$
$$n = \frac{2}{5} \text{ tir.}$$

$$n = \frac{2}{5} \Rightarrow m = -2.(\frac{2}{5}) = -\frac{4}{5} \text{ tir.}$$

O halde, $3n - m = 3.\frac{2}{5} - (-\frac{4}{5})$

$$= 2 \text{ dir.}$$

Cevap: D

13. $x^2-(m+1)x+m=0$ denkleminin köklerinin,

aritmetik ortalaması, $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m+1}{2}$ ...(1) ve

geometrik ortalaması, $\sqrt{x_1.x_2}=\sqrt{m}$ ... (2) dir.

(1) ve (2) taraf tarafa bölünürse,

$$\frac{m+1}{2\sqrt{m}}=\frac{5}{4}\Rightarrow 2(m+1)=5\sqrt{m}$$

$$\Rightarrow 4.(m^2+2m+1)=25\,m$$

$$\Rightarrow 4m^2-17m+4=0$$

$$\Rightarrow (4m-1).(m-4)=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{1}{4} \text{ veya } m=4 \text{ tür.}$$

Cevap: C

14. $x^2-(a+5)x-7=0$

denkleminin kökleri $\{x_1, x_2\}$ olsun.

$x^2+(a-9)x+7=0$

denkleminin kökleri $\{x_1, x_3\}$ olsun.

O halde, ortak kök x_1 dir.

$x_1.x_2=-7$ ve $x_1.x_3=7$ olduğundan,

$$\frac{x_1.x_2}{x_1.x_3}=\frac{-7}{7}\Rightarrow \frac{x_2}{x_3}=-1\Rightarrow x_2=-x_3 \text{ tür.}$$

Buradan, $x_2+x_3=0$ dır.

Cevap: C

15. $\dfrac{x_1}{-3}=\dfrac{2}{x_2}\Rightarrow x_1.x_2=-6$ dır.

$$2x_1+x_2=x_1-x_1.x_2\Rightarrow x_1+x_2=-x_1.x_2$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=6 \text{ dır.}$$

Kökleri x_1 ve x_2 olan denklem,

$x^2-(x_1+x_2).x+x_1.x_2=0$ olduğundan,

istenilen denklem, $x^2-6x-6=0$ olur.

Cevap: C

16. $4mx^2-(4m-1)x+m=0$

denkleminin Δ sını (diskriminantını) bulalım.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4.a.c\\ &=(4m-1)^2-4m.4m\\ &=16m^2-8m+1-16m^2\\ &=-8m+1\\ &=-8m+1>0 \text{ dır. } (m<0)\end{aligned}$$

O halde, farklı reel iki kökü vardır. Dolayısıyla A ve B şıkkı yanlıştır.

Kökler toplamı; $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{4m-1}{4m}$

$4m-1<0$ ve $4m<0\Rightarrow x_1+x_2>0$ olduğundan E şıkkı yanlıştır.

Kökler çarpımı; $x_1.x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{m}{4m}=\dfrac{1}{4}$

olduğundan C şıkkı da yanlıştır.

$x_1+x_2>0$ ve $x_1.x_2=\dfrac{1}{4}$ olduğundan denklemin farklı, pozitif reel iki kökü vardır.

Cevap: D

17. $x^2+3x+1=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

Kökleri, $2x_1+1$ ve $2x_2+1$ olan denklem için,

$2x_1+1=x\Rightarrow x_1=\dfrac{x-1}{2}$ ifadesi,

$x^2+3x+1=0$ denkleminde x yerine yazılarak istenilen denklem bulunur.

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+3\left(\frac{x-1}{2}\right)+1=0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x+1}{4}+\frac{3x-3}{2}+1=0$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+6x-6+4=0$$

$$\Rightarrow x^2+4x-1=0 \text{ dır.}$$

Cevap: D

18. $x^3 - mx^2 + (m + 5)x - 6 = 0$

denkleminin kökleri; a , $a + 1$, $a + 2$ olsun. (ardışık üç tamsayı)

Buradan, $a.(a + 1).(a + 2) = -\dfrac{-6}{1}$

$a.(a + 1).(a + 2) = 6 = 1.2.3$

olduğundan, $a = 1$ ve kökler; 1 , 2 , 3 tür.

Buradan, kökler toplam, $m = 1 + 2 + 3$

$m = 6$ dır.

Cevap: D

19. $x^2 - 5x + 2 = 0$ (1. denklem)

$x^3 - (m + 1)x^2 + 2mx - 2 = 0$ (2. denklem)

denklemlerinin ikişer kökleri eşit olduğuna göre,

$x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = 2$ (1. denklemden)

$x_1.x_2.x_3 = \dfrac{-d}{a} = 2$ (2. denklemden)

$x_1.x_2 = 2 \Rightarrow 2.x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1$ dir.

$x_3 = 1$ 2. denklemin köküdür ve denklemi sağlar.

$(1)^3 - (m + 1)(1)^2 + 2m(1) - 2 = 0$

$1 - m - 1 + 2m - 2 = 0$

Buradan, $m = 2$ dir.

Cevap: D

20. $x^3 - ax^2 + 2 = 0$ denkleminde,

$x_1.x_2.x_3 = -2$ dir.

$x_1.x_2 = 2 \Rightarrow 2.x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = -1$ dir.

$x_3 = -1$ denklemi sağlayacağından,

$x^3 - ax^2 + 2 = 0 \Rightarrow (-1)^3 - a.(-1)^2 + 2 = 0$

$\Rightarrow -1 - a + 2 = 0$

$\Rightarrow a = 1$ dir.

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ve $x_3 = -1$

olduğundan, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_1 + x_2 - 1 = 1$

$x_1 + x_2 = 2$ dir.

Cevap: C

CEVAPLI TEST – 1

1. $$x^2 - \frac{1}{1-x} = x + \frac{1}{x-1}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {0,1} B) {0} C) {1} D) {0,2} E) {2}

2. $$\sqrt{x - \sqrt{x-1}} = 1$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {1} B) {2} C) {1, 2} D) {0, 1} E) {0, 1, 2}

3. $$x^4 - (10x + 24)^2 = 0$$

denkleminin köklerinin <u>en büyük</u> değeri ile <u>en küçük</u> değerinin toplamı kaçtır?

A) – 6 B) – 4 C) – 2 D) 6 E) 12

4. $$\frac{2x^2 - 4xy + 9y^2}{y^2} = 3$$

eşitliğini sağlayan x in, y cinsinden alabileceği değerlerin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{y}{3}$ B) $\frac{y}{2}$ C) y D) 2y E) 3y

5. $$x^2 - 10x + 8a = 0$$

denkleminin kökleri 2 ve 3 ile orantılı olduğuna göre, a kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

6. $$(m-1)x^2 + (m+1)x + \frac{m}{4} = 0$$

denkleminin birbirine eşit iki kökü olduğuna göre, köklerin çarpmaya göre terslerinin çarpımı kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

7. $$-3x^2 + 5kx + 2 = 0$$

denkleminin kökleri a ve b dir.

$$a^2 = \frac{4}{3b}$$

olduğuna göre, k kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 1 D) 2 E) 3

8. $$x^2 - 6x + 4 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ kaçtır?

A) 2 B) $\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 3 E) $\sqrt{10}$

9. $$x^2 - 8x + a + 3 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1 > x_2$ ve
$x_1^2 - x_2^2 = 16$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 12 D) 16 E) 24

10. $$x^2 + (m+2)x + 3m = 0$$

denkleminin köklerinin aritmetik ortalaması – 5 olduğuna göre, geometrik ortalaması kaçtır?

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{3}$ E) 5

11. $x^2 - p.q\,x - 2 = 0$

denkleminin kökleri p ve q olduğuna göre, diskriminantı kaçtır?

A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 6

12. $x^2 - kx + m = 0$ denkleminin bir kökü 3,
$x^2 + ax + b = 0$ denkleminin bir kökü – 2 dir.

Bu denklemlerin diğer kökleri ters işaretli ve mutlak değerce birbirine eşit olduğuna göre, a – k farkı kaçtır?

A) – 1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

13. $(a - b)x^2 + (a^2 - b^2)x + 2ab = 0$

denkleminin simetrik iki kökü x_1 ve x_2 olduğuna göre, $x_1 . x_2$ çarpımı kaçtır?

A) b B) a C) ab D) – ab E) – a

14. $x^2 - (2a + 2)x + 8 = 0$ denkleminin kökleri,

$$x^2 - 6ax + 35 = 0$$

denkleminin köklerinden üçer eksik olduğuna göre, a kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

15. $a < 0 < b$ olmak üzere,

$$ax^2 + bx - ab = 0$$

denkleminin kökleri için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?

A) Aynı işaretli iki kök var.
B) Pozitif iki kök var.
C) Negatif iki kök var.
D) Kökler ters işaretli ve mutlak değerce büyük olan kök pozitiftir.
E) Kökler ters işaretli ve mutlak değerce küçük olan kök pozitiftir.

16. $x^2 - 12x + 5a + 1 = 0$

denkleminin reel köklerinin çarpımının <u>en büyük</u> değeri için a kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

17. $x^2 - x - 3 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ olan ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 - 3x - 3 = 0$ B) $x^2 - 3x + 1 = 0$
C) $3x^2 - x - 1 = 0$ D) $3x^2 + x - 1 = 0$
E) $x^2 - x + 3 = 0$

18. $\frac{1}{a + b + x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, $x_1 . x_2$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) – ab B) ab C) a + b D) a – b E) 1

19. $x^3 - 9x^2 + (p - 2)x - p = 0$

denkleminin kökleri, bir aritmetik dizinin ardışık üç terimi olduğuna göre, p kaçtır?

A) 12 B) 17 C) 21 D) 24 E) 30

20. $x^3 - 3x^2 + (m - 2)x - 2 = 0$

denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 tür.

$$\frac{1}{x_1 . x_3} + \frac{1}{x_2 . x_3} = x_3$$

olduğuna göre, m kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

CEVAP ANAHTARI

1-B	2-C	3-D	4-D	5-B	6-D	7-B	8-E	9-C	10-B
11-A	12-A	13-E	14-E	15-D	16-C	17-D	18-B	19-E	20-E

CEVAPLI TEST - 2

1. a ve b gerçel sayılardır.

$$ax^2 - (ab + 1).x + b = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{1, \frac{b}{a}\right\}$ B) $\left\{a, \frac{1}{b}\right\}$ C) $\left\{\frac{1}{a}, \frac{b}{a}\right\}$ D) $\{a, b\}$ E) $\left\{\frac{1}{a}, b\right\}$

2. $$ax^2 - bx + a^2 b = 0$$

denklemini sağlayan x değerleri a ve b dir.

Buna göre, b nin a cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{a^2}{1+a}$ B) $\frac{a^2+1}{1-a}$ C) $\frac{2a}{1-a}$ D) $\frac{a^2}{1-a}$ E) $\frac{a^2-1}{2a}$

3. $$x^2 - 8x + 4 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$ değeri kaçtır?

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) 3 E) $2\sqrt{3}$

4. $$3^{2x+1} - 28.3^x + 9 = 0$$

denkleminin kökler toplamı kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 1 D) 2 E) 3

5. $$\sqrt{x - \sqrt{x+8}} = 2$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {1, 8} B) {8} C) {1} D) {1, 4} E) {4, 8}

6. $$3x^2 - (3 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, $x_1^2 + x_2^2$ toplamı kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 3

7. $$4x^2 - 24x + (m+n)^2 = 0$$

denklemini sağlayan x değerleri m ve n dir.

Buna göre, denklemin kökler çarpımı kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 15

8. $$(m-2)x^2 - (m^2-4)x - 4m + 1 = 0$$

denkleminin simetrik iki reel kökü olduğuna göre, kökler çarpımı kaçtır?

A) –3 B) $-\frac{9}{4}$ C) –2 D) $-\frac{3}{2}$ E) $-\frac{2}{3}$

9. $$x^2 - 2.(m-1).x + 5 - 2.m = 0$$

denkleminin çakışık köklerinden biri aşağıdakilerden hangisi <u>olabilir</u>?

A) – 3 B) – 2 C) – 1 D) 2 E) 3

10. $$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = 1$$

denkleminin köklerinin birer fazlasını kök kabul eden ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 - 7x + 6 = 0$ B) $x^2 - 6x + 4 = 0$
C) $x^2 - 6x + 5 = 0$ D) $x^2 - 9x + 7 = 0$
E) $x^2 - 10x + 5 = 0$

11. $2x^2 - mx + 4 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1 = x_2 + 2$

olduğuna göre, m nin pozitif değeri kaçtır?

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

12. $x^2 + 2ax + 2 = 0$ denkleminin kökleri 1 ve m, $x^2 - 3cx - a = 0$ denkleminin kökleri m ve n dir.

Buna göre, c kaçtır?

A) $-\frac{6}{5}$ B) $-\frac{11}{12}$ C) $-\frac{7}{12}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{11}{12}$

13. B ve C tamsayıdır.

$x^2 - Bx + C = 0$

denkleminin köklerinden biri $3 - \sqrt{2}$ olduğuna göre, B + C toplamı kaçtır?

A) – 13 B) – 1 C) 1 D) 7 E) 13

14. $x^2 - Ax + C = 0$ denkleminin bir kökü 2, $x^2 - Bx + D = 0$ denkleminin bir kökü – 1 dir.

Her iki denklemin diğer kökleri ters işaretli ve mutlak değerce birbirine eşit olduğuna göre, oranı $\frac{C.(A+B)}{D}$ kaçtır?

A) – 2 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

15. $x^2 - 4x + 1 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ değeri kaçtır?

A) 4 B) 3 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{6}$

16. $x^3 - ax - 1 = 0$

denkleminin reel kökleri x_1, x_2, x_3 için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Üçü de pozitiftir.
B) Üçü de negatiftir.
C) İkisi negatif biri pozitiftir.
D) İkisi pozitif biri negatiftir.
E) Köklerden biri sıfırdır.

17. $x^3 - (a + 2)x^2 - x + 2a = 0$

denkleminin kökleri 1, m, n dir.

Buna göre, $m^2 + n^2$ toplamı kaçtır?

A) 26 B) 17 C) 10 D) 5 E) 2

18. $x^3 - (a + 1)x^2 + bx - 2a = 0$

denkleminin kökleri x_1, x_2, x_3 tür.

$$\frac{1}{x_1.x_2} + \frac{1}{x_1.x_3} + \frac{1}{x_2.x_3} = \frac{3}{4}$$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) – 1 E) – 2

19. $x^3 - mx^2 + (2m - 1)x - m = 0$

denkleminin köklerinden biri 3 olduğuna göre, $x_1.(x_2 + x_3) + x_2.x_3$ değeri kaçtır?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 6

20. $x^2 - bx + 2 = 0$ denkleminin kökleri,

$x^3 - 2ax^2 - ax + 2 = 0$

denkleminin de kökleri olduğuna göre, b değeri kaçtır?

A) – 3 B) – 2 C) 2 D) 3 E) 4

CEVAP ANAHTARI

1-E	2-D	3-A	4-C	5-B	6-B	7-D	8-B	9-A	10-B
11-D	12-E	13-E	14-E	15-A	16-C	17-B	18-B	19-A	20-D

24. BÖLÜM İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR

A. TANIM

a, b, c reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, R den R ye, **$f(x) = ax^2 + bx + c$** şeklinde tanımlanan fonksiyonlara **ikinci dereceden bir bilinmeyenli fonksiyon** denir. İkinci dereceden bir bilinmeyenli fonksiyonun grafiğine **parabol** adı verilir.

Örnek:

R den R ye tanımlanan,

1) $f(x) = 3x^2 - 4x - 1$

2) $f(m) = -2m^2 + 5m + 10$

3) $f(t) = t^2 - 1$

ifadeleri ikinci dereceden bir bilinmeyenli fonksiyonlardır.

B. GRAFİK ÇİZİMİ

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin çizimi için üç şeyi bilmeliyiz. Bunlar; eksenleri kestiği noktalar, tepe noktası ve a nın işaretidir.

1) Parabolün, Eksenleri Kestiği Noktalar

$y = ax^2 + bx + c$ de x e sıfır verilerek parabolün y eksenini kestiği noktanın ordinatı ($x = 0$ için $y = c$), y ye sıfır verilerek parabolün x eksenini kestiği noktaların apsisi bulunur.

Burada $y = 0$ için $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin; farklı iki reel kökü çıkıyor ise grafik x eksenini farklı iki noktada kesiyor, eşit iki kökü var ise kökün olduğu noktada grafik x eksenine teğet, reel kök çıkmıyor ise grafik x eksenini kesmiyor ve teğet değildir.

2) Parabolün Tepe Noktası

Parabolün en alt ya da en üst noktasına **tepe noktası** denir.

Parabolün tepe noktası T(r, k) olmak üzere,

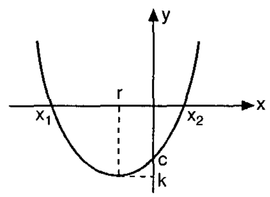
$$r = -\frac{b}{2a} \quad \text{ve} \quad f(r) = k = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \text{dır.}$$

Grafik, $x = -\frac{b}{2a}$ doğrusuna göre simetrik olduğu için $x = -\frac{b}{2a}$ doğrusuna parabolün **simetri ekseni** denir.

k değerine; $a > 0$ ise parabolün **en küçük** değeri, $a < 0$ ise parabolün **en büyük** değeri denir.

3) Parabolün Kollarının Yönü

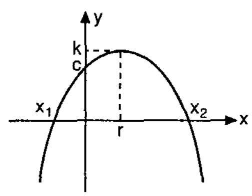
$y = ax^2 + bx + c$ nin grafiğinde $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı doğru, $a < 0$ ise aşağı doğrudur.



$a > 0$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$y = a(x - r)^2 + k$



$a < 0$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$y = a(x - r)^2 + k$

Örnek:

$f(x) = x^2 - 4x - 5$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

Üç hamlede çizelim.

1) Parabolün, eksenleri kestiği noktalar:

$y = f(x) = x^2 - 4x - 5$ te $x = 0 \Rightarrow y = -5$ tir.

y eksenini kestiği nokta $(0, -5)$ tir.

$y = x^2 - 4x - 5$ te $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Rightarrow x = 5$ veya $x = -1$ dir.

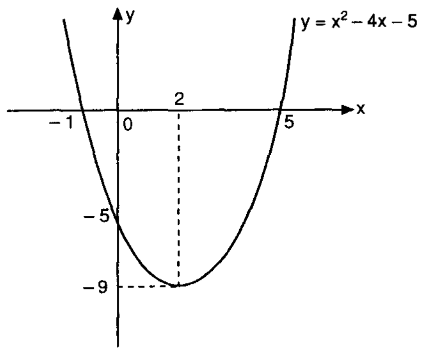
Yani x eksenini kestiği noktalar $(5, 0)$ ve $(-1, 0)$ dır.

2) Tepe noktası:

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2.1} = 2 \text{ ve } f(2) = k = 2^2 - 4.2 - 5 = -9$$

dur. Buna göre, tepe noktası T(2, – 9) dur.

3) $f(x) = x^2 - 4x - 5$ ifadesinde $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.
Şimdi grafiği çizelim.



Örnek:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

Parabolün, eksenleri kestiği noktalar:
$y = -x^2 + 2x + 3$ te $x = 0$ için $y = 3$ tür.
Grafik y eksenini (0, 3) noktasında keser.
$y = 0$ için $-x^2 + 2x + 3 = 0$
$\Rightarrow -(x^2 - 2x - 3) = 0$
$\Rightarrow x = 3$ veya $x = -1$ dir.

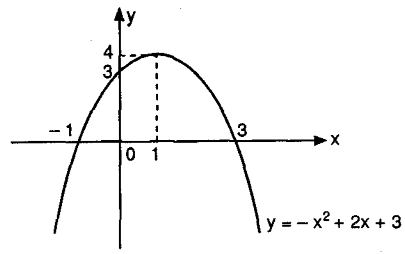
Grafik x eksenini (3, 0) ve (– 1, 0) noktalarında keser.

Tepe noktası:

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2.(-1)} = 1 \text{ ve } f(1) = k = 4 \text{ tür.}$$

Parabolün tepe noktası, T(1, 4) tür.

Kolların yönü:
$a = -1 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağıya doğrudur.
Şimdi grafiği çizelim.



Örnek:

$$f(x) = x^2 - 4$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

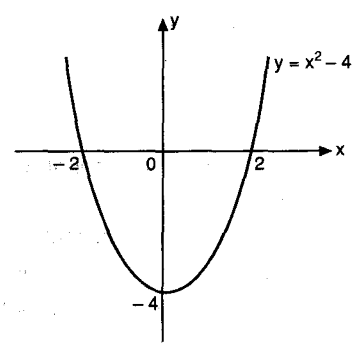
Parabolün, eksenleri kestiği noktalar:
$x = 0$ için $y = -4$ tür. y eksenini (0, – 4) te keser.
$y = 0$ için $0 = x^2 - 4 \Rightarrow x = 2$ veya $x = -2$ dir.
x eksenini (2, 0) ve (– 2, 0) noktalarında keser.

Tepe noktası:

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2.1} = 0 \text{ ve } f(0) = -4 \text{ tür.}$$

Parabolün tepe noktası T(0, – 4) tür.

Kolların yönü:
$a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.
Şimdi grafiği çizelim.



Not:

$y = ax^2 + bx + c$ eğrisinin grafiğinde $b = 0$ ise parabolün tepe noktası y ekseni üzerindedir.

Örnek:

$$f(x) = x^2 + 6x + 9$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

Parabolün, eksenleri kestiği noktalar:

$x = 0$ için $y = 9$ olduğundan parabol y eksenini $(0, 9)$ noktasında keser.

$y = 0$ için $0 = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 \Rightarrow x = -3$ tür.

Parabol x eksenine $(-3, 0)$ noktasında teğettir.

Tepe noktası:

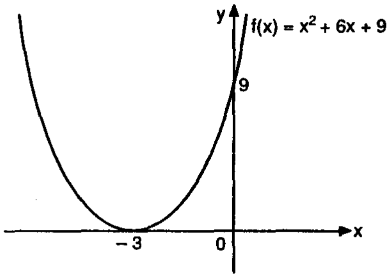
$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2.1} = -3 \quad \text{ve} \quad f(-3) = 0 \text{ dır.}$$

Parabolün tepe noktası $(-3, 0)$ dır.

Kolların yönü:

$a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur.

Şimdi grafiği çizelim.



Örnek:

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 3$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

Parabolün, eksenleri kestiği noktalar:

$x = 0$ için $y = -3$ olduğundan parabol y eksenini $(0, -3)$ noktasında keser.

$y = 0$ için $0 = -2x^2 + 4x - 3$ ifadesinde,

$\Delta = 4^2 - 4.(-2).(-3) = 16 - 24 = -8 < 0$ olduğundan reel kök yoktur. Dolayısıyla grafik x eksenini kesmemektedir.

Tepe noktası:

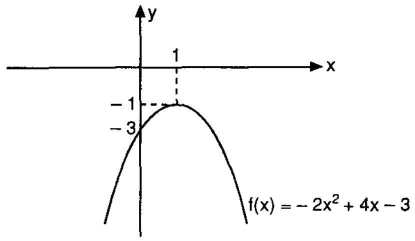
$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2.(-2)} = 1 \quad \text{ve} \quad f(1) = -1 \text{ dir.}$$

Parabolün tepe noktası $T(1, -1)$ dir.

Kolların yönü:

$a = -2 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağıya doğrudur.

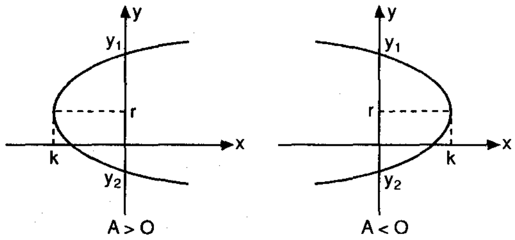
Şimdi grafiği çizelim.



$x = Ay^2 + By + C$ denkleminin belirttiği eğri de bir paraboldür. x ekseninin pozitif tarafının, y ekseninin pozitif tarafı gibi düşünülmesiyle daha önce $y = ax^2 + bx + c$ parabolü ile ilgili verilen bilgilerle grafik çizilir.

$A > 0$ ise parabolün kolları sağa doğru,

$A < 0$ ise parabolün kolları sola doğrudur.



Tepe noktası $T(k, r)$ ise,

$$r = -\frac{B}{2A} \quad \text{ve} \quad k = \frac{4AC - B^2}{4A} \text{ dır.}$$

Örnek:

$x = y^2 - 2y - 3$ parabolünün grafiğini çizelim.

Çözüm:

Parabolün, eksenleri kestiği noktalar:

$y = 0$ için $x = -3$ olduğundan parabol x eksenini $(-3, 0)$ noktasında keser.

$x = 0$ için $0 = y^2 - 2y - 3 \Rightarrow y = 3$ veya $y = -1$ dir. Parabol y eksenini $(0, 3)$ ve $(0, -1)$ noktalarında keser.

Tepe noktası:

$r = -\dfrac{B}{2A} = -\dfrac{-2}{2.1} = 1$ ve $y = 1$ için

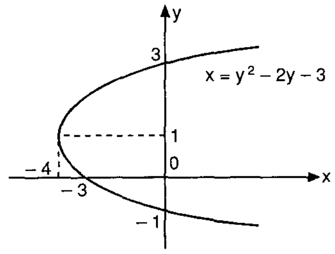
$x = 1^2 - 2.1 - 3 = -4$ tür.

Parabolün tepe noktası $T(k, r) = T(-4, 1)$ dir.

Kolların yönü:

$A = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları sağa doğrudur.

Şimdi grafiği çizelim.

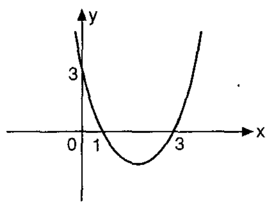


C. PARABOLÜN DENKLEMİNİN YAZILMASI

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünde bilinmeyenler (a, b, c) üç tane olduğu için parabolün denkleminin belli olması için en az üç noktasının belli olması lazımdır. Tepe noktası $(T(r,k))$ ile başka bir noktası da bilinen parabolün denklemi $y = a(x - r)^2 + k$ ifadesinden bulunabilir. Parabolün x eksenini kestiği noktalar $((x_1, 0)$ ve $(x_2, 0))$ belli iken, parabolün denklemi, $f(x) = a(x - x_1).(x - x_2)$ dir.

Örnek:

Yandaki parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c$ olduğuna göre, $\dfrac{a + c}{b}$ değerini bulalım.



Çözüm:

$y = ax^2 + bx + c$ parabolü $y = a(x - 1)(x - 3)$ parabolüne eşittir. Grafikte (0, 3) noktası parabolün üzerindeki bir nokta olduğu için parabolün denklemini sağlar.

O halde, $y = a(x - 1)(x - 3)$

$3 = a(0 - 1)(0 - 3)$

$3 = a.3$

$a = 1$ dir.

O halde parabolün denklemi,

$y = 1.(x - 1)(x - 3)$

$= x^2 - 4x + 3$ tür.

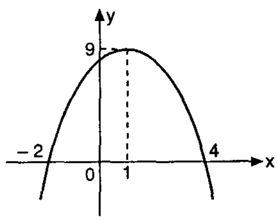
$ax^2 + bx + c = x^2 - 4x + 3$ ise

$a = 1$, $b = -4$ ve $c = 3$ tür.

Buradan, $\dfrac{a + c}{b} = \dfrac{1 + 3}{-4} = -1$ dir.

Örnek:

Yanda grafiği verilen parabolün denklemini bulalım.



Çözüm:

1.yol:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü (− 2, 0), (4, 0) ve (1, 9) noktalarından geçmektedir.

Buna göre,

$f(-2) = a(-2)^2 + b(-2) + c \Rightarrow 0 = 4a - 2b + c \ldots (1)$

$f(4) = a(4)^2 + b.4 + c \Rightarrow 0 = 16a + 4b + c \ldots (2)$

$f(1) = a(1)^2 + b.1 + c \Rightarrow 9 = a + b + c \ldots (3)$

(1), (2) ve (3) denklemlerinden $a = -1$, $b = 2$ ve $c = 8$ bulunur.

O halde, $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ dir.

2. yol:

$f(x) = a(x - r)^2 + k$ denkleminden $f(x) = a(x - 1)^2 + 9$ ifadesi elde edilir.

$f(-2) = 0 \Rightarrow a(-2 - 1)^2 + 9 = 0 \Rightarrow 9a + 9 = 0$

$\Rightarrow a = -1$ dir.

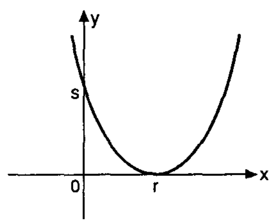
O halde, $f(x) = -1.(x - 1)^2 + 9$

$= -x^2 + 2x - 1 + 9$

$= -x^2 + 2x + 8$ dir.

Örnek:

Yanda verilen grafik $f(x) = x^2 - (r + 3)x + r + 6$ fonksiyonuna ait olduğuna göre, r + s değerini bulalım.



Çözüm:

$f(r) = 0 \Rightarrow r^2 - (r + 3).r + r + 6 = 0$

$\Rightarrow r^2 - r^2 - 3r + r + 6 = 0$

$\Rightarrow 6 = 2r$

$\Rightarrow r = 3$ tür.

$f(0) = s \Rightarrow s = 0^2 - (r + 3).0 + r + 6$

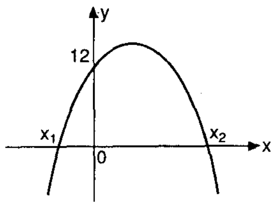
$\Rightarrow s = r + 6$

$\Rightarrow s = 3 + 6 = 9$ dur.

Buradan, $r + s = 3 + 9 = 12$ dir.

Örnek:

Yanda verilen grafik, $f(x) = -x^2 + (m + 1)x + 4m$ fonksiyonuna ait olduğuna göre, $x_1 + x_2 + x_1.x_2$ ifadesinin değerini bulalım.



Çözüm:

$f(0) = 12$ olduğundan,

$f(0) = -(0)^2 + (m + 1).0 + 4m$

$12 = 4m$

$m = 3$ tür.

O halde, $f(x) = -x^2 + 4x + 12$ dir.

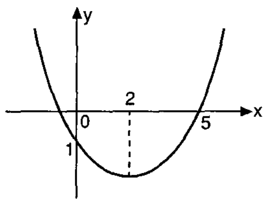
$x_1 + x_2 = -\dfrac{4}{-1} = 4,$

$x_1.x_2 = \dfrac{12}{-1} = -12$ olduğundan,

$x_1 + x_2 + x_1.x_2 = 4 + (-12) = -8$ dir.

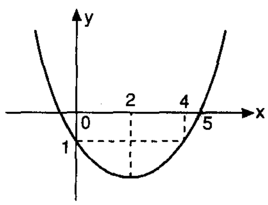
Örnek:

Yandaki parabolün denklemi $f(x) = ax^2 + bx + c$ olduğuna göre, f(4) değerini bulalım.



Çözüm:

Yandaki parabolün simetri ekseni $x = 2$ doğrusu olduğu için $f(0) = f(4) = 1$ dir. Parabolün denklemi bulunarak da $f(4) = 1$ olduğu görülür.



D. PARABOLLE DOĞRUNUN DÜZLEMDEKİ DURUMU

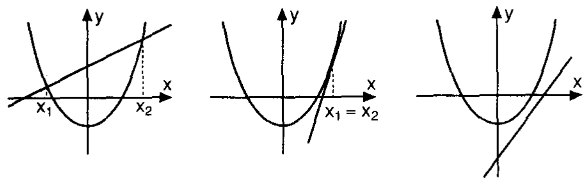
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = g(x) = mx + n$ doğrusunun durumunu belirlemek için ortak çözümden yararlanılır.

$f(x) = g(x)$ denkleminde,

1) $\Delta > 0$ ise parabol ile doğru farklı iki noktada kesişirler.

2) $\Delta = 0$ ise doğru parabole teğettir.

3) $\Delta < 0$ ise parabol ile doğru kesişmezler.



$\Delta > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta < 0$

Not:

y = f(x) ve y = g(x) herhangi iki eğri olsun.
f(x) = g(x) denkleminin;
1) Tek katlı köklerinde eğriler kesişir.
2) Çift katlı köklerinde eğriler birbirine teğettir.
3) Reel kökü yoksa eğriler kesişmez.

Örnek:

$y = x^2 + x - 4$ parabolü ile $y = 2x + 2$ doğrusunun kesim noktalarını bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{rl} & y = x^2 + x - 4 \\ - & y = 2x + 2 \\ \hline & 0 = x^2 - x - 6 \Rightarrow x_1 = -2 \text{ veya } x_2 = 3 \end{array}$$

$x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = 2(-2) + 2 = -2$

$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 2.3 + 2 = 8$ dir.

Kesim noktaları $(-2, -2)$ ve $(3, 8)$ dir.

Örnek:

$y = x + m - 1$ doğrusu $y = x^2 - x + 2$ parabolüne teğet olduğuna göre, m değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{l} y = x^2 - x + 2 \\ \underline{-\; y = x + m - 1} \\ 0 = x^2 - 2x + 3 - m \end{array}$$ denkleminde

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.(3 - m) = 0$ olmalıdır.

Buradan, $0 = 4 - 4(3 - m)$

$4 = 4(3 - m)$

$1 = 3 - m$

$m = 2$ dir.

Örnek:

$$f(x) = -x^2 + (m + 2)x + 3$$

fonksiyonunun $x = 2$ de bir maksimumu (en büyük değer) olduğuna göre, fonksiyonun maksimum değerini bulalım.

Çözüm:

Parabolün maksimum değerini aldığı nokta tepe noktasıdır.

Buna göre,

$$r = -\frac{b}{2a} \Rightarrow 2 = -\frac{m + 2}{2.(-1)} \Rightarrow m = 2 \text{ dir.}$$

$m = 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x + 3$ tür.

Buradan, $f(2) = -(2)^2 + 4.2 + 3 = 7$ dir.

Örnek:

$$f(x) = x^2 - 2mx + m - 2$$

parabolünün minimum (en küçük) değeri -2 olduğuna göre, m değerlerini bulalım.

Çözüm:

Parabolün minimum değerini aldığı yer tepe noktasıdır.

Buna göre,

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow -2 = \frac{4.1.(m - 2) - (-2m)^2}{4.1}$$

$$\Rightarrow -2 = \frac{4(m - 2) - 4m^2}{4}$$

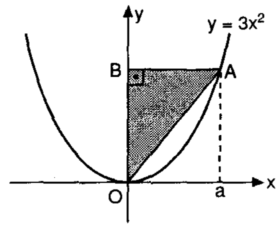
$$\Rightarrow -2 = m - 2 - m^2$$

$$\Rightarrow 0 = m - m^2$$

$$\Rightarrow m = 0 \text{ veya } m = 1 \text{ dir.}$$

Örnek:

Şekildeki parabolün denklemi $y = 3x^2$ dir. Şekilde ABO diküçgeninin alanı 12 birimkare olduğuna göre, a değerini bulalım.



Çözüm:

Şekildeki A(x, y) noktası için $x = a$ olduğuna göre, $y = 3a^2$ dir.

Buna göre, $|AB| = a$ birim ve $|BO| = 3a^2$ birimdir.

$$A(ABO) = \frac{1}{2}.|AB|.|BO|$$

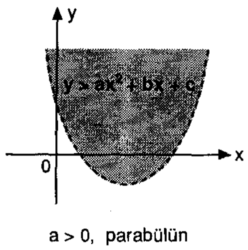
$$12 = \frac{1}{2}.a.3a^2$$

$$8 = a^3$$

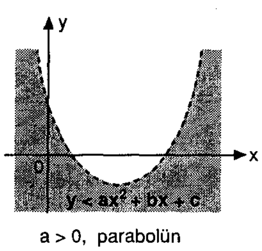
$$a = 2 \text{ dir.}$$

E. PARABOLÜN İÇ ve DIŞ BÖLGESİ

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün iç ve dış bölgesi aşağıda belirtilmiştir.



a > 0, parabülün iç bölgesi



a > 0, parabolün dış bölgesi

Benzer şekilde, $a < 0$ için de bölgeler oluşturulabilir. İstenen bölgenin tarandığına dikkat ediniz.

Örnek:

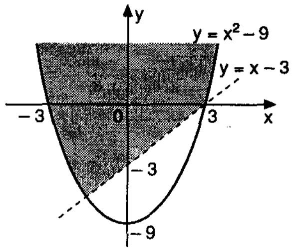
$$y \geq x^2 - 9$$
$$y > x - 3$$

ifadesini analitik düzlemde gösterelim.

Çözüm:

$y \geq x^2 - 9$ ifadesi $y = x^2 - 9$ parabolü ve parabolün iç bölgesidir.
Bunun doğruluğunu görmek için, parabolün üzerinden ya da içinden alınan herhangi bir noktanın eşitsizliği sağlayıp sağlamadığına bakılır. Mesela, parabolün iç bölgesinde yer alan (0, 0) noktasının eşitsizliği sağladığı görülür.

$y > x - 3$ eşitsizliğini, $y = x - 3$ doğrusunun üst tarafı sağlar. (0, 0) noktasını eşitsizlikte deneyelim.
$0 > 0 - 3 \Rightarrow 0 > -3$
eşitsizlik sağlanır.



O halde, eşitsizliklerin birlikte sağlandığı bölge taralı bölgedir.

ÇÖZÜMLÜ TEST

1. $f(x) = x^2 - 4x - 3$

fonksiyonunun alabileceği <u>en küçük</u> değer kaçtır?

A) – 6 B) – 7 C) – 8 D) – 9 E) – 10

2. $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$

parabolünün tepe noktasının ordinatı kaçtır?

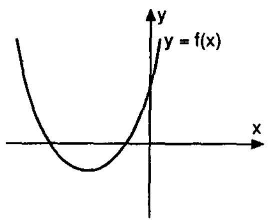
A) – 5 B) – 4 C) – 3 D) – 2 E) – 1

3. $f(x) = x^2 - 8x + 15$

parabolünün eksenleri kestiği noktalar bir üçgenin köşeleri olduğuna göre, bu üçgenin alanı kaç birimkaredir?

A) 24 B) 20 C) 15 D) 12 E) 8

4. Yandaki grafik $y = ax^2 + bx + c$ parabolüne aittir.

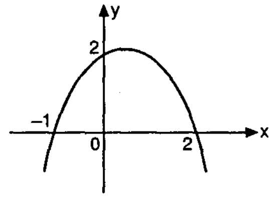


Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $b^2 - 4ac = 0$ B) $\frac{a.c}{b} > 0$ C) $\frac{c}{a} < 0$

D) $\frac{b}{2a} < 0$ E) $a + b + c < 0$

5. Şekildeki $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü için $a + b + c$ toplamı kaçtır?



A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

6. $f(x) = (m - 1)x^2 - 2mx + 4$

parabolü x eksenine teğet olduğuna göre, m kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

7. $f(x) = -x + k$

$g(x) = -x^2 + 2x + 3$

fonksiyonları birbirine teğet olduğuna göre, k kaçtır?

A) $-\frac{13}{2}$ B) $-\frac{20}{3}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{21}{4}$ E) $\frac{27}{4}$

8. $f(x) = 2x^2 + x + 5$

$g(x) = x^2 + 2x + 7$

parabollerinin kesim noktalarının apsislerinin toplamı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) – 1 E) – 2

9. $y = x^2$ parabolünün $y = -2x - 2$ doğrusuna <u>en yakın</u> noktasının ordinatı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

10. $f(x) = -2x^2 + 8mx - 2m + n - 3$

parabolü için,

I. Simetri ekseni $x - 2 = 0$ doğrusudur.
II. Alabileceği <u>en küçük</u> değer -1 dir.

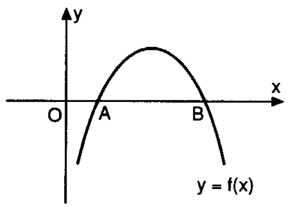
Buna göre, m + n kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 2

11. Şekildeki parabolün denklemi

$y = -x^2 + 6x + k + 5$

tir.



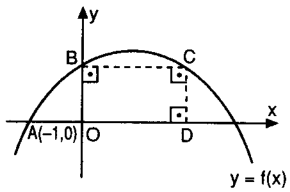
$|OB| = 5|OA|$ olduğuna göre, k kaçtır?

A) -6 B) -7 C) -8 D) -9 E) -10

12. Şekilde,

$f(x) = ax^2 - 4ax + a + 2$

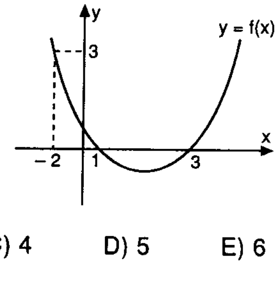
parabolünün grafiği verilmiştir.



Buna göre, OBCD dikdörtgeninin alanı kaç birimkaredir?

A) $\frac{6}{5}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{20}{3}$ D) 12 E) 15

13. Yanda $y = f(x)$ parabolünün grafiği verilmiştir.



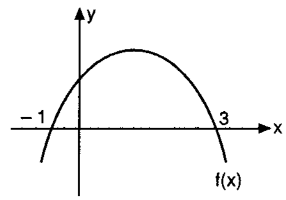
Buna göre, f(6) değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. Şekilde verilen,

$f(x) = -x^2 + bx + c$

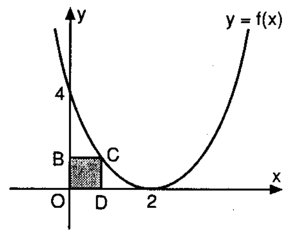
parabolüne göre, b + c toplamı kaçtır?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

15. $y = f(x)$ parabolü C noktasında OBCD karesine teğettir.

Buna göre, A(OBCD) kaç birimkaredir?



A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{9}{5}$

16. $f : A \rightarrow B$ ye örten f(x) fonksiyonu,

$f(x) = -2x^2 + 4x - 3$

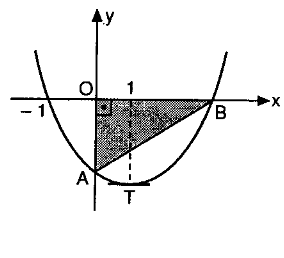
olarak veriliyor.

$A = [0, 3)$

olduğuna göre, B = f(A) görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-9, -3]$ B) $(-9, -1]$ C) $(-9, 3)$ D) $[-3, 9)$ E) $[-9, -3)$

17. Yanda grafiği verilen $y = x^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktası T dir.



Buna göre, A(AOB) kaç birimkaredir?

A) $\frac{7}{2}$ B) 4 C) $\frac{9}{2}$ D) 5 E) 9

TESTİN ÇÖZÜMLERİ

1. $f(x) = x^2 - 4x - 3$ fonksiyonunun alabileceği en küçük değer parabolün tepe noktasının ordinatıdır. Yani, $f(-\frac{b}{2a})$ dır.

$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2.1} = 2$ ve

$f(2) = 2^2 - 4.2 - 3 = 4 - 8 - 3 = -7$ dir.

Cevap: B

2. $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktasının ordinatı $\frac{4ac - b^2}{4a}$ dır. Buna göre,

$f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ parabolünün tepe noktasının ordinatı:

$$\frac{4.3.1 - (-6)^2}{4.3} = \frac{12 - 36}{12} = -2 \text{ dir.}$$

Cevap: D

3. $f(x) = x^2 - 8x + 15$ parabolü x eksenini $y = 0$ için,

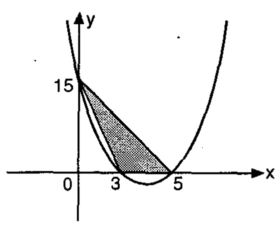
$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 5) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 3$ ve $x_2 = 5$

olduğundan (3,0) ve (5,0) noktalarında keser. Parabol y eksenini $x = 0$ için $y = 15$ te keser.

Şekildeki üçgenin alanı:

$\frac{15.(5 - 3)}{2} = 15$ tir.



Cevap: C

4. $y = ax^2 + bx + c$ parabolünün kolları yukarı doğru olduğundan $a > 0$ dır... (1)

$y = ax^2 + bx + c$ parabolü y eksenini pozitif tarafta kestiği için $c > 0$ dır... (2)

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktasının apsisi $(-\frac{b}{2a})$ negatif olduğundan,

$(-\frac{b}{2a} < 0$ ve $a > 0) \Rightarrow b > 0$ dır... (3)

(1), (2) ve (3) ten A, C, D ve E seçenekleri yanlış B seçeneği doğrudur.

Cevap: B

5. ***1. yol:***

Grafiği verilen parabolün denklemi

$f(x) = a(x - (-1)).(x - 2)$
$f(x) = a(x + 1).(x - 2)$ dir.

(0,2) noktası parabolün denklemini sağladığından,

$2 = a(0 + 1).(0 - 2) \Rightarrow a = -1$

ve $f(x) = -1.(x + 1).(x - 2)$

$= -x^2 + x + 2$ dir.

$f(x) = ax^2 + bx + c = -x^2 + x + 2$

olduğundan $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$

ve $a + b + c = -1 + 1 + 2 = 2$ dir.

2. yol:

Parabolün tepe noktasının apsisi

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}$ dir. O halde,

$f(0) = f(1)$ dir.

$f(0) = f(1) \Rightarrow 2 = a + b + c$ dir.

Cevap: E

6. $f(x) = (m-1)x^2 - 2mx + 4$ parabolü x eksenine teğet ise

$(m-1)x^2 - 2mx + 4 = 0$ denklemi için

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ olmalıdır. O halde,

$\Delta = (-2m)^2 - 4.(m-1).4$

$0 = 4m^2 - 16m + 16$

$0 = 4(m-2)^2$

$2 = m$ dir.

Cevap: D

7. f(x) ile g(x) fonksiyonları birbirine teğet olduğundan,

$-x + k = -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 3x + k - 3 = 0$

ve $\Delta = 0$ olmalıdır. Buradan,

$\Delta = (-3)^2 - 4.1.(k-3)$

$0 = 9 - 4k + 12$

$4k = 21$

$k = \dfrac{21}{4}$ tür.

Cevap: D

8. Verilenlere göre,

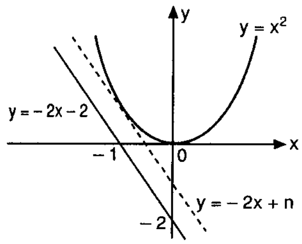
$2x^2 + x + 5 = x^2 + 2x + 7 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

denkleminin köklerinin toplamı

$\left(-\dfrac{b}{a}\right) = -\dfrac{-1}{1} = 1$ dir.

Cevap: B

9.



$y = x^2$ parabolünün $y = -2x - 2$ doğrusuna en yakın noktası $y = -2x + n$ doğrusuna teğet olduğu noktadır.

$x^2 = -2x + n \Rightarrow x^2 + 2x - n = 0$ ve

$\Delta = 0 \Rightarrow 2^2 - 4.1.(-n) = 0 \Rightarrow n = -1$ dir.

O halde, $x^2 + 2x - n = 0$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x+1)^2 = 0$

$x = -1$ dir.

$x = -1$ için $y = (-1)^2 = 1$ dir. Buna göre,

$y = x^2$ parabolünün $y = -2x - 2$ doğrusuna en yakın noktasının ordinatı 1 dir.

Cevap: A

10. Verilenlere göre simetri ekseni, $x = 2$ doğrusu olduğundan, $2 = -\dfrac{8m}{2.(-2)} \Rightarrow 8 = 8m$

$\Rightarrow m = 1$ dir.

$f(x) = -2x^2 + 8x + n - 5$ bulunur.

Parabolün alabileceği en küçük değer (tepe noktasının ordinatı) – 1 olduğundan,

$-1 = \dfrac{4.(-2).(n-5) - 8^2}{4.(-2)}$

$8 = -8.(n-5) - 8^2$

$1 = -n + 5 - 8$

$n = -4$ tür.

O halde, $m + n = 1 + (-4) = -3$ tür.

Cevap: A

11. A noktasının apsisi a, B noktasının apsisi 5a olsun.

O halde, $a+5a=-\frac{6}{-1}$

$6a=6$

$a=1$ dir.

A noktası, (1, 0) dır ve parabolün denklemini sağlar.

$0=-(1)^2+6.1+k+5$

$0=-1+6+k+5$

$k=-10$ dur.

Cevap: E

12. A (– 1, 0) noktası parabolün denklemini sağladığından

$0=a.(-1)^2-4a.(-1)+a+2$

$0=a+4a+a+2$

$a=-\frac{1}{3}$ tür.

$f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$ parabolünde, $x=0$ için,

$y=\frac{5}{3}$ olduğundan B ve C noktasının ordinatı $\frac{5}{3}$ tür. Buradan, $y=\frac{5}{3}$ yazıp C noktasının apsisini bulalım.

$y=\frac{5}{3}$ için $\frac{5}{3}=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$

$\Rightarrow 0=-\frac{1}{3}x\,(x-4)$

$\Rightarrow x_1=0$ veya $x_2=4$ tür.

O halde, C noktasının apsisi 4 tür. Buna göre, OBCD dikdörtgeninin alanı :

$4.\frac{5}{3}=\frac{20}{3}$ birimkaredir.

Cevap: C

13. Verilenlere göre, parabolün tepe noktasının apsisi, $\frac{1+3}{2}=2$ olduğundan $f(-2)=f(6)=3$ tür.

(Burada, şekilde verilen noktalardan parabolün denklemi yazılarak da aynı sonuç bulunabilir.)

Cevap: B

14. $f(x)=0$ için kökler çarpımı ve kökler toplamından sonuca gidilir.

Kökler çarpımından,

$\frac{c}{-1}=\frac{3}{-1}\Rightarrow c=3$ tür.

Kökler toplamından,

$-\frac{b}{-1}=(-1)+3\Rightarrow b=2$ dir.

O halde, $b+c=2+3=5$ tir.

Cevap: C

15. Verilenlere göre parabolün denklemi $f(x)=(x-2)^2$ dir.

D noktasının apsisi a ise ordinatı da (kare olduğundan) a olur ve parabolün denklemini sağlar.

$a=(a-2)^2\Rightarrow a=a^2-4a+4$

$\Rightarrow 0=a^2-5a+4$

$\Rightarrow a=1$ veya $a=4$ tür.

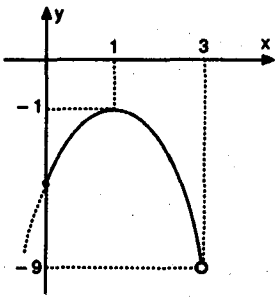
$0<a<2$ olduğundan, $a=1$ ve karenin alanı: $(a^2)=1^2=1$ birimkaredir.

Cevap: A

16. $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$ parabolünün tepe noktası;

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2.(-2)} = 1,$$

$k = f(r) = f(1) = -1$ olduğundan $T(1, -1)$ dir.
Ayrıca,
$x = 0$ için $f(0) = -3$ ve
$x = 3$ için $f(3) = -9$ olduğundan, f(x) parabolünün uç noktaları;
$(0, -3)$ ve $(3, -9)$ dur. Buna göre,



f(x) in grafiğinden de görüldüğü gibi,

$B = f(A) = (-9, -1]$ dir.

Cevap: B

17. Parabolün x eksenini kestiği noktalar x_1 ve x_2 olmak üzere, $-\frac{b}{2a} = r = \frac{x_1 + x_2}{2}$ olduğundan,

$y = x^2 + bx + c$ parabolünde, B noktasının apsisi (x_2)

$$1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow 2 = -1 + x_2$$

$$\Rightarrow x_2 = 3 \text{ ve B noktası } B(3, 0) \text{ dır.}$$

$y = 0$ için $x^2 + bx + c = 0$ denkleminin köklerinin çarpımından,

$$\frac{c}{1} = 3.(-1) \Rightarrow c = -3 \text{ bulunur.}$$

O halde, $|OA| = 3$ ve $|OB| = 3$ birim olduğundan

$$A(AOB) = \frac{1}{2}.|OA|.|OB|$$

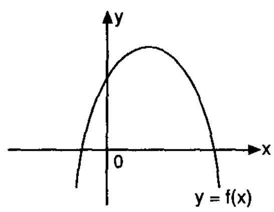
$$= \frac{1}{2}.3.3$$

$$= \frac{9}{2} \text{ birimkaredir.}$$

Cevap: C

CEVAPLI TEST

1. Yandaki şekilde, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği veriliyor.



Buna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $a > 0$ B) $a.b > 0$ C) $a.c > 0$

D) $b.c < 0$ E) $a.c < 0$

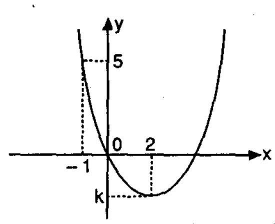
2. $f(x) = mx^2 + (2m + 1)x + 2m - 3$

parabolünün tepe noktası y ekseni üzerindedir.

Buna göre, f(x) in alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) −4 B) −3 C) 0 D) 2 E) 5

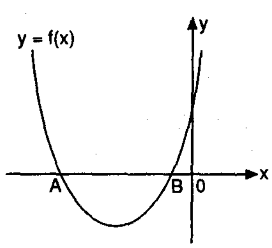
3. Yandaki şekilde, $y = f(x)$ parabolünün tepe noktası $T(2, k)$ dır.



Buna göre, f(5) kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

4. Şekilde, $f(x) = mx^2 + 6mx + 5$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$|AB| = 4$ birim

olduğuna göre, m kaçtır?

A) 3 B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{2}$

5. $f(x) = -x^2 + ax + b$ parabolünün simetri ekseni $x = -1$ doğrusudur.

f(x) in alabileceği en büyük değer 3 olduğuna göre, parabolün y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

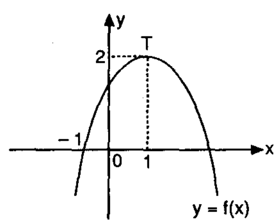
6. a ve b gerçel (reel) sayılardır.

$$x = a^2 - 6a + 8$$
$$y = -b^2 + 4b - 5$$

olduğuna göre, x in alabileceği en küçük değer ile, y nin alabileceği en büyük değerin toplamı kaçtır?

A) −5 B) −2 C) 1 D) 3 E) 6

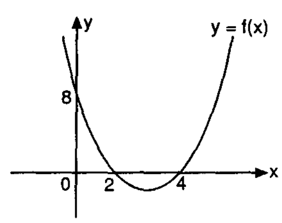
7. Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Parabolün tepe noktası T(1 , 2) olduğuna göre, f(− 3) kaçtır?

A) −2 B) −3 C) −4 D) −5 E) −6

8. Şekildeki parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?



A) $y = 3x^2 - 4x + 5$ B) $y = x^2 - 6x + 8$

C) $y = x^2 - 8x + 6$ D) $y = 2x^2 - 4x + 8$

E) $y = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 3x + 4)$

9. $n \neq 0$ olmak üzere,

$$f(x) = m.x^2 - 2mnx + 2n^2$$

parabolü x eksenine teğet olduğuna göre, m kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

10. $[-1, 4]$ aralığında tanımlı,

$$f(x) = 9 - x^2$$

fonksiyonunun en küçük değeri ile en büyük değerinin toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

11. a pozitif bir gerçel (reel) sayı olmak üzere, tabanı $(4 - a)$ cm ve bu tabana ait yüksekliği $(a - 1)$ cm olan bir üçgenin alanı en çok kaç cm^2 olabilir?

A) $\frac{9}{8}$ B) $\frac{9}{4}$ C) 4 D) 2 E) 1

12. $y^2 = 4x$ parabolü ile $y = x + 1$ doğrusunun teğet oldukları noktanın parabolün tepe noktasına olan uzaklığı kaçtır?

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{2}$

13.

$$y = ax^2 - bx + 2$$
$$y = bx^2 - ax + 1$$

parabollerinin kesiştiği noktalar A ve B dir.

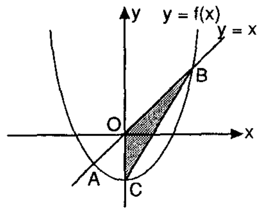
Buna göre, [AB] nin orta noktasının apsisi kaçtır?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

14. $y = x^2 - ax - 1$ parabolü $y = ax - 5$ doğrusuna $x = 2$ de teğet olduğuna göre, parabolün en küçük değeri kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

15. Şekilde $f(x) = x^2 - 2$ parabolü ile $y = x$ doğrusu A ve B gibi iki noktada kesişmiştir.



Buna göre, OBC üçgeninin alanı kaç br^2 dir?

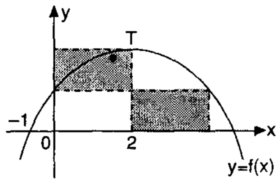
A) 8 B) 6 C) 4 D) 2 E) 1

16. A(3 , 0) , B(4 , − 6) , C(− 2 , 0)

noktalarından geçen $y = f(x)$ parabolünün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x^2 - 3x + 2$
B) $y = (2x - 1)^2$
C) $y = x^2 + 3x + 4$
D) $y = -x^2 + x + 6$
E) $y = 2x^2 + x - 1$

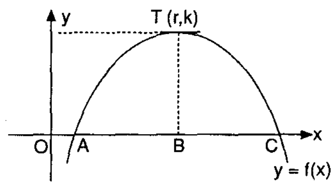
17. $f(x) = ax^2 + bx + 5$ parabolünün tepe noktası T dir.



Buna göre, taralı alanlar toplamı kaçtır?

A) 18 B) $\frac{56}{3}$ C) 20 D) $\frac{45}{2}$ E) 24

18.



Şekildeki, $f(x) = -x^2 + 6x + m - 20$ parabolünün tepe noktasının apsisi, B noktasının apsisidir.

$$2.|OA| = |BC|$$

olduğuna göre, m kaçtır?

A) 15 B) 10 C) 5 D) -5 E) -10

CEVAP ANAHTARI

1-E	2-A	3-C	4-D	5-E	6-B	7-E	8-B	9-B
10-D	11-A	12-B	13-B	14-B	15-D	16-D	17-A	18-A

25. BÖLÜM EŞİTSİZLİKLER

$$f(x) > 0, \quad f(x) \geq 0, \quad f(x) < 0 \quad \text{veya} \quad f(x) \leq 0$$

şeklindeki ifadelere **eşitsizlik** denir.

Herhangi bir x değişkeninin alabileceği sayı değerlerinin kümesine x in **tanım aralığı** veya **çözüm kümesi** denir.

Bir eşitsizlik çözümü için aşağıda verilen genel yol izlenir.

1) Eşitsizlikte bulunan her çarpanın kökleri bulunur.

2) Bulunan kökler eşitsizlik tablosunda (sayı doğrusu üzerinde) küçükten büyüğe doğru sıralanır.

3) Eşitsizliğin işareti tespit edilir. Eşitsizliğin işareti; her çarpandaki en büyük dereceli değişkenin katsayılarının işaretlerinin çarpılması ile bulunur.

4) Eşitsizliğin işareti en büyük kökün sağından başlanarak yazılır ve sola doğru her köke geldikçe işaret değiştirilir.

5) Çift katlı köklerde işaret değiştirilmez. (Bir eşitsizlikte çift sayıda aynı kökten varsa bu köklere çift katlı kök denir.)

6) $f(x) > 0$ veya $f(x) \geq 0$ ise eşitsizliğin pozitif olduğu bölgeler çözüm kümesi olarak alınır.

$f(x) < 0$ veya $f(x) \leq 0$ ise eşitsizliğin negatif olduğu bölgeler çözüm kümesi olarak alınır.

Örnek:

$$f(x) = (x + 2) \cdot (x - 3) < 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Eşitsizlik çözümü için verilen yolu sırasıyla uygulayalım.

1) Her çarpanın köklerini bulalım.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ dir.}$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ tür.}$$

2) Bulduğumuz kökleri sayı doğrusu üzerinde sıralayalım.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
f(x)			0		0		

3) Eşitsizliğin işaretini tespit edelim.

$(x + 2)$ de en büyük dereceli terimin (x) işareti $(+)$

$(x - 3)$ de en büyük dereceli terimin (x) işareti $(+)$ dır.

Eşitsizliğin işareti ise $(+) \cdot (+) = +$ olur.

4) Eşitsizliğin işaretini eşitsizlik tablosunda en büyük kökün sağından başlayarak yazalım.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
		+	0	−	0	+	

5) Verilen eşitsizlikte çift katlı kök yoktur.

6) Eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

$$f(x) < 0$$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

$$-2 < x < 3$$

Çözüm kümesi : $(-2, 3)$ olur.

Örnek:

$$f(x) = (x^2 - 4) \cdot (9 - 3x) \geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Eşitsizlik çözümü için verilen yolu uygulayalım.

1) Her çarpanın köklerini bulalım.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ veya } x = -2 \text{ dir.}$$
$$9 - 3x = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ tür.}$$

2) Bulduğumuz kökleri sayı doğrusunda sıralayalım.

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
f(x)			0		0		0		

3) Eşitsizliğin işaretini tespit edelim.
$(x^2 - 4)$ te en büyük dereceli terimin (x^2) işareti (+)
$(9 - 3x)$ te en büyük dereceli terimin $(-3x)$ işareti (–)
dir. Eşitsizliğin işareti ise (+) . (–) = – olur.

4) Eşitsizliğin işaretini eşitsizlik tablosundan en büyük kökün sağından başlayarak yazalım.

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	0	–	

5) Verilen eşitsizlikte çift katlı kök yoktur.

6) Eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

$f(x) \geq 0$

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	0	–	

$\underbrace{\quad}_{-\infty < x \leq 2}$ $\underbrace{\quad}_{2 \leq x \leq 3}$

Çözüm kümesi : $(-\infty, -2] \cup [2, 3]$ olur.

Uyarı:

$f(x) \geq 0$ veya $f(x) \leq 0$

şeklinde verilen eşitsizliklerde eşitsizliğin pay kısmının kökleri olan değerler çözüm kümesine dahil edilir, paydanın kökleri kesinlikle dahil edilmez.

$f(x) > 0$ veya $f(x) < 0$

şeklindeki eşitsizliklerde ise hiç bir kök çözüm kümesine dahil edilemez.

Örnek:

$$f(x) = (x^2 - 6x + 9) . (2x - 8) \geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Aynı çözüm yolunu uygulayalım.

1) Her çarpanın köklerini bulalım.

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$$
$$\Rightarrow (x-3)\ (x-3) = 0$$
$$\Rightarrow x = 3 \quad \text{veya} \quad x = 3$$
$$\Rightarrow x = 3 \text{ te çift katlı kök vardır.}$$

$2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$ tür.

2) Bulduğumuz kökleri sayı doğrusu üzerinde sıralayalım.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
f(x)			0		0		

Çift katlı kök

3) Eşitsizliğin işaretini bulalım.
$(x^2 - 6x + 9)$ da en büyük dereceli terimin (x^2) işareti (+)
$(2x - 8)$ de en büyük dereceli terimin $(2x)$ işareti (+)
eşitsizliğin işareti ise (+) . (+) = + olur.

4) Eşitsizliğin işaretini eşitsizlik tablosunda yazalım.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
f(x)		–	0	–	0	+	

5) Verilen eşitsizlikte $x = 3$ de çift katlı kök olduğundan işaret değiştirmez.

6) Eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

$f(x) \geq 0$

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
f(x)		–	0	–	0	+	

$\underbrace{\quad}_{x=3}$ $\underbrace{\quad}_{4 \leq x < \infty}$

Çözüm kümesi : $\{3\} \cup [4, \infty)$

Örnek:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} < 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -2$
$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = 3$
$x = 2$ de çift katlı kök vardır.
$(x^2 - 4)$ te en büyük dereceli terimin (x^2) işareti (+)
$(x^2 - 5x + 6)$ da en büyük dereceli terimin (x^2) işareti (+)
f(x) in işareti ise (+) . (+) = + olur.
$x = 2$ de çift katlı kök olduğundan işaret değiştirilmeden tablo şu şekilde oluşturulur.

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
f(x)		+	0	–		–		+	

Çift katlı kök

$\underbrace{\quad}_{-2 < x < 2}$ $\underbrace{\quad}_{2 < x < 3}$

Çözüm kümesi : $(-2, 2) \cup (2, 3) = (-2, 3) - \{2\}$ olur.

Örnek:

$$f(x) = \frac{(6-3x).(8-x)}{2x.(x^2+1)} \geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$6 - 3x = 0 \Rightarrow x = 2$

$8 - x = 0 \Rightarrow x = 8$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ reel kök yoktur.

$6 - 3x$ te en büyük dereceli terimin $(-3x)$ işareti $(-)$

$8 - x$ te en büyük dereceli terimin $(-x)$ işareti $(-)$

$2x$ te en büyük dereceli terimin $(2x)$ işareti $(+)$

$x^2 + 1$ te en büyük dereceli terimin (x^2) işareti $(+)$

Eşitsizliğin işareti $(-).(-).(+).(+) = +$ olur.

eşitsizlik tablosunu yapalım.

x	$-\infty$	0	2	8	$+\infty$
f(x)	$-$	$+$	$-$	$+$	

$\underbrace{}_{0 < x \leq 2}$ $\quad$ $\underbrace{}_{8 \leq x < \infty}$

Çözüm kümesi : $(0, 2] \cup [8, \infty)$ olur.

Örnek:

$$(x-2)(x-5) \leq (x-2)$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Bütün çarpanları eşitsizliğin bir tarafına toplayalım.

$(x-2).(x-5) - (x-2) \leq 0$

$(x-2).(x-5-1) \leq 0$

$(x-2).(x-6) \leq 0$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ve $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$ dır.

Eşitsizliğin işareti $(+).(+) = +$ olur.

Eşitsizlik tablosunu düzenleyelim.

x	$-\infty$	2	6	$+\infty$
	$+$	$-$	$+$	

$\underbrace{}_{2 \leq x \leq 6}$

Çözüm kümesi : $[2, 6]$ olur.

Örnek:

$$\frac{1}{2x-2} \geq \frac{1}{2x-9}$$

eşitsizliğini sağlayan x tamsayılarını bulalım.

Çözüm:

Eşitsizliğini düzenleyelim.

$$\frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2x-9} \geq 0$$

$$\frac{2x-9-(2x-2)}{(2x-2).(2x-9)} \geq 0$$

$$\frac{-7}{(2x-2).(2x-9)} \geq 0$$

$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$2x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$

Eşitsizliğin işareti $(-).(+).(+) = -$ olur.

Eşitsizlik tablosunu düzenleyelim.

x	$-\infty$	1	9/2	$+\infty$
	$-$	$+$	$-$	

$\underbrace{}_{2 < x < \frac{9}{2}}$

Çözüm kümesi : $\left(1, \frac{9}{2}\right)$ olur.

Çözüm kümesindeki tamsayılar ise 2, 3, 4 tür.

Uyarı:

Eşitsizlik çözümü yapılırken değişkenlere ait çarpanlar sadeleştirilmez ve içler dışlar çarpımı yapılmaz.

Örnek:

$$x^3 < 16 \, . \, x$$

eşitsizliğinin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm:

$x^3 < 16 \, . \, x$

$x^3 - 16 \, . \, x < 0$

$x(x^2 - 16) < 0$

$x(x - 4)\,(x + 4) < 0$

Eşitsizliğin kökleri $x = 0,\ x = 4,\ x = -4$ tür.
Eşitsizliğin işareti $(+) \, . \, (+) \, . \, (+) = +$ olur.
Eşitsizlik tablosunu yapalım.

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$-\infty < x < -4$ $0 < x < 4$

Çözüm aralığı : $(-\infty, -4) \cup (0, 4)$ olur.

Örnek:

$$\frac{2^x . (1 - x)}{x^2 - 16} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x pozitif tamsayısı olduğunu bulalım.

Çözüm:

x in bütün reel sayı değerleri için 2^x ifadesi daima pozitif olduğundan eşitsizlik tablosunda 2^x çarpanını almayabiliriz.

$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$ dir.

$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = 4,\ x = -4$ tür.

Eşitsizliğin işareti $(-) \, . \, (+) = -$ olur.

x	$-\infty$		-4		1		4		$+\infty$
		$+$		$-$	0	$+$		$-$	

$-\infty < x < -4$ $1 \leq x < 4$

Çözüm kümesi : $(-\infty, -4) \cup [1, 4)$ olur.

Çözüm kümesindeki pozitif tamsayılar ise 1,2,3 olmak üzere 3 tanedir.

Örnek:

$$\frac{|x - 9| \, . \, (x^3 - 1)}{4x - x^2} \geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm:

x in bütün reel sayı değerleri için $|x - 9| \geq 0$ olduğundan $|x - 9|$ ifadesini eşitsizlik tablosunda ne işaret ne de kök olarak almayabiliriz.
Ancak, $|x - 9| = 0 \Rightarrow x = 9$ değeri eşitsizliği sağlayacağından çözüm kümesinde olmalıdır.

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ dir.

$4x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = 4$ tür.

Eşitsizliğin işareti $(+) \, . \, (-) = -$ olur.

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
		$+$		$-$	0	$+$		$-$	

$-\infty < x < 0$ $1 \leq x < 4$

Çözüm kümesi : $(-\infty, 0) \cup [1, 4) \cup \{9\}$

Örnek:

$$\frac{5^{-x} . (x^2 - 25)}{|2x - x^2|} < 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tamsayısı olduğunu bulalım.

Çözüm:

x in bütün reel sayı değerleri için $5^{-x} > 0$ ve $|2x - x^2| \geq 0$ olduğundan eşitsizlik tablosunda işaretlerini ve köklerini almayabiliriz. Ancak,
$|2x - x^2| = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = 2$
değerleri eşitsizliği sağlamayacağından çözüm kümesinde olmamalıdır.

$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x = 5$ veya $x = -5$ tir.

Eşitsizliğin işareti $+$ dır.

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$-5 < x < 5$

Çözüm kümesi : $(-5, 5) - \{0, 2\}$
Çözüm kümesinde bulunan tamsayılar ise
$-4, -3, -2, -1, 1, 3, 4$ olup 7 tanedir.

Örnek:

$$\frac{(2x+1)^3-(x-1)^3}{5-x} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan x doğal sayı değerlerinin toplamını bulalım.

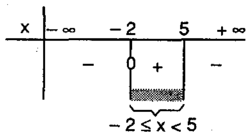
Çözüm:

$(2x+1)^3-(x-1)^3=0 \Rightarrow (2x+1)^3=(x-1)^3$

$2x+1=x-1$

$x=-2$ dir.

$5-x=0 \Rightarrow x=5$ tir.



Çözüm kümesi : $[-2, 5)$ olur.
Çözüm kümesindeki doğal sayılar,
0 , 1 , 2 , 3 , 4 olup toplamları 10 dur.

Örnek:

$$\frac{(|x|-4).(x-1)^3}{6x} < 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm:

$|x|-4=0 \Rightarrow |x|=4$

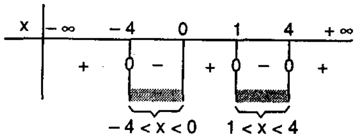
$\Rightarrow x=4, x=-4$

$(x-1)^3=0 \Rightarrow (x-1)(x-1)(x-1)=0$

$x=1, x=1, x=1$

(çift katlı kök değil)

$6x=0 \Rightarrow x=0$ olur.



Çözüm kümesi : $(-4, 0) \cup (1, 4)$ olur.

Örnek:

$a^2 < a$ ve $b < |b|$ olmak üzere,

$$\frac{(4x-a).bx}{ax-1} \leq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm:

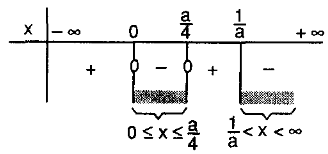
$a^2 < a \Rightarrow 0 < a < 1, \quad b < |b| \Rightarrow b < 0$ dır.

$4x-a=0 \Rightarrow x=\frac{a}{4}$

$bx=0 \Rightarrow x=0$

$ax-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{a}$

Eşitsizliğin işareti $(+).(-).(+)=-$ olur.



Çözüm kümesi : $\left[0, \frac{a}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{a}, \infty\right)$ olur.

Örnek:

$a < b < c < 0$ olmak üzere,

$$\frac{(x-a)^{44}.(x+c)^{11}}{(b-x)^{33}} \geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

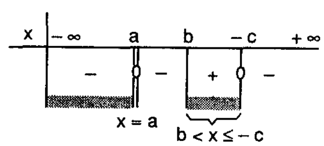
Çözüm:

$(x-a)^{44}=0 \Rightarrow x=a$ (Çift katlı kök)

$(x+c)^{11}=0 \Rightarrow x=-c$ (Çift katlı kök değil)

$(b-x)^{33}=0 \Rightarrow x=b$ (Çift katlı kök değil)

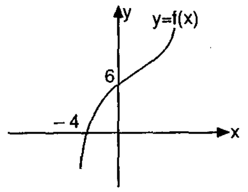
Eşitsizliğin işareti $(+).(+).(-)=-$ olur.



Çözüm kümesi : $\{a\} \cup (b, -c]$ olur.

Örnek:

Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre,
$x.f(x + 2) < 0$
eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tamsayısı olduğunu bulalım.



Çözüm:

$x = 0$ ve $(f(x + 2) = 0$ ise $x = -6)$ dır.
$xf(x + 2)$ ifadesinde 0 (sıfır) dan büyük bir değer yazılırsa (örneğin $x = 1$)
$1.f(1 + 2) = f(3) > 0$ olduğundan eşitsizliğin işareti (+) dır.

x	$-\infty$	-6		0	$+\infty$
f(x)	+	0	–	0	+

Çözüm kümesi : $(-6, 0)$ dır.
Çözüm kümesindeki tamsayılar ise $-1, -2, -3, -4, -5$ olduğundan 5 tanedir.

Örnek:

$$\frac{21}{x-3} \leq 9 - x$$

eşitsizliğini sağlayan x doğal sayılarının toplamını bulalım.

Çözüm:

$$\frac{21}{x-3} + x - 9 \leq 0$$

$$\frac{21 + (x-9)(x-3)}{x-3} \leq 0$$

$$\frac{21 + x^2 - 12x + 27}{x-3} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 12x + 48}{x-3} \leq 0$$

$x^2 - 12x + 48 = 0$ denkleminin, $\Delta < 0$ olduğundan reel kökü yoktur.

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ tür.

Eşitsizliğin işareti $(+) . (+) = +$ olur.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f(x)	–		+

Çözüm kümesi : $(-\infty, 3)$ olur. Çözüm kümesinde bulunan doğal sayılar 0,1,2 olduğundan toplamları 3 tür.

Örnek:

Karesi ile 4 katının toplamı en fazla 4 olan kaç tamsayı olduğunu bulalım.

Çözüm:

Bilinmeyen x olsun.

$$x^2 + 4x \leq 4$$
$$x^2 + 4x - 4 \leq 0$$
$$x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 . (-4) . 1$$
$$\Delta = 32$$
$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{32}}{2 . 1} = -2 + 2\sqrt{2}$$
$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{32}}{2 . 1} = -2 - 2\sqrt{2}$$

Eşitsizliğinin işareti + dır.

x	$-\infty$	$-2-2\sqrt{2}$		$-2+2\sqrt{2}$	$+\infty$
f(x)	+	0	–	0	+

Çözüm kümesi : $[-2-2\sqrt{2}, \ -2+2\sqrt{2}]$ dir.

Çözüm kümesindeki tamsayılar ise $-4, -3, -2, -1, 0$ olduğundan 5 tanedir.

EŞİTSİZLİK SİSTEMİ

Birden fazla eşitsizliğin oluşturduğu sisteme eşitsizlik sistemi denir.
Sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimine ise eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi denir.

Örnek:

$$x - 2 > 0$$
$$x^2 - 9 < 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir.
$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x = 3$ veya $x = -3)$ tür.

x	$-\infty$	-3		2		3	$+\infty$
$x - 2 > 0$	–		–	0	+		+
$x^2 - 9 < 0$	+	0	–		–	0	+
Kesişim					Çözüm		

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, $2 < x < 3$ şartını sağlayan reel sayılardır. Çünkü tabloda da görüldüğü gibi,

$x - 2 > 0$ eşitsizliğinin $Ç_1 = (2, \infty)$
$x^2 - 9 < 0$ eşitsizliğinin $Ç_2 = (-3, 3)$

olduğundan eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, bu iki aralığın kesişim kümesidir.
Yani, $Ç = Ç_1 \cap Ç_2 = (2, 3)$ tür.

Örnek:

$$0 < x^2 - 4 < 12$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$0 < x^2 - 4 < 12 \Rightarrow 0 < x^2 - 4 \ldots (1)$
$x^2 - 4 < 12$
$x^2 - 16 < 0 \ldots (2)$

istenilen aralık, (1) eşitsizliğinin çözüm kümesi ile (2) eşitsizliğinin çözüm kümesinin kesişimidir.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ veya $x = -2$ dir.
$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = 4$ veya $x = -4$ tür.

x	$-\infty$ … -4	-4 … -2	-2 … 2	2 … 4	4 … $+\infty$
$x^2 - 4 > 0$	+	+	−	+	+
$x^2 - 16 < 0$	+	−	−	−	+
Kesişim		Çözüm		Çözüm	

$Ç = (-4, -2) \cup (2, 4)$ tür.

Örnek:

$$\frac{x^2 + 4}{x + 3} > 0$$

$$\frac{4}{3 - x} > 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi eşitsizliklerin ayrı ayrı çözüm kümelerinin kesişimidir.

$x^2 + 4 > 0$ olduğundan, $\frac{x^2 + 4}{x + 3} > 0$ olması için

$x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$ olmalıdır. ... (1)

$\frac{4}{3 - x} > 0 \Rightarrow 3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$ tür ... (2)

(1) ve (2) nin kesişim kümesi, $-3 < x < 3$ aralığıdır.

Örnek:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x - 2}}{16 - x^2} \geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\sqrt{x - 2}$ ifadesinin reel sayılarda tanımlı olabilmesi için $x - 2 \geq 0$ olmalıdır.

$x \geq 2$ için $\sqrt{x - 2} \geq 0$ dır. Bu durumda $f(x) \geq 0$ olabilmesi için $16 - x^2 > 0$ olması gerekir.
$16 - x^2 = 0 \Rightarrow x = -4$ veya $x = 4$ tür.

x	$-\infty$ … -4	-4 … 4	4 … $+\infty$
$16 - x^2 > 0$	−	+	−
		çözüm	

$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \ldots (1)$
$16 - x^2 > 0 \Rightarrow -4 < x < 4 \ldots (2)$

(1) ve (2) nin kesişim kümesi $2 \leq x < 4$ aralığıdır.

Not:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklindeki ikinci dereceden fonksiyonların bütün x reel sayı değerleri için;
1) Daima pozitif olabilmesi için $a > 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır.
2) Daima negatif olabilmesi için $a < 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır.

Örnek:

$$f(x) = (m-2)\,x^2 - 4x - 2$$

fonksiyonu bütün x reel sayı değerleri için daima negatif olduğuna göre, m nin tanım aralığını bulalım.

Çözüm:

Her $x \in R$ için $f(x) < 0$ olabilmesi için,
$a < 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır.
$m - 2 < 0 \Rightarrow m < 2$ .... (1)
$\Delta < 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4.(m-2).(-2) < 0$
$\Rightarrow 16 + 8.(m-2) < 0$
$\Rightarrow m < 0$ .... (2)

(1) ve (2) nin kesişiminden, $m < 0$ olarak bulunur.

Örnek:

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 2n$$

fonksiyonu x in bütün reel sayı değerleri için daima 4 ten büyük olduğuna göre, n değerlerinin aralığını bulalım.

Çözüm:

Her $x \in R$ için $f(x) > 4$ ise $f(x) - 4 > 0$ dır.
Yani, $3x^2 - 4x + 2n - 4 > 0 \Leftrightarrow (a = 3 > 0$ ve $\Delta < 0)$ dır.
$\Delta = (-4)^2 - 4.3.(2n-4) < 0$
$16 - 24n + 48 < 0$
$64 < 24n$
$\frac{8}{3} < n$ olur.

İkinci Dereceden Denklemin Köklerinin İşaretinin İncelenmesi

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin reel kökleri x_1, x_2 ve $x_1 < x_2$ olsun.

1) $x_1.x_2 = \frac{c}{a} < 0$ ise kökler ters işaretlidir.

Yani, $x_1 < 0 < x_2$ dir.

Bu durumda;

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ ise $|x_1| < |x_2|$

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ ise $|x_1| > |x_2|$

c) $x_1 + x_2 = 0$ ise $|x_1| = |x_2|$ dir.

2) $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ olmak üzere,

$x_1.x_2 = \frac{c}{a} > 0$ ise kökler aynı işaretlidir.

Bu durumda;

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ ise $0 < x_1 < x_2$ olup köklerin her ikisi de pozitiftir.

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ ise $x_1 < x_2 < 0$ olup köklerin her ikisi de negatiftir.

Örnek:

$$(2-m).x^2 + (m-5).x + 4 = 0$$

denkleminin reel kökleri x_1 ve x_2 dir. Denklemin kökleri arasında $x_1 < 0 < x_2$ ve $x_2 < |x_1|$ bağıntıları olduğuna göre, m değerlerinin aralığını bulalım.

Çözüm:

$$x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow x_1.x_2 = \frac{4}{2-m} < 0 \text{ .... (1)}$$

$$x_2 < |x_1| \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{5-m}{2-m} < 0 \text{ .... (2)}$$

(1) ve (2) yi ortak çözelim.

m	$-\infty$	2	5	$+\infty$
(1)	+	−	−	
(2)	+	−	0 +	
Kesişim				

Çözüm

O halde, m nin çözüm kümesi, (2, 5) aralığı olarak bulunur.

Örnek:

$$(a-2)\,x^2-(a-2)\,x+2=0$$

denkleminin pozitif farklı iki reel kökü olduğuna göre, a değerlerinin aralığını bulalım.

Çözüm:

Denkleminin pozitif farklı iki reel kökünün olabilmesi için,

$\Delta > 0$ .... (1)

$x_1 \,.\, x_2 > 0$ .... (2)

$x_1 + x_2 > 0$ .... (3)

şartlarının üçünün de sağlanması gerekir.

$(a-2)^2-4.(a-2).2>0$

$(a-2)\,(a-2-8)>0$

$(a-2)\,.\,(a-10)>0$ .... (1)

$$x_1.x_2=\frac{2}{a-2}>0 \;....\;(2)$$

$$x_1+x_2=\frac{a-2}{a-2}=1>0 \;....\;(3) \quad (a\neq 2)$$

(1) , (2) ve (3) eşitsizlikleri ortak çözülürse

a	$-\infty$ — 2	2 — 10	10 — $+\infty$
(1)	+	−	+
(2)	−	+	+
Kesişim			Çözüm

O halde, a değerlerinin aralığı $(10\,,\infty)$ olur.

Örnek:

$$(a-3)\,x^2+4x+a-5=0$$

denkleminin ters işaretli iki reel kökü olduğuna göre, a değerlerinin aralığını bulalım.

Çözüm:

Denklemin ters işaretli iki reel kökünün olabilmesi için $x_1.x_2<0$ olmalıdır.

$\frac{a-5}{a-3}<0$ eşitsizliğini sağlayan a değerlerinin aralığını bulalım.

a	$-\infty$ — 3	3 — 5	5 — $+\infty$
	+	−	+

Ç = (3, 5) olur.

ÇÖZÜMLÜ TEST

1. $$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}>2$$

eşitsizliğinin çözüm kümelerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 0)$ B) $(0, 2)$ C) $(-1, 1)$ D) $(0, \infty)$ E) $(1, \infty)$

2. $$\frac{x^2}{x-4}<6$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x doğal sayısı vardır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

3. $a<-1$ olmak üzere,

$$\frac{(x^2-a)(ax-1)}{(x-a)}>0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(a, \frac{1}{a})$ B) $(a, -a)$ C) $(a, 0)$ D) (a, ∞) E) $(\frac{1}{a}, \infty)$

4. Karesi ile 2 katı arasındaki fark en çok 6 olan kaç tane tamsayı vardır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

5. $$\frac{(2x-1)^2-(x+1)^2}{x^2-5x+6}\le 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, 3)$ B) $[2, 3)$ C) $(3, \infty)$ D) $(0, 2)\cup(2, 3)$ E) $(0, 2)\cup(2, \infty)$

6. $$\frac{(x-1).(5-x)^4}{x^3+2x^2}\le 0$$

eşitsizliğini sağlayan x tamsayıları kaç tanedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7. a pozitif tamsayıdır.

$$\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\ge\frac{x+a}{a}$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-a, a]$ B) $(0, a]$ C) $(-\infty, -a)$ D) $[-a, 0)$ E) $[a, \infty)$

8. $$(x-2)(x-3)(x-6)\le(x-2)(x-3)$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x doğal sayısı vardır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

9. $$x^3-2x^2-x+2>0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1, 1)\cup(2, \infty)$ B) $(0, \infty)$ C) $(-\infty, 1)\cup(1, 2)$ D) $(1, 2)$ E) $(-1, 2)$

10. $$\frac{|x-4|}{9-x^2}\ge 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı tamsayı vardır?

A) 5 B) 6 C) 7 C) 8 D) 9

11. $$\frac{x^2-4}{|x-2|+2} < 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0\ ,\ \infty)$ B) $(0\ ,\ 2)$ C) $(-2\ ,\ 2)$ D) $(-3\ ,\ 0)$ E) $(-\infty\ ,\ 0)$

12. $$0 < x^2-6x < 27$$

eşitsizliğini sağlayan x tamsayıları toplamı kaçtır?

A) 11 B) 12 C) 13 C) 14 D) 15

13. $$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1} < 0$$

$$\frac{x}{x-2} > 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0\ ,\ 1)$ B) $(-1\ ,\ 1)$ C) $(-1\ ,\ \infty)$ D) $(-\infty\ ,\ 1)$ E) $(-1\ ,\ 0)$

14. $$x-\frac{1}{x^{2000}} \le 0$$

$$1-\frac{1}{x^{2000}} \le 0$$

eşitsizlik sisteminin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-1\ ,\ 1]$ B) $[-1\ ,\ 0) \cup (0\ ,\ 1]$ C) $(0\ ,\ 1]$ D) $(0\ ,\ \infty)$ E) $(0\ ,\ \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}\ ,\ 2)$

15. $$|x^2-2x-8| < \sqrt{x^2-8x+16}$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

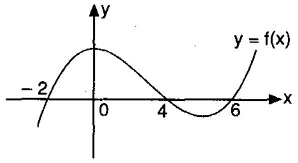
A) $(2\ ,\ 5)$ B) $(-\infty\ ,\ -3)$ C) $(-1\ ,\ \infty)$ D) $(-3\ ,\ -1)$ E) $(-5\ ,\ -2)$

16. $$\frac{\sqrt{x-4}}{36-x^2} \ge 0$$

eşitsizliğini sağlayan x tamsayılarının toplamı kaçtır?

A) 14 B) 12 C) 10 D) 9 E) 6

17. Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$(x-6).f(x) \le 0$

eşitsizliğini sağlayan x tamsayıları kaç tanedir?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

18. $$(a-2).x^2-2.x+a-5=0$$

denkleminin ters işaretli iki reel kökü olduğuna göre, a nın alabileceği değerlerin en geniş aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1\ ,\ 4)$ B) $(2\ ,\ 6)$ C) $(2\ ,\ 5)$ D) $(5\ ,\ \infty)$ E) $(1\ ,\ 6)$

19. $$x^2-(2m-2).x-1+m=0$$

denkleminin reel köklerinin olmaması için m nin alabileceği değerlerin en geniş aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0\ ,\ 3)$ B) $(1\ ,\ 4)$ C) $(2\ ,\ 3)$ D) $(2\ ,\ 4)$ E) $(1\ ,\ 2)$

20. $$x^2-(k+3).x+k=0$$

denkleminin kökleri arasında;

$$x_1 < 0 < x_2 \quad \text{ve} \quad |x_1| > x_2$$

bağıntıları olduğuna göre, k aşağıdaki aralıklardan hangisindedir?

A) $(-\infty\ ,\ -3)$ B) $(-2\ ,\ \infty)$ C) $(-3\ ,\ -2)$ D) $(-3\ ,\ \infty)$ E) $(-3\ ,\ \infty)$

TESTİN ÇÖZÜMLERİ

1. $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}>2 \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{2}{x}-2>0$

$$\frac{x^2+4-4x}{2x}>0$$

$$\frac{(x-2)^2}{2x}>0$$

$(x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$ dir. (Çift katlı kök)
$2x=0 \Rightarrow x=0$
Eşitsizliğin işareti (+) dır.

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
	$-$		$+$		$+$	

Ç = (0 , 2) ∪ (2 , ∞) olduğundan çözüm aralıklarından biri olan (0,2) aralığı B şıkkında verilmiştir.

Cevap: B

2. $\frac{x^2}{x-4}<6 \Rightarrow \frac{x^2}{x-4}-6<0$

$$\Rightarrow \frac{x^2-6x+24}{x-4}<0$$

$x^2-6x+24=0$ denklemi için $\Delta<0$ olduğundan reel kökü yoktur.

$x-4=0 \Rightarrow x=4$ tür.
Eşitsizliğin işareti (+) olduğundan,

x	$-\infty$		4		$+\infty$
		$-$		$+$	

Ç = $(-\infty, 4)$ aralığındaki doğal sayılar 0 , 1 , 2 , 3 olup 4 tanedir.

Cevap: C

3. $$\frac{(x^2-a).(ax-1)}{x-a}>0$$

$x^2-a=0 \Rightarrow x^2=a \Rightarrow$ reel kök yoktur.

$ax-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{a}$ dır.

$x-a=0 \Rightarrow x=a$ dır.

$a<-1$ olduğundan $a<\frac{1}{a}$ olur.

Eşitsizliğin işareti (–) dir.

x	$-\infty$		a		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
		$-$		$+$		$-$	

$Ç=(a,\frac{1}{a})$ olur.

Cevap: A

4. Aradığımız sayıları x ile gösterelim.

$x^2-2x \le 6 \Rightarrow x^2-2x-6 \le 0$
$x^2-2x-6=0 \Rightarrow x_1=1+\sqrt{7}$
$x_2=1-\sqrt{7}$

Eşitsizliğin işareti (+) dır.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{7}$		$1+\sqrt{7}$		$+\infty$
		$+$		$-$		$+$	

$Ç=[1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}]$ aralığındaki tamsayılar ise –1 , 0 , 1 , 2 , 3 olup 5 tanedir.

Cevap: D

5. $$\frac{(2x-1)^2-(x+1)^2}{x^2-5x+6} \le 0$$

$(2x-1)^2-(x+1)^2 = (2x-1-x-1).(2x-1+x+1)$
$= (x-2).3x$ olduğundan,
$(x-2).3x = 0 \Rightarrow (x=0$ veya $x=2)$ dir.

$x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0$
$x=2$ veya $x=3$ tür.

$x=2$ de çift katlı kök vardır.

Eşitsizliğin işareti (+) dır.

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
	+	−	−	+	

Ç = (0 , 2) ∪ (2 , 3) olur.

Cevap: D

7. $$\frac{x}{a}-\frac{a}{x} \ge \frac{x+a}{a} \Rightarrow \frac{x}{a}-\frac{a}{x}-\frac{x+a}{a} \ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-x-a}{a}-\frac{a}{x} \ge 0$$

$$\Rightarrow -1-\frac{a}{x} \ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x-a}{x} \ge 0$$

$-x-a=0 \Rightarrow x=-a$
ve $x=0$ dır.

Eşitsizliğin işareti (−) dir.

x	$-\infty$	$-a$	0	$+\infty$
	−	+	−	

Ç = [− a , 0) olur.

Cevap: D

6. $$\frac{(x-1).(5-x)^4}{x^3+2x^2} \le 0$$

$x-1 = 0 \Rightarrow x=1$ dir.
$(5-x)^4=0 \Rightarrow x=5$ (çift katlı kök)
$x^3+2x^2=0 \Rightarrow x^2(x+2)=0$
$x=0$ (çift katlı kök)
$x=-2$ dir.

Eşitsizliğin işareti (+) dır.

x	$-\infty$	-2	0	1	5	$+\infty$
	+	−	−	+	+	

Ç = (− 2, 0) ∪ (0 , 1] ∪ {5} aralığındaki tamsayılar − 1 , 1 , 5 olup 3 tanedir.

Cevap: B

8. $(x-2)(x-3)(x-6) \le (x-2)(x-3)$
$(x-2)(x-3)(x-6) - (x-2)(x-3) \le 0$
$(x-2)(x-3)(x-6-1) \le 0$
$(x-2)(x-3)(x-7) \le 0$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ dir.
$x-3=0 \Rightarrow x=3$ tür.
$x-7=0 \Rightarrow x=7$ dir.

Eşitsizliğin işareti (+) dır.

x	$-\infty$	2	3	7	$+\infty$
	−	+	−	+	

Ç = (− ∞ , 2] ∪ [3 , 7] aralığındaki doğal sayılar 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 olup 8 tanedir.

Cevap: C

9. $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0 \Rightarrow x^2(x-2) - (x-2) > 0$

$(x-2)(x^2-1) > 0$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir.
$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ veya $x = -1$ dır.

Eşitsizliğin işareti (+) dır.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ç = $(-1, 1) \cup (2, \infty)$

Cevap: A

10. $\dfrac{|x-4|}{9-x^2} \geq 0$

Her $x \in R$ için $|x-4| \geq 0$ olduğundan eşitsizlik tablosunda almayabiliriz. Ancak, $|x-4| = 0 \Rightarrow x = 4$ eşitsizliği sağlayacağı için çözüm kümesinde olmalıdır.

$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ veya $x = -3$ tür.

Eşitsizliğin işareti (–) dir.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
		$-$		$+$		$-$	

Ç = $(-3, 3) \cup \{4\}$ aralığındaki farklı tamsayılar $-2, -1, 0, 1, 2, 4$ olup 6 tanedir.

Cevap: B

11. Her $x \in R$ için $|x-2| + 2$ ifadesi daima pozitif olduğundan eşitsizlik tablosunda almayabiliriz.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ veya $x = -2$ dir.

Eşitsizliğin işareti (+) dır.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ç = $(-2, 2)$ olur.

Cevap: C

12. $0 < x^2 - 6x < 27$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi;

$0 < x^2 - 6x \ldots (1)$
$\Rightarrow x^2 - 6x = 0$
$x.(x-6) = 0$
$x = 0$ veya $x = 6$ dır.

$x^2 - 6x < 27 \Rightarrow x^2 - 6x - 27 < 0 \ldots (2)$
$\Rightarrow x^2 - 6x - 27 = 0$
$(x+3).(x-9) = 0$
$x = -3$ veya $x = 9$ dur.

Eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı, (1) ve (2) nolu eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimidir.

x	$+\infty$		-3		0		6		9		$+\infty$
(1)		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
(2)		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Kesişim				çözüm				çözüm			

Ç = $(-3, 0) \cup (6, 9)$ aralığındaki tamsayılar $-2, -1, 7, 8$ olup toplamları 12 dir.

Cevap: B

13. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}<0 \Rightarrow \dfrac{x+1-x}{x(x+1)}<0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x(x+1)}<0 \ ...(1)$

$\Rightarrow x=0$ veya $x=-1$ dir.

$\dfrac{x}{x-2}>0 \ ...(2)$

$\Rightarrow x=0$ veya $x=2$ dir.

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, (1) ve (2) eşitsizliklerinin çözüm kümelerinin kesişimidir.

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 2	2 … $+\infty$
(1)	+	−	+	+
(2)	+	+	−	+
Kesişim		■		

Ç = (– 1, 0) dır.

Cevap: E

14. $x-\dfrac{1}{x^{2000}}\le 0 \Rightarrow \dfrac{x^{2001}-1}{x^{2000}}\le 0 \ ...(1)$

$x^{2001}-1=0 \Rightarrow x^{2001}=1 \Rightarrow x=1,$

$x^{2000}=0 \Rightarrow x=0$ (çift katlı kök)

$1-\dfrac{1}{x^{2000}}\le 0 \Rightarrow \dfrac{x^{2000}-1}{x^{2000}}\le 0 \ ...(2)$

$x^{2000}-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ (çift katlı kök değil)

Eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı (1) ve (2) eşitsizliklerinin çözüm kümelerinin kesişimidir.

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
(1)	−	−	−	+
(2)	+	−	−	+
Kesişim		■	■	

Ç = [– 1 , 0) ∪ (0 , 1] olur.

Cevap: B

15. $|x^2-2x-8|<\sqrt{x^2-8x+16}$

$|(x-4)(x+2)|<\sqrt{(x-4)^2}$

$|x-4|.|x+2|<|x-4|$

$|x-4|.|x+2|-|x-4|<0$

$|x-4|.(|x+2|-1)<0$

Her $x\in R$ için $|x-4|\ge 0$ olduğundan eşitsizlik tablosuna almayabiliriz.

$|x+2|-1=0 \Rightarrow |x+2|=1$

$\Rightarrow x=-1$ veya $x=-3$ tür.

x	$-\infty$ … -3	-3 … -1	-1 … $+\infty$
	+	−	+

Ç = (– 3 , – 1) olur.

Cevap: D

16. $\sqrt{x-4}$ ifadesinin tanımlı olabilmesi için $x-4\ge 0$ olmalıdır.

$x\ge 4$ için $\sqrt{x-4}\ge 0$ olduğundan eşitsizlik tablosuna almayabiliriz.

$36-x^2=0 \Rightarrow x=6$ veya $x=-6$ dır.

x	$-\infty$ … -6	-6 … 6	6 … $+\infty$
	−	+	−

Ç = [4 , ∞) ∩ (– 6 , 6)

Ç = [4 , 6) olur.

Çözüm aralığındaki tamsayılar 4 ve 5 olduğundan toplamları 9 dur.

Cevap: D

17. $(x-6).f(x) \le 0$

$x-6=0 \Rightarrow x=6$ dır.

$f(x)=0 \Rightarrow x=-2$ veya $x=4$ veya $x=6$ dır.

x	$-\infty$		-2		4		6		$+\infty$
		+	0	−	0	+	0	+	

Ç = $[-2, 4] \cup \{6\}$ aralığındaki tamsayılar ise $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6$ olup 8 tanedir.

Cevap: C

18. $(a-2).x^2-2x+a-5=0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.
Köklerin ters işaretli olabilmesi için ; $x_1.x_2<0$ olmalıdır. Buna göre,

$$\frac{a-5}{a-2}<0$$

$a-5=0 \Rightarrow a=5$,
$a-2=0 \Rightarrow a=2$ dir.

a	$-\infty$		2		5		$+\infty$
		+		−	0	+	

Ç = $(2, 5)$ olur.

Cevap: C

19. $x^2-(2m-2).x-1+m=0$

denkleminin reel köklerinin olmaması için $\Delta<0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}\Delta = (2m-2)^2-4.1.(-1+m) &< 0\\ 4(m-1)^2-4(m-1) &< 0\\ (m-1).(4m-4-4) &< 0\\ (m-1).(4m-8) &< 0\end{aligned}$$

$m-1=0 \Rightarrow m=1$ dir.
$4m-8=0 \Rightarrow m=2$ dir.

m	$-\infty$		1		2		$+\infty$
		+	0	−	0	+	

Ç = $(1, 2)$ olur.

Cevap: E

20. $x^2-(k+3).x+k=0$ denkleminin kökleri arasında, $x_1<0<x_2$ ve $|x_1|>x_2$ bağıntıları olduğundan,

$x_1<0<x_2 \Rightarrow x_1.x_2<0$ .... (1)

$\Rightarrow x_1.x_2=\frac{c}{a}=k<0$

$x_1>x_2 \Rightarrow x_1+x_2<0$ .... (2)

$\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}=k+3<0$

$\Rightarrow k<-3$

k nın alabileceği değerlerin aralığı (1) ve (2) nolu eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimidir.

Ç = $(-\infty, -3)$ olur.

Cevap: A

CEVAPLI TEST – 1

1. $$\frac{3x}{4} \le \frac{a}{3}$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi $(-\infty, 4]$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) 1 B) 4 C) 7 D) 9 E) 11

2. $$x^4 - 3x^2 - 4 \le 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-1, 1]$ B) $(-2, 4)$ C) $[-2, 2]$ D) $(-2, 2]$ E) $[-4, 4]$

3. $$x^2.(x+4).(2-x)^3 < 0$$

eşitsizliğini sağlamayan en büyük tamsayı kaçtır?

A) –1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. $$(3^x - 27^{-1}).(2^x - 16) \le 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-3 < x < \infty$ B) $-3 \le x < 4$ C) $2 \le x \le 4$ D) $-3 \le x \le 4$ E) $-\infty < x \le 4$

5. $$x^2 - 5x - 6 < 0 \text{ ve } A = 4 - 2x$$

olduğuna göre, A için aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $-9 < A < 4$ B) $-6 < A < 8$ C) $-4 < A < 8$ D) $-8 < A < 8$ E) $-8 < A < 6$

6. $$x - 2 > \sqrt{x^2 - 2x - 8}$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $0 < x \le 4$ B) $2 \le x < 4$ C) $4 \le x < 6$ D) $2 \le x \le 6$ E) $4 < x \le 6$

7. $$6 < x^2 + x < 20$$

eşitsizliğini aşağıdaki aralıklardan hangisi daima sağlar?

A) $(-5, 2)$ B) $(-3, 4)$ C) $(-3, 2)$ D) $(2, 4)$ E) $(-5, 4)$

8. $$\frac{3}{1-x} < \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tamsayı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9. $$\frac{4}{x^3} < -\frac{1}{x^2}$$

eşitsizliğini sağlayan en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-4 < x < 4$ B) $-4 < x < 0$ C) $0 < x < 4$ D) $1 < x < 4$ E) $-4 < x < 1$

10. $$\frac{(x-2)^2 . |x-4|}{2^{-x} . (8x-x^2)} > 0$$

eşitsizliğini sağlayan x in farklı tamsayı değerleri kaç tanedir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

11. $$\frac{1}{x+1} < \frac{x-1}{x-2}$$

eşitsizliğini sağlamayan x değerlerinin en geniş aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[1 , 3]$ B) $[-1 , 2]$ C) $[-1, 3]$

D) $[-2 , 3]$ E) $[-1 , \infty)$

12. $$\frac{(x+1).(x-1)^2}{x-2} > 0$$

eşitsizliğini sağlayan x in en büyük negatif tamsayı değeri ile en küçük pozitif tamsayı değerinin toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

13. $$\frac{1997}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-8}} > 0$$

eşitsizliğini sağlayan x tamsayılarının toplamı kaçtır?

A) 5 B) 8 C) 11 D) 15 E) 18

14. $$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \le 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0 , 2)$ B) $(1 , 2)$ C) $(0 , 1]$

D) $(1 , 2]$ E) $(0 , 2]$

15. $$\frac{4x^2 - x}{(x-2)^2} < 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0 , \frac{1}{4})$ B) $(\frac{1}{4} , \infty)$ C) $(0 , \infty)$

D) $(-\infty , 0)$ E) $(-2 , \frac{1}{4})$

16. $a < b < 0$ olmak üzere,

$$abx^2 - (a + b) . x + 1 \le 0$$

eşitsizliğini sağlayan aralıklardan birisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-1 \le x \le 0$ B) $-1 \le x \le 1$ C) $\frac{1}{b} \le x \le \frac{1}{a}$

D) $\frac{1}{a} \le x \le 1$ E) $a \le x \le b$

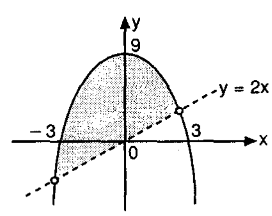
17. $$f(x) = 3x^2 - 6x + a$$

fonksiyonu x in bütün reel sayı değerleri için pozitif olduğuna göre, a nın alabileceği değerler en geniş hangi aralıktadır?

A) $6 < a$ B) $4 < a$ C) $3 < a$

D) $a < 4$ E) $a < 3$

18. Şekildeki taralı bölgeyi sağlayan eşitsizlik sistemi aşağıdakilerden hangisidir?



A) $y \ge 2x$, $y > 9 - x^2$
B) $y \le 2x$, $y \ge 9 - x^2$
C) $y < 2x$, $y \le 9 - x^2$

D) $y > 2x$, $y \le 9 - x^2$
E) $y > 2x$, $y \ge 9 - x^2$

CEVAP ANAHTARI

1-D	2-C	3-B	4-D	5-E	6-C	7-D	8-A	9-B
10-B	11-B	12-D	13-D	14-C	15-A	16-C	17-C	18-D

CEVAPLI TEST – 2

1. $2x.(x+2) \le (x-3).(x-4)$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-12, 1]$ B) $[-11, 2]$ C) $[-2, 11]$ D) $[-1, 12]$ E) $[-12, 12]$

2. $(x+1).(x-2)^2.(x-5)^3 < 0$

eşitsizliğini sağlayan x in tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 14 B) 12 C) 10 D) 9 E) 8

3. $\frac{x}{3} + \frac{3}{x} > 2$

eşitsizliğini aşağıdaki aralıklardan hangisi sağlar?

A) $(-\infty, 0)$ B) $(-3, 0)$ C) $(-3, 3)$ D) $(0, 3)$ E) $(0, \infty)$

4. $a < b < 0$ olmak üzere,

$$x^2 - (a-b).x - a.b < 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı $(-2, 1)$ olduğuna göre, $a+b$ toplamı kaçtır?

A) -3 B) -4 C) -5 D) -6 E) -7

5. Karesi, kendisinin 3 katının 4 fazlasından küçük olan tamsayıların toplamı kaçtır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

6. $\frac{x+2}{x-1} \ge \frac{3}{x+1}$

eşitsizliğini aşağıdaki aralıklardan hangisi sağlar?

A) $[-1, \frac{1}{2})$ B) $(-1, -\frac{1}{2}]$ C) $[-\frac{1}{2}, 1)$ D) $(-\frac{1}{2}, 1]$ E) $(1, \infty)$

7. $\frac{x^3.(x+1)^2}{x^3-64} \le 0$

eşitsizliğini sağlayan x in farklı tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

8. $\frac{(3x+2)^2-(2x-2)^2}{5x-x^2} > 0$

eşitsizliğini sağlayan x tamsayıları kaç tanedir?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

9. $\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2-1}} \le 0$

eşitsizliğini sağlayan x in farklı tamsayı değerlerinin çarpımı kaçtır?

A) 36 B) 24 C) 12 D) 9 E) 4

10. $\frac{12-x.(x-1)}{1-|x-1|} \le 0$

eşitsizliğini sağlayan x tamsayıları kaç tanedir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

11. $x-3 > \sqrt{x^2-9}$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, -3)$ B) $(-\infty, 3)$ C) $(-3, 3)$

D) $(-3, \infty)$ E) $\varnothing$

12. $2 < x^2 - x < 12$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-4, -3) \cup (1, 2)$ B) $(-3, -2) \cup (-1, 4)$

C) $(-3, -2) \cup (1, 4)$ D) $(-3, -1) \cup (2, 4)$

E) $(-4, -1) \cup (2, 3)$

13. $(m+1).x^2 - 2x + m - 2 = 0$

denkleminin ters işaretli iki gerçel (reel) kökü olduğuna göre, m için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $m < -1$ B) $m < 1$ C) $m > 2$

D) $-1 < m < 2$ E) $-2 < m < 1$

14. $|x^2 - 4x - 5| \leq |x - 5|$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tamsayısı vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

15. $f(x) = (3-a)x^2 - ax + 1$

fonksiyonu x in bütün reel sayı değerleri için pozitif olduğuna göre, a değerlerinin bulunduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[2, 3]$ B) $(2, 3)$ C) $[-4, 4)$

D) $(-6, 2)$ E) $(-1, 3)$

16. $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{2}{x} \leq 0$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x pozitif tamsayısı vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

17. $x^2 - (m+2)x + m - 2 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

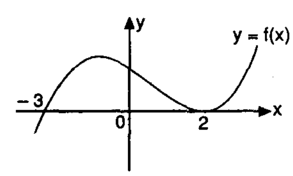
$x_1 < 0 < x_2$ ve $|x_1| < x_2$

olduğuna göre, m için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $m < -2$ B) $m < 2$ C) $m > -2$

D) $m > 2$ E) $-2 < m < 2$

18. Şekilde, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$(x-3).f(x) < 0$

eşitsizliğini sağlayan x tamsayıları kaç tanedir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

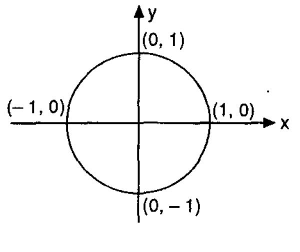
CEVAP ANAHTARI

1-A	2-E	3-D	4-A	5-E	6-E	7-C	8-B	9-A
10-C	11-E	12-D	13-D	14-B	15-D	16-B	17-E	18-A

26. BÖLÜM TRİGONOMETRİ

A. TRİGONOMETRİK ÇEMBER

Merkezi koordinat eksenlerinin kesiştiği nokta (orijin) ve yarıçapı 1 birim olan çembere **trigonometrik çember** veya **birim çember** denir.

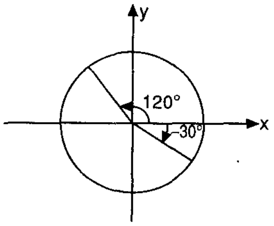


1) Trigonometrik çemberin yarıçapı 1 birim olduğu için çevresi 2π birimdir.
2) Trigonometrik çemberin denklemi $x^2 + y^2 = 1$ dir.

B. YÖNLÜ AÇI

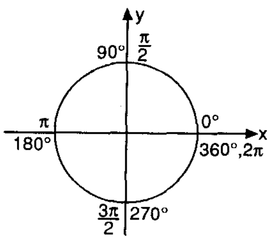
Saatin dönme yönünün tersini **pozitif yön**, saatin dönme yönünü de **negatif yön** olarak adlandıracağız.

Yandaki şekilde gösterilen 120° lik açıyı ve – 30° lik açıyı dikkatle inceleyiniz.



C. AÇI ÖLÇÜ BİRİMLERİ

Genellikle üç birim kullanılır.
Bunlar; derece, radyan, grattır.



1) Derece

Bir çemberin çevresinin 360 ta 1 ini gören merkez açının ölçüsü **1 derece**dir. 1 derece 60 dakikadır. 1 dakika 60 saniyedir.

1° = 60' , 1' = 60" , 1° = 3600"

2) Radyan

Bir çemberin, yarıçapının uzunluğundaki yayı gören merkez açı **1 radyan**dır.

3) Grad

Bir çemberin çevresinin 400 de 1 ini gören merkez açının ölçüsü **1 grat**tır.
Derece, radyan ve grad arasında,
$360° = 2\pi$ radyan = 400 grad veya
$180° = \pi$ radyan = 200 grad bağıntısı vardır.

Buna göre, derece D ile, radyan R ile, grad G ile gösterilirse aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\boxed{\frac{D}{180°} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200}}$$

Örnek:

1) 30° kaç radyandır?
2) 60° kaç grattır?
3) $\frac{\pi}{10}$ radyan kaç derecedir?
4) $\frac{\pi}{4}$ radyan kaç grattır?
5) 100 grad kaç derecedir?
6) 200 grad kaç radyandır?

Çözüm:

1) $D = 30° \Rightarrow \frac{30°}{180°} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{6}$ radyandır.

2) $D = 60° \Rightarrow \frac{60°}{180°} = \frac{G}{200} \Rightarrow G = \frac{200}{3}$ grattır.

3) $R = \frac{\pi}{10} \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{10}}{\pi} = \frac{D}{180°} \Rightarrow D = 18°$ dir.

4) $R = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{G}{200} \Rightarrow G = 50$ grattır.

5) $G = 100 \Rightarrow \frac{100}{200} = \frac{D}{180°} \Rightarrow D = 90°$ dir.

6) $G = 200 \Rightarrow \frac{200}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \pi$ radyandır.

D. ESAS ÖLÇÜ

Derece cinsinden bir açının 360° ye bölümünden kalan **derece cinsinden esas ölçü**, radyan cinsinden bir açının 2π ye bölümünden kalan **radyan cinsinden esas ölçü**, grad cinsinden bir açının 400 e bölümünden kalan **grad cinsinden esas ölçü** adını alır.

Uyarı:

Esas ölçü negatif bir açı olamaz.

Örnek:

1200° nin esas ölçüsünün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} 1200° & 360° \\ \hline -1080° & 3 \\ \hline 120° & \end{array} \Rightarrow 1200° = 3.360° + 120°$$

Devir sayısı: 3

Esas ölçü : 120° dir.

Örnek:

– 1600° nin esas ölçüsünün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} -1600° & 360° \\ \hline -1800° & -5 \\ \hline 200° & \end{array} \Rightarrow -1600° = -5.360° + 200°$$

Esas ölçü : 200° dir.

Not:

Negatif yönlü açıların esas ölçüleri; pozitif yönlü açı gibi düşünülüp, kalanın 360° den çıkarılmasıyla da bulunabilir.

Örnek:

– 950° nin esas ölçüsünün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} 950° & 360° \\ \hline -720° & 2 \\ \hline 230° & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 360° \\ -230° \\ \hline 130° \end{array} \Rightarrow -950° \text{ nin esas ölçüsü } 130° \text{ dir.}$$

Radyan türünden açıların esas ölçüsü, paydanın iki katının tam katlarına göre pay ayırım yapılarak belirlenir.

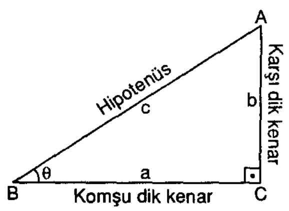
Örnek:

1) $\frac{21\pi}{2} = \frac{5.4\pi + \pi}{2} = 5.2\pi + \frac{\pi}{2}$ olduğu için $\frac{21\pi}{2}$ açısının esas ölçüsü : $\frac{\pi}{2}$ dir.

2) $\frac{26\pi}{3} = \frac{4.6\pi + 2\pi}{3} = 4.2\pi + \frac{2\pi}{3}$ olduğu için $\frac{26\pi}{3}$ açısının esas ölçüsü : $\frac{2\pi}{3}$ tür.

3) $-\frac{47\pi}{5} = \frac{-5.10\pi + 3\pi}{5} = -5.2\pi + \frac{3\pi}{5}$ olduğu için $-\frac{47\pi}{5}$ açısının esas ölçüsü : $\frac{3\pi}{5}$ tir.

E. DİK ÜÇGENDE BİR DAR AÇININ TRİGONOMETRİK ORANLARI



$$\sin\theta = \frac{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün uzunluğu}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün uzunluğu}} = \frac{a}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}} = \frac{b}{a}$$

Ayrıca, $\cot\theta = \frac{a}{b}$, $\sec\theta = \frac{c}{a}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{c}{b}$ dir.

Örnek:

$0° < \alpha < 90°$ olmak üzere,

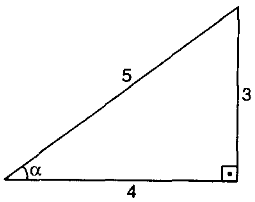
$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

olduğuna göre, $\dfrac{\tan\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

olduğuna göre; karşı dik kenar 3 birim ve hipotenüs 5 birim alınırsa, Pisagor teoreminden komşu dik kenar 4 birim bulunur.



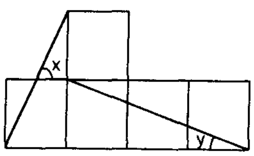
$$\frac{\tan\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{4}{5}}{\frac{5}{3}}$$

$$= \frac{\frac{31}{20}}{\frac{5}{3}} = \frac{31}{20} \cdot \frac{3}{5} = \frac{93}{100} \quad \text{dür.}$$

Örnek:

Yandaki şekil eş karelerden oluşmaktadır.

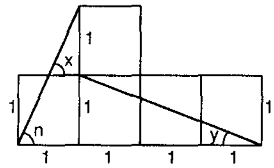
Buna göre, $\tan x + \cot y$ değerini bulalım.



Çözüm:

Verilen şekle göre, x açısı ile n açısı yöndeştir ve eşittir.

Eş karelerden birinin kenar uzunluğu 1 birim alınırsa diğer kenar uzunlukları da 1 birim olur. Buna göre,



$$\tan x = \tan n = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{dir... (1)}$$

$$\cot y = \frac{3}{1} = 3 \quad \text{tür... (2)}$$

(1) ve (2) den $\tan x + \cot y = 2 + 3 = 5$ tir.

Örnek:

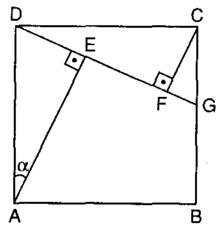
Yandaki şekilde ABCD bir kare,

$[AE] \perp [DG]$

$[CF] \perp [DG]$

$2|DE| = |EF|$

olduğuna göre, $\cot\alpha$ değerini bulalım.



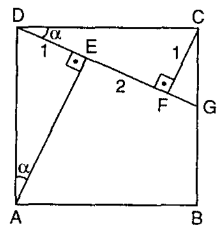
Çözüm:

$|DE| = 1$ olsun. O halde,

$|EF| = 2$ olur.

ADE üçgeni ile DCF üçgeni benzer olduğundan

$m(\widehat{CDF}) = \alpha$ olur.



O halde, $\cot\alpha = \dfrac{|DF|}{|FC|} = \dfrac{3}{1} = 3$ tür.

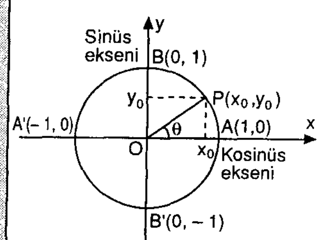
F. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

1) Bir Açının Sinüsü ve Kosinüsü

Birim çember üzerinde, AOP açısını göz önüne alalım. P noktasının apsisine **açının kosinüsü**, ordinatına da **açının sinüsü** denir.

$\mathbf{x_0 = \cos\theta}$

$\mathbf{y_0 = \sin\theta}$



Sonuç:

1) P noktası çember üzerinde ve çemberin yarıçapı 1 birim olduğu için P nin apsisi (açının kosinüsü) ve ordinatı da (açının sinüsü) – 1 den küçük ya da 1 den büyük olmaz.

Buna göre,

$$-1 \le \cos\theta \le 1 \quad ve \quad -1 \le \sin\theta \le 1 \quad olur.$$

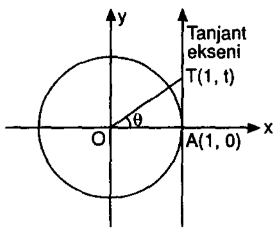
2) $P(x_0, y_0)$ noktası birim çemberin denklemini sağladığından,

$x_0 = \cos\theta$ ve $y_0 = \sin\theta$ olmak üzere,

$x^2 + y^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ olur.

2) Bir Açının Tanjantı

Birim çemberin A noktasındaki teğetini çizelim. Bu durumda t bir reel sayı olmak üzere, T(1, t) noktası teğetin üzerindedir. T noktasının ordinatına **AOT açısının tanjantı** denir. **t = tan θ** dır.



Sonuç:

T(1, t) noktası teğet üzerindeki herhangi bir nokta olduğu için, t herhangi bir reel sayı olabilir. Yani,

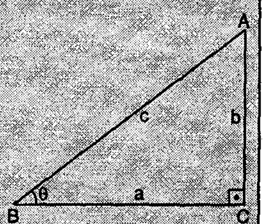
$-\infty < t < +\infty$ dur.

Buradan, $-\infty < \tan\theta < +\infty$ dur.

$\sin\theta = \frac{b}{c}$, $\cos\theta = \frac{a}{c}$,

$\tan\theta = \frac{b}{a}$, $\cot\theta = \frac{a}{b}$,

$\sec\theta = \frac{c}{a}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{c}{b}$,



olduğu gözönüne alınırsa şu sonuçlar çıkar.

1) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \Rightarrow \tan\theta.\cot\theta = 1$ dir.

2) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ dır.

3) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ dır.

Ayrıca, $\alpha + \theta = 90°$ ise

$\sin\alpha = \cos\theta$, $\tan\alpha = \cot\theta$ dır.

$\sec\theta$ ve $\operatorname{cosec}\theta$, $R - (-1, 1)$ aralığında değerler alır.

Örnek:

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} - \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} - \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$$

$$= \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} - \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$$

$$= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x} - \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}$$

$= 1 + \cos x - (1 + \sin x)$

$= \cos x - \sin x$ tir.

Örnek:

$$\frac{\sin^2 20° + \sin^2 70° - 1 + \cos 70°}{\tan 10°.\tan 80° - 1 + \sin 20°}$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$\sin 70° = \cos 20°$, $\cos 70° = \sin 20°$ ve

$\tan 80° = \cot 10°$ olduğundan

$$\frac{\sin^2 20° + \sin^2 70° - 1 + \cos 70°}{\tan 10°.\tan 80° - 1 + \sin 20°}$$

$$= \frac{(\sin^2 20° + \cos^2 20°) - 1 + \sin 20°}{(\tan 10°.\cot 10°) - 1 + \sin 20°}$$

$$= \frac{1 - 1 + \sin 20°}{1 - 1 + \sin 20°} = 1 \quad dir.$$

Örnek:

$$\frac{1}{1+\tan 80^\circ}+\frac{1}{1+\cot 80^\circ}$$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{1}{1+\tan 80^\circ}+\frac{1}{1+\cot 80^\circ}$$

$$=\frac{1}{1+\tan 80^\circ}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{\tan 80^\circ}}$$

$$=\frac{1}{1+\tan 80^\circ}+\frac{\tan 80^\circ}{1+\tan 80^\circ}$$

$$=\frac{1+\tan 80^\circ}{1+\tan 80^\circ}=1 \quad \text{dir.}$$

Örnek:

$$\frac{1+\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{1-\cos x}$$

ifadesinin en sade halini bulalım.

Çözüm:

Paydalar eşitlenerek sonuca gidilir.

$$\frac{1+\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{1-\cos x}$$

$$=\frac{(1+\cos x).(1-\cos x)-\sin x\,.\,\sin x}{\sin x.(1-\cos x)}$$

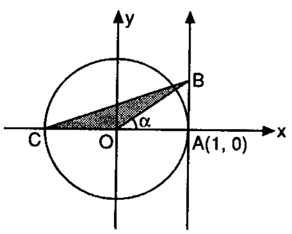
$$=\frac{1-\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x.(1-\cos x)}$$

$$=\frac{1-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin x.(1-\cos x)}$$

$$=\frac{1-1}{\sin x.(1-\cos x)}=0 \quad \text{dır.}$$

Örnek:

Yandaki birim çemberde verilenlere göre, OBC üçgeninin alanını bulalım.



Çözüm:

Verilenlere göre, $|AB| = \tan\alpha$ dır.
$|OC| = 1$ birim olduğundan,

$$A(OBC)=\frac{1}{2}.|OC|.|AB|$$

$$=\frac{1}{2}.1.\tan\alpha=\frac{\tan\alpha}{2} \quad \text{birimkaredir.}$$

Örnek:

$0^\circ < x < 90^\circ$ olmak üzere,

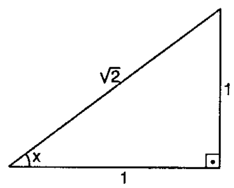
$$6\cos^2 x-4\sin^2 x-1=0$$

olduğuna göre, $\cot x$ değerini bulalım.

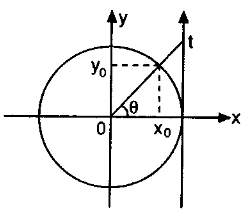
Çözüm:

$$6\cos^2 x-4\sin^2 x-1=0$$
$$6\cos^2 x-4(1-\cos^2 x)-1=0$$
$$6\cos^2 x-4+4\cos^2 x-1=0$$
$$10\cos^2 x=5$$
$$\cos^2 x=\frac{1}{2}$$
$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{dir. } (0^\circ < x < 90^\circ)$$

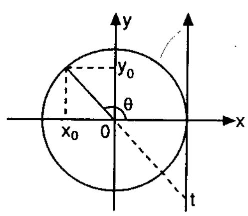
O halde, $x = 45^\circ$ olur.
$\cot x = \cot 45^\circ = 1$ dir.



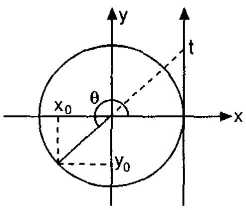
G. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN BÖLGELERDEKİ İŞARETİ

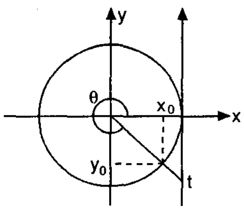


$0^\circ < \theta < 90^\circ$ ise
$x_0 = \cos\theta > 0$
$y_0 = \sin\theta > 0$
$t = \tan\theta > 0$ dır.



$90^\circ < \theta < 180^\circ$ ise
$x_0 = \cos\theta < 0$
$y_0 = \sin\theta > 0$
$t = \tan\theta < 0$ dır.





$180° < \theta < 270°$ ise
$x_0 = \cos\theta < 0$
$y_0 = \sin\theta < 0$
$t = \tan\theta > 0$ dır.

$270° < \theta < 360°$ ise
$x_0 = \cos\theta > 0$
$y_0 = \sin\theta < 0$
$t = \tan\theta < 0$ dır.

Yukarıda ifade edilen önermeleri bir araya getirelim.

$\cos\theta < 0$ $\sin\theta > 0$ $\tan\theta < 0$	$\cos\theta > 0$ $\sin\theta > 0$ $\tan\theta > 0$
$\cos\theta < 0$ $\sin\theta < 0$ $\tan\theta > 0$	$\cos\theta > 0$ $\sin\theta < 0$ $\tan\theta < 0$

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ olduğu için $\cot\theta$ nın işareti $\tan\theta$ nın işareti ile aynıdır.

Benzer şekilde; $\sec\theta$ nın işareti $\cos\theta$ nın işareti ile, $\operatorname{cosec}\theta$ nın işareti de $\sin\theta$ nın işareti ile aynıdır.

Örnek:

I. tan 130°
II. cot 210°
III. sin 320°
IV. cos 280°

Yukarıdaki trigometrik değerlerin işaretlerini bulalım.

Çözüm:

$90° < \theta < 180° \Rightarrow \tan\theta < 0$ olduğu için
$\tan 130° < 0$, $(-)$ dir.
$180° < \theta < 270° \Rightarrow \cot\theta > 0$ olduğu için
$\cot 210° > 0$, $(+)$ dır.
$270° < \theta < 360° \Rightarrow \sin\theta < 0$ ve $\cos\theta > 0$
olduğu için $\sin 320° < 0$, $(-)$ ve $\cos 280° > 0$, $(+)$ dır.

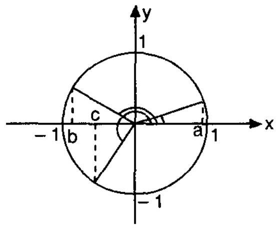
Örnek:

$a = \cos 20°$
$b = \cos 140°$
$c = \cos 230°$

olduğuna göre; a, b, c yi sıralayalım.

Çözüm:

a, b, c değerlerini kosinüs ekseninde gösterelim.
Görüleceği gibi,
$b < c < a$ dır.



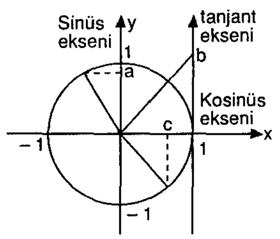
Örnek:

$a = \sin 120°$
$b = \tan 70°$
$c = \cos 310°$

olduğuna göre; a, b, c yi sıralayalım.

Çözüm:

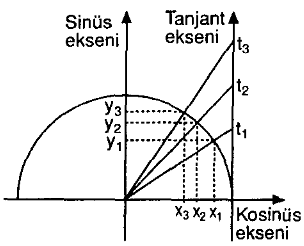
$a = \sin 120°$ sinüs ekseninde,
$b = \tan 70°$ tanjant ekseninde,
$c = \cos 310°$ kosinüs ekseninde gösterelim.
Şekilde görüleceği gibi,
$c < a < b$ dir.



H. ÖZEL AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI

0°, 30°, 45°, 60°, 90° nin Trigonometrik Oranları

$0° \le a \le 90°$ olmak üzere a; 0° den başlayıp 90° ye doğru büyüyen değerler alırsa, kosinüs eksenindeki x_1, x_2, x_3, ... değerlerinin giderek küçüldüğü, yani, **cos 90° = 0** olacağı, sinüs eksenindeki y_1, y_2, y_3, ... değerlerinin giderek büyüdüğü, yani **sin 90° = 1** olacağı, tanjant eksenindeki t_1, t_2, t_3, ... de-



ğerlerinin giderek büyüdüğü, hatta a = 90° için tanjant ekseni kesilemeyeceği için **tan 90°= t olacak şekilde bir t reel sayısının bulunamayacağı görülür.**

Benzer yaklaşımla,

sin 0° = 0 , cos 0° = 1 , tan 0° = 0

olduğu görülür.

Yukarıda bulduğumuz oranları, tablo ile ifade edelim.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Tanımsız

Örnek:

$$\sin(2x - 10°) = \frac{1}{2}$$

eşitliğini sağlayan <u>en küçük</u> pozitif x açısını bulalım.

Çözüm:

$$\sin(2x - 10°) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 10° = 30°$$
$$\Rightarrow 2x = 40°$$
$$\Rightarrow x = 20° \text{ dir.}$$

$\sin(2x - 10°) = \frac{1}{2}$ eşitliğini sağlayan en küçük x açısı 20° dir.

Örnek:

$$\tan 3x = \sqrt{3}$$

eşitliğini sağlayan <u>en küçük</u> pozitif x açısının kaç radyan olduğunu bulalım.

Çözüm:

En küçük pozitif x açısı sorulduğu için,

$$\tan 3x = \sqrt{3} \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{3}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{9} \text{ dur.}$$

Örnek:

$$\cos(x - 25°) + \sin(115° - x) = \sqrt{2}$$

eşitliğini sağlayan <u>en küçük</u> pozitif x açısını bulalım.

Çözüm:

$(x - 25°) + (115° - x) = 90°$ olduğundan,

$\sin(x - 25°) = \cos(115° - x)$ tir.

O halde,

$$\cos(x - 25°) + \sin(115° - x) = \sqrt{2}$$
$$2\cos(x - 25°) = \sqrt{2}$$
$$\cos(x - 25°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dir.}$$

En küçük pozitif x açısı sorulduğu için,

$$\cos(x - 25°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x - 25° = 45°$$
$$\Rightarrow x = 70° \text{ dir.}$$

J. 90° DEN BÜYÜK AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI

$0° < \theta < 90°$

$P = (\cos\theta, \sin\theta)$

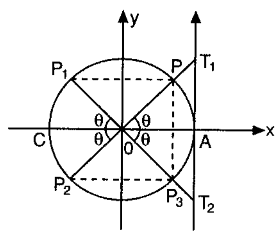
$P_1 = (-\cos\theta, \sin\theta)$

$P_2 = (-\cos\theta, -\sin\theta)$

$P_3 = (\cos\theta, -\sin\theta)$

$T_1 = (1, \tan\theta)$

$T_2 = (1, -\tan\theta)$



şekilde ifade edilen P noktasının koordinatları (x_0, y_0) olsun. $x_0 = \cos\theta$, $y_0 = \sin\theta$ olduğuna göre, $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ olur.

P nin Oy eksenine göre simetriği P_1 noktası olduğuna göre, $P_1 = (-\cos\theta, \sin\theta)$ olur.

Buna göre, $m(\widehat{AOP}) = \theta \Rightarrow m(\widehat{AOP_1}) = \pi - \theta$ ve

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$
$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

[OP ışını tanjant eksenini $T_1 = (1, t)$ noktasında keserse, [OP_1 ışını tanjant eksenini (uzantısıyla) T_2 noktasında keser. T_1 ile T_2, Ox eksenine göre simetrik olduğu için $T_2 = (1, -t)$ dir.

$t = \tan\theta$ olduğuna göre, $T_1 = (1, \tan\theta)$ ve $T_2 = (1, -\tan\theta)$ dır. Demek ki;

$\boxed{\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta}$ dır.

Yukarıdakine benzer yaklaşımla, P_2, P nin orijinine göre simetriğidir.
Yani, $P_2 = (-\cos\theta, -\sin\theta)$ dır.
P_2 nin, apsisi $\pi + \theta$ nın kosinüsüne ve ordinatı $\pi + \theta$ nın sinüsüne eşit olduğuna göre,

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \\ \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta \end{array}}$$ dır.

[OP_2 ışınının uzantısı, tanjant eksenini, $T_1 = (1, \tan\theta)$ noktasında kestiğine göre,

$\boxed{\tan(\pi + \theta) = \tan\theta}$ dır.

P_3, P nin Ox eksenine göre simetriği olduğu için, $P_3 = (\cos\theta, -\sin\theta)$ dır.
P_3 ün, apsisi $2\pi - \theta$ nın kosinüsüne ve ordinatı $2\pi - \theta$ nın sinüsüne eşit olduğuna göre,

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(2\pi - \theta) = \cos\theta \\ \sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta \text{ dır. Ya da,} \\ \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \sin(-\theta) = -\sin\theta \end{array}}$$ dır.

[OP_3 ışını tanjant eksenini $T_2 = (1, -\tan\theta)$ noktasında kestiğine göre,

$$\boxed{\begin{array}{l} \tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta \text{ dır. Ya da,} \\ \tan(-\theta) = -\tan\theta \end{array}}$$ dır.

Örnek:

1) $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\tan 315° = \tan(360° - 45°) = -\tan 45° = -1$

Örnek:

cot 240° nin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\cot 240° = \frac{1}{\tan 240°} = \frac{1}{\tan(180° + 60°)} = \frac{1}{\tan 60°}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ tür.}$$

Not:

$0 < \theta < 90$

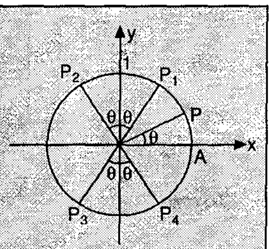
$P = (\cos\theta, \sin\theta)$

$P_1 = (\sin\theta, \cos\theta)$

$P_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$P_3 = (-\sin\theta, -\cos\theta)$

$P_4 = (\sin\theta, -\cos\theta)$



Önceki yaklaşıma benzer bir yaklaşımla aşağıdaki özdeşlikler elde edilir.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$$

Örnek:

1) $\sin 240° = \sin(270° - 30°) = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos 135° = \cos(90° + 45°) = -\sin 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\tan 300° = \tan(270° + 30°) = -\cot 30°$

$= -\tan 60 = -\sqrt{3}$

Örnek:

Örnek:

Aşağıdakilerden hangisi sin 20° ye eşit <u>değildir</u>?

A) – cos 110° B) – sin 200° C) cos (– 70°)
D) sin 160° E) sin (– 20°)

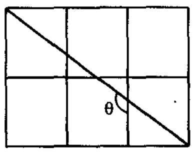
Çözüm:

$-\cos 110° = -\cos(90° + 20°) = -(-\sin 20°) = \sin 20°$
$-\sin 200° = -\sin(180° + 20°) = -(-\sin 20°) = \sin 20°$
$\cos(-70°) = \cos 70° = \sin 20°$
$\sin 160° = \sin(180° - 20°) = \sin 20°$
$\sin(-20°) = -\sin 20°$ dir.

Cevap : E

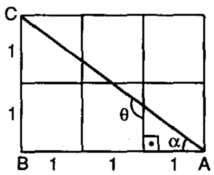
Örnek:

Şekil özdeş karelerden oluşmaktadır.
Buna göre, $\tan\theta$ değerini bulalım.



Çözüm:

Yandaki şekilde özdeş karelerin bir kenarını 1 birim alalım. BAC açısı α olsun. Buradan, $\theta = 90 + \alpha$ olur.



$\tan\theta = \tan(90° + \alpha) = -\cot\alpha = -\dfrac{3}{2}$ dir.

Örnek:

$$\sqrt{\frac{2-\cos 0°}{3+\sin 90°}}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) tan 30° B) sin 30° C) cos 30°
D) cot 135° E) sin 90°

Çözüm:

$\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cot 135° = -1$ ve $\sin 90° = 1$ dir.

$$\sqrt{\frac{2-\cos 0°}{3+\sin 90°}} = \sqrt{\frac{2-1}{3+1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$\sin 30° = \dfrac{1}{2}$ olduğundan, $\sqrt{\dfrac{2-\cos 0°}{3+\sin 90°}} = \sin 30°$ dir.

Cevap : B

Örnek:

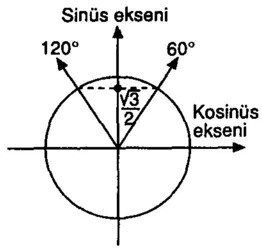
$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

eşitliğini sağlayan x dar açısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 15° B) 22,5° C) 45° D) 60° E) 75°

Çözüm:

$\sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ise
$2x = 60° + 360°.k$ veya
$2x = 120° + 360°.k$ dır.
$k = 0$ için,
$2x = 60° \Rightarrow x = 30°$ veya
$2x = 120° \Rightarrow x = 60°$ dir.



Cevap : D

Örnek:

$$\cos\theta = -\frac{3}{5}$$

olduğuna göre, $\sin(\pi + \theta)$ nın alabileceği değerlerin çarpımını bulalım.

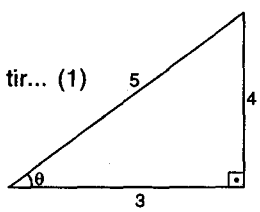
Çözüm:

$\cos\theta = -\dfrac{3}{5} \Rightarrow \left(\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ veya } \pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ dir.

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ dır.

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ için,

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta = -\dfrac{4}{5}$ tir... (1)



$\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ için,

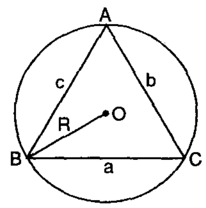
$-\sin\theta = -\left(-\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{4}{5}$ tir... (2)

(1) ve (2) den, $\sin(\pi + \theta)$ nın alabileceği değerlerin çarpımı: $-\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{4}{5} = -\dfrac{16}{25}$ tir.

K. ÜÇGENDE TRİGONOMETRİK BAĞINTILAR

1) Sinüs Teoremi

ABC üçgeninde çevrel çemberin yarıçapı R olsun.



$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R \text{ dir.}$$

Örnek:

Bir ABC üçgeninde,

$$a = 3\sqrt{3}$$
$$m(\widehat{A}) = 60°$$
$$m(\widehat{B}) = 45°$$

olduğuna göre, b değerini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\sin 60°} = \frac{b}{\sin 45°}$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = b$$

$$b = 3\sqrt{2} \text{ dir.}$$

Örnek:

Bir ABC üçgeninin çevresi 16 cm dir.

$$3\sin A = \sin B + \sin C$$

olduğuna göre, BC kenarı (a) kaç cm dir?

Çözüm:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\frac{16}{\sin A + 3\sin A} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\frac{16}{4\sin A} = \frac{a}{\sin A}$$

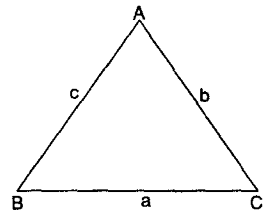
$$a = 4 \text{ tür.}$$

2) Kosinüs Teoremi

Bir ABC üçgeninde,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \widehat{C}$$

dir.



Örnek:

Bir ABC üçgeninde $a = 3$ cm, $b = 4$ cm ve $c = 6$ cm olduğuna göre, cos A değerini bulalım.

Çözüm:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$$
$$3^2 = 4^2 + 6^2 - 2.4.6.\cos A$$
$$\cos A = \frac{52-9}{2.4.6}$$
$$\cos A = \frac{43}{48} \text{ dir.}$$

Örnek:

Bir ABC üçgeninin kenarları arasında,

$$\frac{b-c}{a} = \frac{c+a}{b+c}$$

bağıntısı vardır.

Buna göre, cos B değerini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{b-c}{a} = \frac{c+a}{b+c} \Rightarrow b^2 - c^2 = a^2 + ac$$
$$\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 + ac \quad \text{dir... (1)}$$

Kosinüs teoreminden,

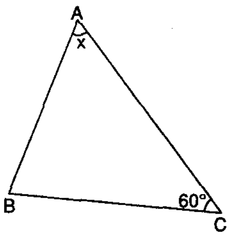
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$ dir... (2)

(1) ve (2) den

$$a^2 + c^2 + ac = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$
$$ac = -2ac.\cos B$$
$$\cos B = -\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Örnek:

Yandaki ABC üçgeninde,



$|AC| = 8$ cm

$|BC| = 5$ cm

$m(\widehat{ACB}) = 60°$

$m(\widehat{BAC}) = x$

olduğuna göre, sin x değerini bulalım.

Çözüm:

$|AB| = c$ cm olsun.

Kosinüs teoreminden,

$c^2 = 5^2 + 8^2 - 2.5.8.\cos 60°$

$c^2 = 25 + 64 - 2.40.\dfrac{1}{2}$

$c^2 = 49$

$c = 7$ cm dir.

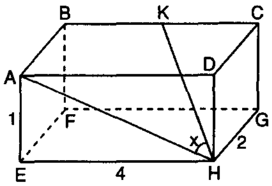
Sinüs teoreminden,

$$\frac{|BC|}{\sin x} = \frac{|AB|}{\sin 60°} \Rightarrow \frac{5}{\sin x} = \frac{7}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{5\sqrt{3}}{14} \text{ tür.}$$

Örnek:

Yandaki dikdörtgenler prizmasında,



$|BK| = |KC|$

$|AE| = 1$ cm

$|HG| = 2$ cm

$|EH| = 4$ cm

$m(\widehat{AHK}) = x$

olduğuna göre, cos x değerini bulalım.

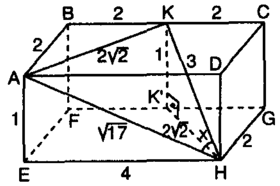
Çözüm:

AEH diküçgeninden, $|AE|^2 + |EH|^2 = |AH|^2$

$1^2 + 4^2 = |AH|^2$

$|AH| = \sqrt{17}$ dir.

ABK diküçgeninden



$|AK|^2 = 2^2 + 2^2$

$|AK| = 2\sqrt{2}$ dir.

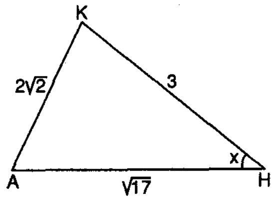
$|KK'| = 1$ ve

$|HK'| = 2\sqrt{2}$ dir.

$|KH|^2 = 1^2 + (2\sqrt{2})^2$

$|KH| = 3$ tür.

O halde, yandaki AKH üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa,



$$(2\sqrt{2})^2 = 3^2 + (\sqrt{17})^2 - 2.3.\sqrt{17}.\cos x$$

$$8 = 9 + 17 - 6\sqrt{17}.\cos x$$

$$\cos x = \frac{18}{6\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}} \text{ dir.}$$

L. TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Trigonometrik fonksiyonlar bire bir ve örten değildir. Bunun için tanım kümesi reel sayılar kümesi olan trigonometrik fonksiyonların tersi fonksiyon değildir.

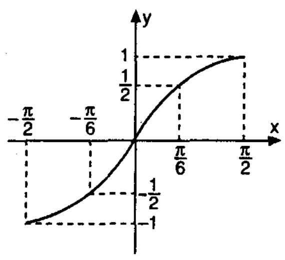
Ancak, trigonometrik fonksiyonların bire bir ve örten olduğu tanım aralığında tersi bir fonksiyondur. Mesela,

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

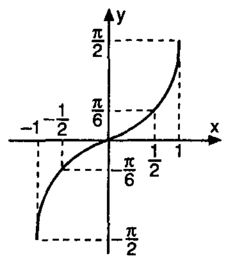
fonksiyonu bire bir ve örtendir. Bunun için, sinüs fonksiyonunun tersi olan:

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

bağıntısı bir fonksiyondur.



y = sin x

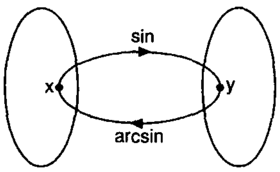


y = arcsin x

$y = \sin x$ fonksiyonunun grafiği ile $y = \arcsin x$ fonksiyonunun grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktir. Grafikte verilen yaklaşımı şema ile ifade edelim.

$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$

Benzer yaklaşım cos x ve tan x fonksiyonları için de geçerlidir.



$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Örnek:

Aşağıdaki değerleri hesaplayalım.

1) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

3) $\arctan(-1)$

4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

5) $\sin\left(\pi + \arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

Çözüm:

1) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin x$ tir.

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ olduğu için,

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ tür.

2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = x \Rightarrow -\frac{1}{2} = \cos x$ tir.

$0 \le x \le \pi$ olduğu için,

$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ tür.

3) $\arctan(-1) = x \Rightarrow -1 = \tan x$ tir.

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ olduğu için,

$\tan x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$ tür.

4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

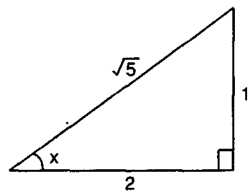
$\arctan\frac{1}{2} = x \Rightarrow \frac{1}{2} = \tan x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$= \sin\left(\arctan\frac{1}{2}\right)$

$= \sin x$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}$ tir.



5) $\arccos\frac{1}{2} = x \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos x$ tir.

$0 \le x \le \pi$ olduğu için,

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ tür.

O halde, $\sin\left(\pi + \arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= -\sin\frac{\pi}{3}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dir.

Örnek:

x pozitif reel sayıdır.

$\arctan 2x = \text{arccot}\, 8x$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm:

$\text{arccot}\, 8x = \alpha$ olsun.

$\text{arccot}\, 8x = \alpha \Rightarrow 8x = \cot\alpha$ dır.

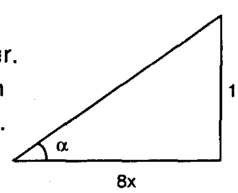
$\arctan 2x = \text{arccot}\, 8x$ ifadesinin iki tarafının da tanjantını alalım.

$\tan(\arctan 2x) = \tan(\text{arccot}\, 8x)$

$2x = \tan\alpha$

$2x = \frac{1}{8x}$

$x = \frac{1}{4}$ tür. ($x > 0$)



ÇÖZÜMLÜ TEST

1. $a = \dfrac{16\pi}{5}$

$b = \dfrac{21\pi}{5}$

olduğuna göre, a + b toplamının esas ölçüsü kaç derecedir?

A) 269 B) 258 C) 252 D) 240 E) 238

2. I. $\sin\left(\dfrac{18\pi}{5}\right)$

II. $\cos\left(\dfrac{13\pi}{3}\right)$

III. $\tan\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$

Yukarıdaki trigonometrik değerlerin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) –, –, + B) –, –, – C) +, +, + D) –, +, + E) +, –, –

3. a = tan 160°
b = cot 50°
c = sin 240°
d = cos 70°

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) d > a > b > c B) b > a > d > c C) a > b > d > c D) b > d > a > c E) a > b > c > d

4. $10x = \pi$ olmak üzere,

$$\frac{\cos(22x)\,.\,\tan(48x)}{\cot(7x)\,.\,\sin(17x)}$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) – 1 B) 0 C) 1 D) sin 3x E) cos 2x

5. $A = 2\cos\alpha - 3$
$B = 4 - 3\sin\beta$

olduğuna göre, A + B nin alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

6. $$\frac{1-\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1-\sin x} = -2$$

olduğuna göre, tan x değeri kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

7. $\tan\theta = -2$

olduğuna göre, sin (π + θ) nın alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır?

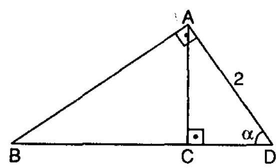
A) $-\dfrac{4}{5}$ B) $-\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{5}$ D) $\dfrac{4}{5}$ E) 1

8. $$\frac{7 + 3\cos^2 x - 5\sin^2 x}{8 + 7\cos^2 x - 5\sin^2 x}$$

ifadesinin sonucu kaçtır?

A) $\dfrac{7}{8}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) 1 D) $\dfrac{1}{5}$ E) – 1

9. Şekildeki ABC dik üçgeninde



|AD| = 2 cm ve
$m(\widehat{ADB}) = \alpha$
olarak verilmiştir.

Buna göre, |BC| uzunluğu α türünden aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2 – sin α B) tan α C) 2 cot α D) 2 tan α . sin α E) 2cos α

10. $$\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{2\cos^2 x + 2\sin x\cos x} = 2$$

olduğuna göre, tan x değeri kaçtır?

A) $-\dfrac{1}{4}$ B) $-\dfrac{1}{3}$ C) $-\dfrac{1}{2}$ D) – 2 E) – 3

11. $\tan x - \cot x = 4$

olduğuna göre, $\tan^2 x + \cot^2 x$ değeri kaçtır?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

12. $\tan 9°.\tan 12°.\tan 15°. \ldots .\tan 78°.\tan 81°$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

13. ABC üçgeninde,

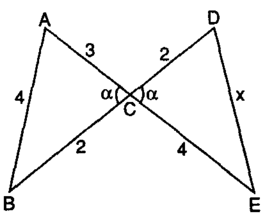
$$A + B = 45°$$

$$\cos(4A + 3B) = -\frac{4}{5}$$

olduğuna göre, cot B kaçtır?

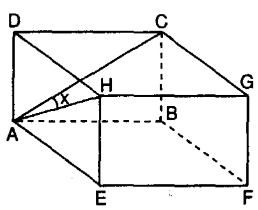
A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{7}{6}$

14. Yandaki şekilde verilenlere göre, x kaçtır?



A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) 5 D) $2\sqrt{6}$ E) $5\sqrt{2}$

15. Yanda verilen EFGHABCD dikdörtgenler pirizmasında



$|AE| = 1$ cm

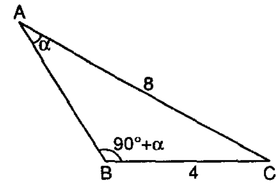
$|HE| = 2$ cm

$|EF| = 4$ cm

olduğuna göre, cos x kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

16. Yanda verilen ABC üçgenine göre,



$|BC| = 4$

$|AC| = 8$

olduğuna göre, sin α kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

17. Bir ABC üçgeninde, m(A) = 150° ve üçgenin kenar uzunlukları arasında,

$$b^2 + a^2 + 68 - 4b - 16a = 0$$

bağıntısı olduğuna göre, bu üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

18. $\sec(\text{arccot}\, x)$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ B) $\frac{\sqrt{x+1}}{x}$ C) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

D) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ E) $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

19. $0° < x < 90°$ olmak üzere,

$$\sin(x + 16°) + \cos(74° - x) = 1$$

denklemini sağlayan pozitif en küçük x açısı kaç derecedir?

A) 4 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

20. $\cos(6x) = \sin(9x)$

denklemini sağlayan pozitif en küçük x açısı kaç derecedir?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

TESTİN ÇÖZÜMLERİ

1. $a+b=\dfrac{16\pi}{5}+\dfrac{21\pi}{5}=\dfrac{37\pi}{5}$ radyandır.

$$\frac{37\pi}{5}=\frac{3.10\pi+7\pi}{5}=3.2\pi+\frac{7\pi}{5}$$

olduğundan $\dfrac{37\pi}{5}$ radyanın esas ölçüsü $\dfrac{7\pi}{5}$ radyandır.

$$\frac{\frac{7\pi}{5}}{\pi}=\frac{D}{180°}\Rightarrow D=\frac{7.180°}{5}=252° \text{ dir.}$$

Cevap: C

2. $\dfrac{18\pi}{5}=\dfrac{10\pi+8\pi}{5}=2\pi+\dfrac{8\pi}{5}$ radyanın esas ölçüsü $\dfrac{8\pi}{5}$ ve $\sin\left(\dfrac{8\pi}{5}\right)<0$ dır... (1)

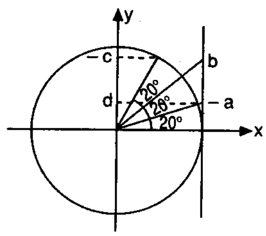
$\dfrac{13\pi}{3}=\dfrac{2.6\pi+\pi}{3}=2.2\pi+\dfrac{\pi}{3}$ radyanın esas ölçüsü $\dfrac{\pi}{3}$ ve $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}>0$ dır... (2)

$-\dfrac{5\pi}{5}=\dfrac{6\pi-5\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$ radyanın esas ölçüsü $\dfrac{\pi}{3}$ ve $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}>0$ dır... (3)

(1), (2) ve (3) ten işaretler sırasıyla, $-$, $+$, $+$ dır.

Cevap: D

3. $a=\tan 160°=-\tan 20°$
$b=\cot 50°=\tan 40°$
$c=\sin 240°=-\sin 60°$
$d=\cos 70°=\sin 20°$



$\tan 40° > \sin 20°$ ve $-\tan 20° > -\sin 60°$ olduğundan, $b>d>a>c$ dir.

Cevap: D

4. $10x=\pi \Rightarrow 20x=2\pi$ dir.

$22x=20x+2x=2\pi+2x$ tir.

$48x=2.20x+8x=4\pi+8x$ tir.

$17x=10x+7x=\pi+7x$ tir.

$$\frac{\cos 22x\,.\tan 48x}{\cot 7x\,.\sin 17x}=\frac{\cos(2\pi+2x)\,.\tan(4\pi+8x)}{\cot 7x\,.\sin(\pi+7x)}$$

$$=\frac{\cos 2x\,.\tan 8x}{-\cot 7x\,.\sin 7x}$$

$$=\frac{\cos 2x\,.\tan(10x-2x)}{-\cot(5x+2x).\sin(5x+2x)}$$

$$=\frac{-\cos 2x.\tan 2x}{\tan 2x.\cos 2x}$$

$=-1$ dir.

Cevap: A

5. $-1\le\cos\alpha\le 1 \Rightarrow -2\le 2\cos\alpha\le 2$
$\Rightarrow -5\le 2\cos\alpha-3\le -1$
$\Rightarrow -5\le A\le -1$... (1)

$-1\le\sin\beta\le 1 \Rightarrow -3\le -3\sin\beta\le 3$
$\Rightarrow 1\le 4-3\sin\beta\le 7$
$\Rightarrow 1\le B\le 7$... (2)

(1) ve (2) yi taraf tarafa toplayarak sonucu bulalım.

$$\begin{array}{r} -5\le A\le -1 \\ +\quad 1\le B\le 7 \\ \hline -4\le A+B\le 6 \end{array}$$

olduğundan, A + B nin alabileceği 11 farklı tamsayı değeri vardır.

Cevap: B

6. $$\frac{1-\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\underset{(1+\sin x)}{1-\sin x}}=-2$$

$$\frac{1-\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x\ (1+\sin x)}{1-\sin^2 x}=-2$$

$$\frac{1-\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x\ (1+\sin x)}{\cos^2 x}=-2$$

$$\frac{1-\sin x+1+\sin x}{\cos x}=-2$$

$\cos x=-1$ dir.

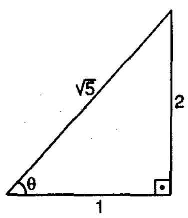
Buna göre, $\tan x=\tan\pi=0$ dır.

Cevap: C

7.

$\tan\theta=-2\Rightarrow\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi \text{ veya } \frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi\right)$ dir.

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ için,



$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ tir...(1)

$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ için,

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}$ tir...(2)

(1) ve (2) den $\sin(\pi+\theta)$ nın alabileceği değerlerin

çarpımı; $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{4}{5}$ tir.

Cevap: A

8. *1. yol:*

$$\frac{7+3\cos^2 x-5\sin^2 x}{8+7\cos^2 x-5\sin^2 x}=\frac{7+3\cos^2 x-5(1-\cos^2 x)}{8+7\cos^2 x-5(1-\cos^2 x)}$$

$$=\frac{7+3\cos^2 x-5+5\cos^2 x}{8+7\cos^2 x-5+5\cos^2 x}$$

$$=\frac{2+8\cos^2 x}{3+12\cos^2 x}$$

$$=\frac{2(1+4\cos^2 x)}{3(1+4\cos^2 x)}$$

$=\frac{2}{3}$ tür.

2. yol:

$x=0°$ için sonucu bulalım.

$$\frac{7+3\cos^2 x-5\sin^2 x}{8+7\cos^2 x-5\sin^2 x}=\frac{7+3\cos^2 0°-5\sin^2 0°}{8+7\cos^2 0°-5\sin^2 0°}$$

$$=\frac{7+3-0}{8+7-0}$$

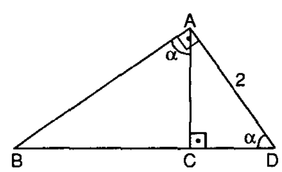
$=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ tür.

Cevap: B

9. ACD üçgeninde,

$|AC|=2\sin\alpha$ dır.

ACB üçgeninde,



$\tan\alpha=\frac{|BC|}{|AC|}$

$\tan\alpha=\frac{|BC|}{2\sin\alpha}$

$|BC|=2\sin\alpha.\tan\alpha$ dır.

Cevap: D

10. $$\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{2\cos^2 x + 2\sin x \cos x} = 2$$

$$\frac{(\cos^2 x - \sin^2 x).(\cos^2 x + \sin^2 x)}{2\cos x\,(\cos x + \sin x)} = 2$$

$$\frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x).1}{2\cos x\,(\cos x + \sin x)} = 2$$

$$\cos x - \sin x = 4\cos x$$

$$-\sin x = 3\cos x$$

$$\tan x = -3 \text{ tür.}$$

Cevap: E

11.
$$\tan x - \cot x = 4$$
$$(\tan x - \cot x)^2 = 4^2$$
$$\tan^2 x - 2\tan x \cot x + \cot^2 x = 16$$
$$\tan^2 x + \cot^2 x - 2 = 16$$
$$\tan^2 x + \cot^2 x = 18 \text{ dir.}$$

Cevap: D

12. $\tan 9°.\tan 12°.\tan 15°.\ \dots\ .\tan 78°.\tan 81°$

$= \tan 9°.\tan 12°.\tan 15°.\ \dots\ .\cot 15°.\cot 12°.\cot 9°$

$= \underbrace{\tan 9°.\cot 9°}_{1}.\underbrace{\tan 12°.\cot 12°}_{1}.\ \dots\ .\underbrace{\tan 42°.\cot 42°}_{1}.\underbrace{\tan 45°}_{1}$

$= 1$ dir.

Cevap: C

13. $A + B = 45° \Rightarrow 4A + 4B = 180°$ dir.

$$\cos(4A + 3B) = -\frac{4}{5}$$

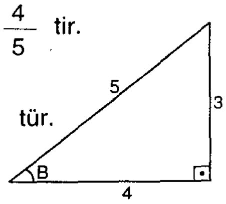
$$\cos(4A + 4B - B) = -\frac{4}{5}$$

$$\cos(180° - B) = -\frac{4}{5}$$

$$-\cos B = -\frac{4}{5}$$

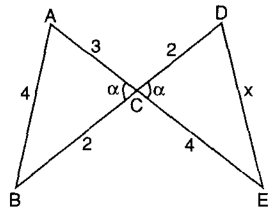
$$\cos B = \frac{4}{5} \text{ tir.}$$

$$\cos B = \frac{4}{5} \Rightarrow \cot B = \frac{4}{3} \text{ tür.}$$



Cevap: B

14. ABC ile CDE üçgenlerinde kosinüs teoremi uygulanırsa,



$$\cos\alpha = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2\,.\,3\,.\,2} \text{ ve}$$

$$\cos\alpha = \frac{2^2 + 4^2 - x^2}{2\,.\,2\,.\,4}$$ tür. cos α değerlerini

birbirine eşitleyerek x değerini bulalım.

$$\frac{9 + 4 - 16}{2\,.\,3\,.\,2} = \frac{4 + 16 - x^2}{2\,.\,2\,.\,4}$$

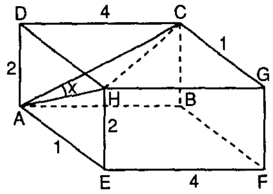
$$\frac{-3}{3} = \frac{20 - x^2}{4}$$

$$-4 = 20 - x^2$$

$$x = 2\sqrt{6} \text{ dır.}$$

Cevap: D

15. AEH diküçgeninde,



$|AH|^2 = 2^2 + 1^1$

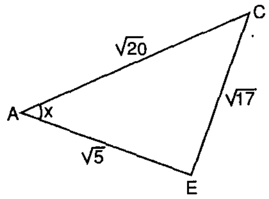
$|AH| = \sqrt{5}$ tir.

ABC üçgeninde

$|AC|^2 = 2^2 + 4^2$

$|AC| = \sqrt{20}$ dir.

HGC diküçgeninde,



$|HC|^2 = 1^2 + 4^2$

$|HC| = \sqrt{17}$ dir.

CAE üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa

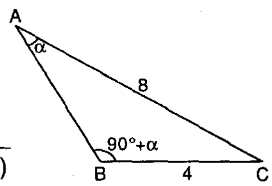
$$\cos x = \frac{(\sqrt{20})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{17})^2}{2 . \sqrt{5} . \sqrt{20}}$$

$$\cos x = \frac{20 + 5 - 17}{2 . 10}$$

$$\cos x = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \text{ tir.}$$

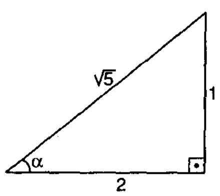
Cevap: B

16. ABC üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa



$$\frac{4}{\sin \alpha} = \frac{8}{\sin(90° + \alpha)}$$

$$\frac{4}{\sin \alpha} = \frac{8}{\cos \alpha}$$



$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Buna göre, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ tir.

Cevap: A

17. $b^2 + a^2 + 68 - 4b - 16a = 0$

$(b-2)^2 + (a-8)^2 = 0$

$\Rightarrow (b - 2 = 0 \text{ ve } a - 8 = 0)$ olur.

O halde, $b = 2$ ve $a = 8$ dir.

Sinüs teoreminden,

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{8}{\sin 150} = 2R$$

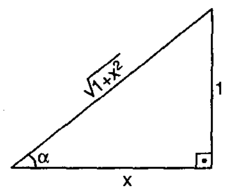
$$\Rightarrow \frac{8}{\frac{1}{2}} = 2R$$

$$\Rightarrow R = 8 \text{ dir.}$$

Cevap: D

18. $\text{arccot}\, x = \alpha \Rightarrow x = \cot \alpha$ dır.

$\sec(\text{arccot}\, x) = \sec \alpha$



$$= \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \text{ tir.}$$

Cevap: D

19. $(x + 16°) + (74° - x) = 90°$

olduğundan, $\sin(x + 16°) = \cos(74° - x)$ tir.

Buradan,

$\sin(x + 16°) + \cos(74° - x) = 1$

$2\sin(x + 16°) = 1$

$\sin(x + 16°) = \frac{1}{2}$ dir.

O halde, $x + 16° = 30° \Rightarrow x = 14°$ dir.

Cevap: C

20. $\cos 6x = \sin 9x \Rightarrow 6x + 9x = 90°$

$\Rightarrow 15x = 90°$

$\Rightarrow x = 6°$ dir.

Cevap: B

CEVAPLI TEST – 1

1. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\cot x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

olduğuna göre, $\dfrac{\sqrt{2}.\cos x + \sqrt{3}.\sin x}{\sqrt{2}.\cos x - \sqrt{3}.\sin x}$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) – 6 B) – 5 C) $\frac{1}{6}$ D) 5 E) 6

2. $A = \{x : x = \frac{4.\sin y - 1}{2}, \ x \in Z \text{ ve } y \in R\}$

olduğuna göre, A kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

3. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\cot^2 x - \operatorname{cosec}^2 x + 3$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. $a + b = \frac{3\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\frac{\sin a + \tan a.\tan b - 1}{\sin b - \sin^2 a - \sin^2 b + 1}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) tan b B) cot b C) – cot b D) 1 E) – tan b

5.
$$1 - \operatorname{cosec} x = a$$

olduğuna göre, cot x in a türünden eşiti aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\sqrt{a^2+2a}$ B) $\sqrt{a^2-2a}$ C) $\sqrt{a-a^2}$

D) a^2-2a E) a^2+2a

6.
$$\frac{|1-\cos x| - |\sin x - 1|}{|-1-\sin x| - |-1-\cos x|}$$

kesrinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) cot x B) tan x C) 2 + sin x + cos x

D) 1 E) – 1

7. $a + b = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\tan(3a + 2b).\cot(a + 2b)$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) – 1 B) $\tan^2 x$ C) $\cot^2 a$

D) 1 E) 0

8.
$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = 2$$

olduğuna göre, tan x in değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 2 D) 3 E) 6

9.
$$\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) cos 2x B) tan 2x C) sec 2x

D) sec x E) cosec x

10.
$$\frac{\cos(-1571°) + \cos(-1573°)}{\sin(1841°) + \sin(1843°)}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) sin 43° C) cot 43°

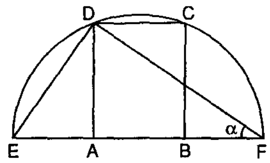
D) cot 41° E) – 1

11. $\tan\theta - \cot\theta = 2$

olduğuna göre, $\dfrac{1}{\tan^2\theta} + \dfrac{1}{\cot^2\theta}$ **değeri kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

12. Yandaki şekilde ABCD dikdörtgen,



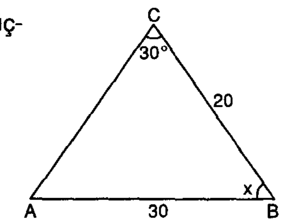
$|AD| = 6$ cm

$|DC| = 5$ cm dir.

[EF] yarım çemberin çapı olduğuna göre, tan α kaçtır?

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

13. Yanda verilen ABC üçgeni için;



$m(\widehat{BCA}) = 30°$

$|AB| = 30$ cm

$|BC| = 20$ cm

olduğuna göre, sin (x + 30°) kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

14. $\sin(x - 15°) + \cos(105° - x) = 1$

denklemini sağlayan x dar açısı için tan x değeri kaçtır?

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

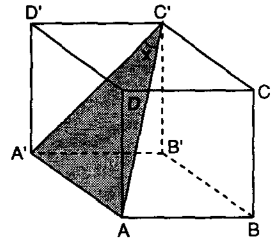
15. $0° < x < 90°$ olmak üzere,

$\tan(4x).\tan(5x) = 1$

denklemini sağlayan <u>en küçük</u> x açısı kaç derecedir?

A) 20 B) 18 C) 15 D) 10 E) 9

16. Yanda verilen ABCDA'B'C'D' bir küptür.



Buna göre, cos x değeri kaçtır?

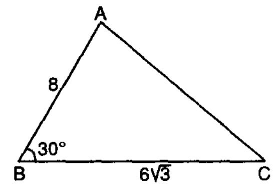
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

17. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

denklemini sağlayan <u>en küçük</u> pozitif x açısı kaç radyandır?

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{7\pi}{12}$ E) $\frac{7\pi}{24}$

18. Yanda verilen ABC üçgeninde



$m(\widehat{CBA}) = 30°$

$|AB| = 8$ cm

$|BC| = 6\sqrt{3}$ cm

olduğuna göre, cot ($\widehat{ACB}$) kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

19. $x + y = 90°$ olmak üzere,

$$\frac{\sin x + \cos y}{\tan x + \cot y} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

olduğuna göre, x dar açısı kaç derecedir?

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

20. $\arctan(2x) = \text{arccot}(18x)$

denklemini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

A) $-\frac{1}{36}$ B) $-\frac{1}{16}$ C) $-\frac{1}{9}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{4}{9}$

CEVAP ANAHTARI

1-B	2-C	3-B	4-C	5-B	6-D	7-A	8-D	9-D	10-E
11-C	12-C	13-D	14-C	15-D	16-C	17-E	18-C	19-B	20-A

CEVAPLI TEST - 2

1. k bir tamsayı olmak üzere,

$$2.k + \cos x + 3 = 0$$

olduğuna göre, k nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) – 1 B) – 2 C) – 3 D) – 4 E) – 5

2.
$$\frac{\sin 510° - \cos(-210°)}{\tan(-135°) + \cot 30°}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ E) 2

3. Aşağıdakilerden hangisi $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right)$ ifadesine <u>özdeş değildir</u>?

A) $\cos\left(a - \frac{3\pi}{2}\right)$ B) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$

C) $\sin(\pi + a)$ D) $\cos(\pi - a)$

E) $\sin(2\pi - a)$

4.
$$a = \tan x$$
$$b = \cot x$$

olduğuna göre, $\frac{1}{a+b}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin x - \cos x$ B) $\sin x + \cos x$

C) $\sin x . \cos x$ D) $\tan x + \cot x$

E) $\tan x - \cot x$

5.
$$\frac{\tan x + \cot x}{\sec^2 x + \mathrm{cosec}^2 x} = \frac{4}{9}$$

olduğuna göre, sin x + cos x ifadesinin pozitif değeri kaçtır?

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ E) $\sqrt{2}$

6.
$$\tan\left(\frac{5\pi}{2} + x\right).\cot\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) – 2 B) – 1 C) 1 D) $\tan^2 x$ E) $\cot^2 x$

7. $a = \sin x$ ve $b = \cos x$ olmak üzere,

$$\frac{a^6 + b^6 - 1}{3.a^2.b^2}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) – 3 B) – 2 C) – 1 D) 1 E) 2

8. $a = \sin 1600°$, $b = \tan 240°$, $c = \cos 320°$

ifadeleri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) b > a > c B) b > c > a C) c > b > a
D) c > a > b E) a > b > c

9. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\left(\frac{\sin\alpha + \cos\beta}{\tan\alpha + \cot\beta}\right) : \frac{1}{\mathrm{cosec}\,\alpha}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\tan\beta$ B) $\cot\beta$ C) $\sec\beta$
D) $\mathrm{cosec}\,\beta$ E) $\sin\beta$

10. Reel sayılarda her x ve y için

$$x \Delta y = x^{\cos^2 y}$$

şeklinde Δ işlemi tanımlanıyor.

Buna göre, $16 \Delta \left(\frac{37\pi}{6}\right)$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

11.
$$\tan(3x + 15°) = \sqrt{3}$$

denklemini sağlayan <u>en küçük</u> x dar açısı kaç derecedir?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

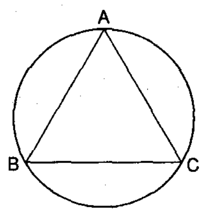
12. Bir ABC diküçgeninde,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

13. Yanda verilen ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı 10 cm dir.



$\sin \widehat{A} = 0,3$

$\sin \widehat{B} = 0,4$

olduğuna göre, | BC | + | AC | toplamı kaç cm dir?

A) 7 B) 10 C) 14 D) 20 E) 21

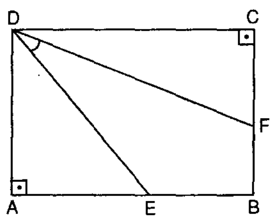
14. A , B, C bir üçgenin iç açılarıdır.

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) . \tan\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

15. Yanda verilen ABC dikdörtgeninde,

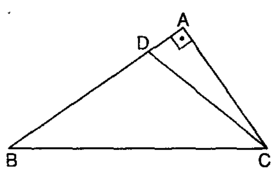


$|EB| = |BF| = |FC|$
$|AE| = 2.|EB|$

olduğuna göre, $\cos(\widehat{EDF})$ değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

16. Şekildeki ABC diküçgeninde

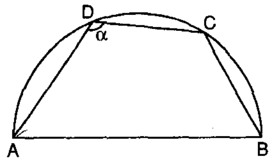


$m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{CBA})$
$|BD| = 15$ cm
$|AD| = 1$ cm

olduğuna göre, $\tan(\widehat{ACD})$ kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

17. Yanda verilen [AB] çaplı yarım çemberde

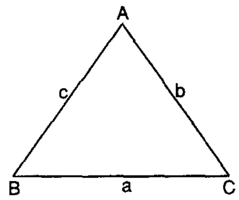


$|AB| = 10$ cm
$|BC| = 2$ cm

olduğuna göre, $\tan(\widehat{ADC})$ kaçtır?

A) $-4\sqrt{6}$ B) $-2\sqrt{6}$ C) $-2\sqrt{3}$ D) $-2\sqrt{2}$ E) $-\sqrt{6}$

18. Yandaki üçgenin kenar uzunlukları arasında;



$a^2 = b^2 + c^2 + b.c$

bağıntısı olduğuna göre, sin (B + C) değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. $x \in [0, 2\pi)$ olmak üzere,

$$1 - \cos x = \sin^2 x$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{0, \frac{\pi}{3}\}$ B) $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$ C) $\{0, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$

D) $\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ E) $\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\}$

20. $$\tan\left(\pi - \arccos\frac{4}{5}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -2 B) $-\frac{4}{3}$ C) $-\frac{3}{4}$ D) $-\frac{2}{3}$ E) $-\frac{1}{2}$

CEVAP ANAHTARI

1-C	2-A	3-D	4-C	5-C	6-B	7-C	8-B	9-A	10-C
11-B	12-B	13-C	14-E	15-E	16-C	17-B	18-E	19-D	20-C

27. BÖLÜM KARMAŞIK (KOMPLEKS) SAYILAR

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin $\Delta < 0$ iken reel kökünün olmadığını daha önceden biliyoruz. Örneğin, $x^2 + 1 = 0$ denkleminin reel kökü yoktur. Çünkü, $(x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1)$ karesi -1 olan reel sayı yoktur.

Şimdi, bu türden denklemlerin çözümünü mümkün kılan ve reel sayılar kümesini de kapsayan yeni bir küme tanımlayacağız.

A. TANIM

a ve b birer reel sayı ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, **$z = a + bi$** şeklinde ifade edilen z sayısına **karmaşık (kompleks) sayı** denir. Karmaşık sayılar kümesi **C** ile gösterilir.

$$C = \{ z : z = a + bi;\ a, b \in R \text{ ve } \sqrt{-1} = i \} \text{ dir.}$$

$$\left(i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \text{ dir.} \right)$$

$z = a + bi$ karmaşık sayısında a ya **karmaşık sayının reel (gerçel) kısmı**, b ye **karmaşık sayının imajiner (sanal) kısmı** denir ve **Re(z) = a, İm(z) = b** şeklinde gösterilir.

Örnek:

$z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 2 - 3i$, $z_3 = \sqrt{3} + i$, $z_4 = 7$, $z_5 = 10i$ sayıları birer karmaşık sayıdır.

z_1 karmaşık sayının reel kısmı 3, imajiner kısmı 4 tür.

$z_2 = 2 - 3i \Rightarrow Re(z_2) = 2$ ve $İm(z_2) = -3$,

$z_3 = \sqrt{3} + i \Rightarrow Re(z_3) = \sqrt{3}$ ve $İm(z_3) = 1$,

$z_4 = 7 \Rightarrow Re(z_4) = 7$ ve $İm(z_4) = 0$,

$z_5 = 10i \Rightarrow Re(z_5) = 0$ ve $İm(z_5) = 10$ dur.

Örnek:

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Verilen denklemde $a = 1$, $b = -2$, $c = 5$ tir.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.5 = -16 = 16.i^2$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16i^2}}{2.1}$$

$$= \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \text{ dir.}$$

$Ç = \{ 1 - 2i, 1 + 2i \}$ dir.

B. i NİN KUVVETLERİ

$i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, ...

Görüldüğü gibi i nin kuvvetleri; $1, i, -1, -i$ değerlerinden birine eşit olmaktadır.

Buna göre, $n \in N$ olmak üzere,

$i^{4n} = 1$

$i^{4n+1} = i$

$i^{4n+2} = -1$

$i^{4n+3} = -i$ dir.

Örnek:

$$(i^{14} + i^{15} + 1).(i^{99} + i^{100} - 1)$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$i^{14} = (i^4)^3.i^2 = 1^3.(-1) = -1$

$i^{15} = (i^4)^3.i^3 = 1^3.(-i) = -i$

$i^{99} = (i^4)^{24}.i^3 = 1^{24}.(-i) = -i$

$i^{100} = (i^4)^{25} = 1^{25} = 1$ olduğu için,

$(i^{14} + i^{15} + 1).(i^{99} + i^{100} - 1) = (-1 - i + 1).(-i + 1 - 1)$

$= (-i)(-i) = i^2 = -1$ dir.

C. İKİ KARMAŞIK SAYININ EŞİTLİĞİ

Reel kısımları ve imajiner kısımları kendi aralarında eşit olan iki karmaşık sayı eşittir.

$\left.\begin{array}{l} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{array}\right\}$ olsun. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a = c \text{ ve } b = d)$ dir.

Örnek:

$z_1 = a + 3 + 2bi + 3i$
$z_2 = 8 + (a + b)i$
$z_1 = z_2$

olduğuna göre, b değerini bulalım.

Çözüm:

$z_1 = (a + 3) + (2b + 3)i$, $z_2 = 8 + (a + b)i$ ve $z_1 = z_2$ olduğundan,

$a + 3 = 8 \Rightarrow a = 5$,

$2b + 3 = a + b \Rightarrow 2b + 3 = 5 + b$

$\Rightarrow b = 2$ dir.

Örnek:

$z_1 = (a + b + 3) + (a - 2)i$
$z_2 = 0$
$z_1 = z_2$

olduğuna göre, a.b değerini bulalım.

Çözüm:

$z_1 = z_2$ olduğundan,

$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$,

$a + b + 3 = 0 \Rightarrow 2 + b + 3 = 0 \Rightarrow b = -5$ tir.

O halde, $a.b = 2.(-5) = -10$ dur.

D. BİR KARMAŞIK SAYININ EŞLENİĞİ

$z = a + bi$ karmaşık sayı ise $\bar{z} = a - bi$ sayısına **z karmaşık sayısının eşleniği** denir.

Örnek:

1) $z_1 = 4 + 3i$ sayısının eşleniği $\bar{z}_1 = 4 - 3i$,

2) $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}\,i$ sayısının eşleniği $\bar{z}_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}\,i$,

3) $z_3 = -7i$ sayısının eşleniği $\bar{z}_3 = 7i$,

4) $z_4 = 12$ sayısının eşleniği $\bar{z}_4 = 12$,

5) $z_5 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ sayısının eşleniği $\bar{z}_5 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

dir.

Örnek:

$z = a + bi$ olmak üzere,

$$3.\bar{z} - 1 = 2(4 - i)$$

olduğuna göre, a + b toplamını bulalım.

Çözüm:

$3.\bar{z} - 1 = 2(4 - i)$
$3(a - bi) - 1 = 8 - 2i$
$3a - 1 - 3bi = 8 - 2i$

olduğundan, $3a - 1 = 8$ ve $-3b = -2$ dir.

$3a - 1 = 8 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3$ ve

$-3b = -2 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$ tür.

O halde, $a + b = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$ tür.

Not:

1) Bir karmaşık sayının eşleniğinin eşleniği kendisine eşittir $(\overline{(\bar{z})} = z)$.

2) Reel katsayılı ikinci dereceden $ax^2 + bx + c = 0$ *denkleminin köklerinden biri* $z = m + ni$ *karmaşık sayısı ise diğeri bu kökün eşleniği olan* $\bar{z} = m - ni$ *sayısıdır.*

E. KARMAŞIK SAYILARDA DÖRT İŞLEM

1) Toplama - Çıkarma

Karmaşık sayılar toplanırken (ya da çıkarılırken) reel ve sanal kısımlar kendi aralarında toplanır (ya da çıkarılır).

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \\ z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i \end{array}$$

Örnek:

$z_1 = 2 - 10i$ ve $z_2 = 8 + 3i$
olduğuna göre,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2 - 10i) + (8 + 3i) \\ &= (2 + 8) + (-10 + 3)i \\ &= 10 - 7i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (2 - 10i) - (8 + 3i) \\ &= (2 - 8) + (-10 - 3)i \\ &= -6 - 13i \text{ dir.} \end{aligned}$$

2) Çarpma

Karmaşık sayılarda çarpma işlemi, $i^2 = -1$ olduğu göz önüne alınarak, reel sayılardakine benzer şekilde yapılır.

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olsun.

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a + bi).(c + di) \\ &= a.c + a.di + bi.c + b.di^2, \quad (i^2 = -1) \\ &= ac - bd + (ad + bc)i \end{aligned}$$

$$z_1.z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
$$z_1.\bar{z}_1 = (a + bi).(a - bi) \Rightarrow z_1.\bar{z}_1 = a^2 + b^2 \text{ dir.}$$

Örnek:

$z_1 = 2 - i$ ve $z_2 = 3 + 2i$ olsun.

a) $z_1.z_2$

b) $z_1.\bar{z}_1$

c) $(z_2)^2$

işlemlerini yapalım.

Çözüm:

a) $z_1.z_2 = (2 - i).(3 + 2i)$
$= 6 + 4i - 3i - 2i^2$
$= 6 - 2.(-1) + (4 - 3)i$
$= 8 + i$ dir.

b) $z_1.\bar{z}_1 = (2 - i).(2 + i)$
$= 2^2 - i^2$
$= 2^2 - (-1)$
$= 5$ tir.

c) $(z_2)^2 = (3 + 2i)^2$
$= 3^2 + 2.3.2i + (2i)^2$
$= 9 + 12i - 4$
$= 5 + 12i$ dir.

Örnek:

$(-1 - i)^2 = (1 + i)^2 = 1^2 + 2.1.i + i^2 = 2i,$

$(1 - i)^2 = (-1 + i)^2 = (-1)^2 + 2.(-1).i + i^2 = -2i,$

$(1 + i)^{10} = ((1 + i)^2)^5 = (2i)^5 = 2^5.i = 32.i,$

$(1 - i)^{20} = ((1 - i)^2)^{10} = (-2i)^{10} = 2^{10}.i^2 = -2^{10}$ dur.

3) Bölme

Karmaşık sayılarda bölme işlemi, paydanın eşleniği ile pay ve paydanın çarpılmasıyla sonuçlandırılır.

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olsun.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi).(c - di)}{(c + di).(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Örnek:

$z_1 = 4 - 3i$ ve $z_2 = 1 - 2i$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - 3i}{1 - 2i} &= \frac{(4 - 3i).(1 + 2i)}{(1 - 2i).(1 + 2i)} \\ &= \frac{4 + 8i - 3i - 6i^2}{1^2 + 2^2} \\ &= \frac{10 + 5i}{5} \\ &= 2 + i \text{ dir.} \end{aligned}$$

Not:

1) $z = a + bi$ sayısının,
toplama işlemine göre tersi, $-z = -a - bi$,
çarpma işlemine göre tersi,

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2} \text{ dir.}$$

2) $\overline{\left[\frac{z_1.z_2}{z_3}\right]}=\frac{\overline{z_1}.\overline{z_2}}{\overline{z_3}}$

Örnek:

$3 - 4i$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersinin imajiner (sanal) kısmını bulalım.

Çözüm:

$3 - 4i$ sayısının çarpma işlemine göre tersi,

$$\frac{1}{3-4i}=\frac{3+4i}{3^2+4^2}=\frac{3+4i}{25}=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$$

olduğu için imajiner (sanal) kısmı $\frac{4}{25}$ tir.

Örnek:

$$\frac{1+2i}{1-i}+\frac{1-2i}{1+i}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\underset{(1+i)}{\frac{1+2i}{1-i}}+\underset{(1-i)}{\frac{1-2i}{1+i}}=\frac{(1+2i)(1+i)}{1^2+1^2}+\frac{(1-2i)(1-i)}{1^2+1^2}$$

$$=\frac{1+i+2i+2i^2}{2}+\frac{1-i-2i+2i^2}{2}$$

$$=\frac{1+3i-2+1-3i-2}{2}$$

$$=\frac{(1-2+1-2)+(3-3)i}{2}$$

$$=\frac{-2+0.i}{2}$$

$$=-1 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{40}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\underset{(1-i)}{\frac{1-i}{1+i}}=\frac{(1-i)^2}{1^2+1^2}=\frac{-2i}{2}=-i$$

olduğundan, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{40}=(-i)^{40}=1$ dir.

Örnek:

$$i+\frac{2}{i-\frac{1}{i}}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$i+\frac{2}{i-\underset{(i)}{\frac{1}{i}}}=i+\frac{2}{i-\frac{i}{-1}}$$

$$=i+\frac{2}{i+i}$$

$$=i+\frac{2}{2i}$$

$$=i+\underset{(i)}{\frac{1}{i}}$$

$$=i+\frac{i}{-1}$$

$$=i-i=0 \text{ dır.}$$

F. KARMAŞIK DÜZLEM VE BİR KARMAŞIK SAYININ GÖRÜNTÜSÜ

1) İki boyutlu analitik düzlemdeki x ekseninin reel eksen, y ekseninin imajiner eksen alınmasıyla oluşturulan düzleme **karmaşık düzlem** denir.
2) $z = a + bi$ karmaşık sayısının karmaşık düzlemdeki **görüntüsü** M(a, b) noktasıdır.
3) $z = a + bi$ karmaşık sayısının iki boyutlu vektör uzayındaki **görüntüsü** $M = (a, b)$ olmak üzere OM vektörüdür.

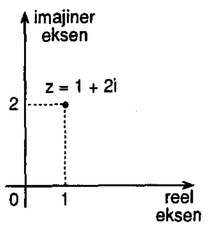
Örnek:

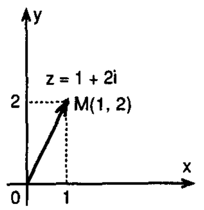
z = 1 + 2i karmaşık sayısını,

1) Karmaşık düzlemde

2) Vektör uzayında gösterelim.

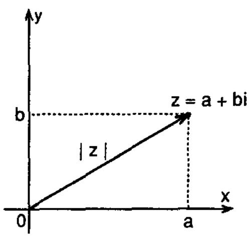
Çözüm:

1) 

2) 

G. BİR KARMAŞIK SAYININ MUTLAK DEĞERİ (MODÜLÜ)

Karmaşık düzlemde, bir karmaşık sayıya karşılık gelen noktanın, başlangıç noktasına uzaklığına bu sayının **mutlak değeri (modülü)** denir ve $|z|$ şeklinde gösterilir.



$z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ dir.

Örnek:

$$z = 5 + 12i$$

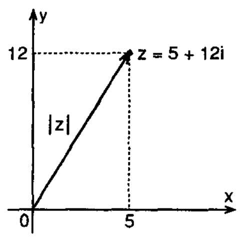
karmaşık sayısının mutlak değerini bularak karmaşık düzlemde gösterelim.

Çözüm:

$z = 5 + 12i$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{5^2 + 12^2}$

$= 13$ tür.



Örnek:

$$z = (a + 2) + 3i$$
$$|z| = 5$$

olduğuna göre, a nın alabileceği değerlerin toplamını bulalım.

Çözüm:

$|z| = 5 \Rightarrow \sqrt{(a+2)^2 + 3^2} = 5$

$\Rightarrow (a+2)^2 + 3^2 = 5^2$

$\Rightarrow (a+2)^2 = 16$

olduğundan, $a + 2 = 4$ veya $a + 2 = -4$ tür.

$a + 2 = 4 \Rightarrow a = 2$ veya

$a + 2 = -4 \Rightarrow a = -6$ dır.

a nın alabileceği değerlerin toplamı $2 + (-6) = -4$ tür.

H. MUTLAK DEĞERLE İLGİLİ ÖZELLİKLER

1) $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}| = |i.z| = |-i.\bar{z}| = ...$

2) $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

3) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $(z_2 \neq 0)$

4) $|z^n| = |z|^n$

5) $z.\bar{z} = |z|^2$

6) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Örnek:

$$z = \frac{3 - 3i}{1 + i}$$

olduğuna göre, $|z|$ değerini bulalım.

Çözüm:

3 – 3i sayısının mutlak değeri,

$\sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ dir.

1 + i sayısının mutlak değeri,

$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ dir. O halde,

$|z| = \dfrac{|3 - 3i|}{|1 + i|} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$ tür.

Örnek:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = \frac{3-5i}{2+4i}$$

karmaşık sayısı için $|z^2|$ değerini bulalım.

Çözüm:

$|z^2| = |z|^2$ dir.

$$z = \frac{3-5i}{2+4i} \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{3^2+(-5)^2}}{\sqrt{2^2+4^2}}$$

$$\Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{20}} \text{ dir.}$$

Buradan, $|z|^2 = \frac{34}{20} = 1{,}7$ dir.

Örnek:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = \frac{(1-3i)^2.(-5+12i)^3}{5+12i}$$

olduğuna göre, $|z|$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$|z| = \left|\frac{(1-3i)^2.(-5+12i)^3}{5+12i}\right|$$

$$= \frac{|1-3i|^2.|-5+12i|^3}{|5+12i|}$$

$$= \frac{(\sqrt{1^2+(-3)^2})^2.(\sqrt{(-5)^2+12^2})^3}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{10})^2.13^3}{13}$$

$= 10.13^2 = 1690$ dır.

Örnek:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z_1 = 2 + ni$$
$$z_2 = 1 + 2i$$
$$|\overline{z_1 + z_2}| = 5$$

olduğuna göre, n nin alabileceği değerlerin çarpımını bulalım.

Çözüm:

$z_1 + z_2 = (2 + ni) + (1 + 2i)$
$= 3 + (n+2)i,$

$\overline{z_1 + z_2} = 3 - (n+2)i$ dir.

$$|\overline{z_1+z_2}| = 5 \Rightarrow \sqrt{3^2+(n+2)^2} = 5$$

$$\Rightarrow 3^2 + (n+2)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow (n+2)^2 = 4^2$$

olduğundan, $n + 2 = 4$ veya $n + 2 = -4$ tür.

$n + 2 = 4 \Rightarrow n = 2$ veya

$n + 2 = -4 \Rightarrow n = -6$ dır.

n nin alabileceği değerlerin çarpımı, $2.(-6) = -12$ dir.

Örnek:

$z = a + bi$ olmak üzere,

$$z - |z| = -1 + 2i$$

olduğuna göre, $a + b$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$z - |z| = -1 + 2i$$

$$a + bi - \sqrt{a^2+b^2} = -1 + 2i$$

$$(a - \sqrt{a^2+b^2}) + bi = -1 + 2i$$

olduğundan, $a - \sqrt{a^2+b^2} = -1$ ve $b = 2$ dir.

Buradan,

$$\Rightarrow a - \sqrt{a^2+2^2} = -1$$

$$\Rightarrow a + 1 = \sqrt{a^2+4}$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a + 1 = a^2 + 4$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2} \text{ dir.}$$

O halde, $a + b = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$ dir.

Örnek:

$i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = \frac{1 - xi}{1 + xi}$$

olduğuna göre, $|z^{10}|$ değerini bulalım.

Çözüm:

$|z^{10}| = |z|^{10}$ dur.

$1 - xi$ sayısının eşleniği $1 + xi$ olduğundan

$|1 - xi| = |1 + xi|$ dir. Buna göre,

$$|z| = \frac{|1 - xi|}{|1 + xi|} = 1 \text{ ve } |z|^{10} = 1^{10} = 1 \text{ dir.}$$

1) $z_1 = x_1 + y_1 i$ ve $z_2 = x_2 + y_2 i$ sayıları arasındaki **uzaklık**, bu sayıların karmaşık düzlemdeki görüntüleri olan noktalar arasındaki uzaklığa eşittir. Yani,

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ dir.}$$

2) $|z - z_0| = r$ şartını sağlayan z karmaşık sayılarının kümesi, z_0 sabit noktasına r birim uzaklıktaki noktaların kümesidir. Bu küme, **merkezi z_0 ve yarıçapı r olan çemberdir.**

Örnek:

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z_1 = -1 + 2i$$
$$z_2 = 3 - 2i$$

olduğuna göre, $|z_2 - z_1|$ değerini bulalım.

Çözüm:

1. yol:

$$|z_2 - z_1| = |(3 - 2i) - (-1 + 2i)|$$
$$= |4 - 4i|$$
$$= \sqrt{4^2 + (-4)^2}$$
$$= 4\sqrt{2} \text{ dir.}$$

2. yol:

$|z_2 - z_1|$ değeri, $z_1 = (-1, 2)$ ve $z_2 = (3, -2)$ noktaları arasındaki uzaklığa eşit olduğundan,

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-2 - 2)^2} = 4\sqrt{2} \text{ dir.}$$

Örnek:

$$A = \{ z : |z - 4 - 3i| = 2, \ z \in C \}$$

kümesini karmaşık düzlemde gösterelim.

Çözüm:

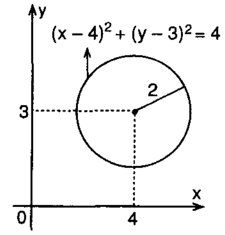
$z = x + yi$ olsun.

$|z - 4 - 3i| = 2$

$|x + yi - 4 - 3i| = 2$

$\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 3)^2} = 2$

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$ bulunur.



Yani, z karmaşık sayıları merkezi (4, 3) noktası ve yarıçapı 2 olan çemberi oluşturan noktaların kümesidir.

Örnek:

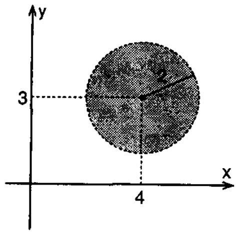
$z = x + yi$ olmak üzere,

$$|z - 4 - 3i| < 2$$

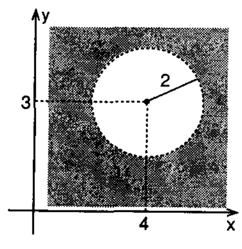
koşulunu sağlayan z karmaşık sayıları, merkezi (4, 3) ve yarıçapı 2 olan çemberin içinde kalan bölge,

$$|z - 4 - 3i| > 2$$

koşulunu sağlayan z karmaşık sayıları, merkezi (4, 3) ve yarıçapı 2 olan çemberin dışında kalan bölgedir.



$|z - 4 - 3i| < 2$



$|z - 4 - 3i| > 2$

Örnek:

$z = x + yi$ olmak üzere,

$$|z+2| = |z-i|$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemini bulalım.

Çözüm:

$$|z+2| = |z-i| \Rightarrow |x+yi+2| = |x+yi-i|$$
$$\Rightarrow |(x+2)+yi| = |x+(y-1)i|$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$
$$\Rightarrow (x+2)^2+y^2 = x^2+(y-1)^2$$
$$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2 = x^2+y^2-2y+1$$
$$\Rightarrow 4x+4 = -2y+1$$
$$\Rightarrow 4x+2y+3 = 0 \text{ dır.}$$

Örnek:

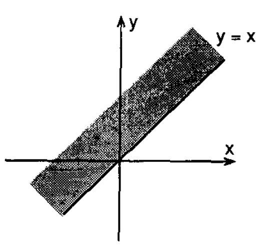
$z = x + yi$ olmak üzere,

$$|z+1| \leq |z+i|$$

eşitsizliğini sağlayan z karmaşık sayılarının, karmaşık düzlemdeki görüntüsünü bulalım.

Çözüm:

$$|z+1| \leq |z+i| \Rightarrow |x+yi+1| \leq |x+yi+i|$$
$$\Rightarrow |(x+1)+yi| \leq |x+(y+1)i|$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+(y+1)^2}$$
$$\Rightarrow (x+1)^2+y^2 \leq x^2+(y+1)^2$$
$$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2 \leq x^2+y^2+2y+1$$
$$\Rightarrow 2x \leq 2y$$
$$\Rightarrow x \leq y \text{ dir.}$$



(İstenilen bölge taranmıştır.)

Örnek:

$z = x + yi$ olmak üzere,

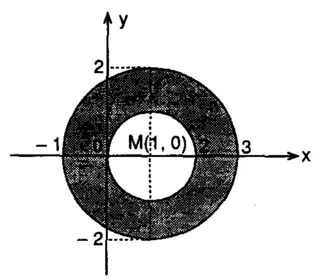
$$1 \leq |z-1| \leq 2$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının, karmaşık düzlemdeki görüntüsünü bulalım.

Çözüm:

$$1 \leq |z-1| \leq 2 \Rightarrow 1 \leq |x-1+yi| \leq 2$$
$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{(x-1)^2+y^2} \leq 2$$
$$\Rightarrow 1^2 \leq (x-1)^2+y^2 \leq 2^2$$

şartını sağlayan (x, y) ikilileri (dolayısıyla $z = x + yi$ karmaşık sayıları) $M(1, 0)$ noktasından en az 1, en çok 2 birim uzaklıkta bulunan noktalardır. Bu noktalar aşağıdaki gibi bir daire halkası oluştururlar.



ÇÖZÜMLÜ TEST

1. $i=\sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\frac{\sqrt{-2}\,.\,\sqrt{-8}+1}{\sqrt{(-3)^2}}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

2. $i=\sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$i^{37}-2i^{-5}+i^3$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-4i$ B) $-2i$ C) 0 D) $2i$ E) $4i$

3. $i=\sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$i^{-1}+i^{-2}+i^{-3}+\ldots+i^{-39}$$

toplamının sonucu kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

4. $i^2=-1$ olmak üzere,

$$f(x)=\frac{2x^2-2x+2}{x^3+1}$$

olduğuna göre, f(i) aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $i-1$ B) $\frac{i-1}{2}$ C) $1-i$ D) $-1-i$ E) 2

5. $i^2=-1$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2-i}+\frac{1}{2+i}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2i}{5}$ B) $\frac{4i}{5}$ C) $2i$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

6. $x<0$ olmak üzere,

$$z=\sqrt{-x^2+2x-1}+|-x|+2x$$

karmaşık sayısının sanal kısmı ile reel kısmının toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) x D) 2x E) $2x+1$

7. $$\frac{(2-i)^2.\sqrt{1-\sqrt{3}\,i}}{1+i}$$

karmaşık sayısının mutlak değeri kaçtır?

A) 2 B) $\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{5}$ D) 5 E) $5\sqrt{2}$

8. $i=\sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\frac{1-2i}{1+i}+a+bi=3+2i$$

olduğuna göre, a – b kaçtır?

A) 0 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) 3 E) $\frac{7}{2}$

9. $i=\sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$z_1=a+i$$
$$z_2=2-i$$
$$|\overline{z_1-z_2}|=2$$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

10. $$z=(-1-i)^3.(2-2i)^4$$

olduğuna göre, z karmaşık sayısının reel kısmı kaçtır?

A) 2^7 B) 2^4 C) -2^3 D) -2^4 E) -2^7

11. $i=\sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\frac{i+1}{z}=1-i$$

olduğuna göre, z^{2003} aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-i$ B) $-i-1$ C) -1 D) i E) $2i$

12. $z=x+yi$ olmak üzere,

$$(i-1).\bar{z}+i.z=2-3i$$

olduğuna göre, $|z|$ kaçtır?

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{10}$ C) 2 D) 5 E) 10

13. $i=\sqrt{-1}$ ve $z=x+yi$ olmak üzere,

$$\frac{2.|z|^2}{z-\bar{z}}=\frac{z+\bar{z}}{i}$$

olduğuna göre, Re (z) – İm (z) farkı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

14. $i=\sqrt{-1}$ ve m ve n gerçel (reel) sayılardır.

$$x^2+(m-1)x+n=0$$

denkleminin bir kökü $1-2i$ olduğuna göre, m + n kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

15. $i=\sqrt{-1}$ ve $z=x+yi$ olmak üzere,

$$|z-3i|<|z+3|$$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $y<-x$ B) $y<x$ C) $y>x$ D) $y>-x$ E) $2y>-x$

16. $i=\sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$|z-4+i|=2$$

olduğuna göre, $|z-2i|$ ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 10

17.

$$z-2-i=2+2ni$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısının modülü 5 olduğuna göre, n pozitif sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18.

$$z=-7-24i$$

karmaşık sayısının kareköklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1+i$ B) $1-2i$ C) $2+3i$ D) $3-4i$ E) $4-5i$

19. x bir reel sayı olmak üzere,

$$z_1=-1+xi$$
$$z_2=x-i$$

karmaşık sayıları arasındaki uzaklık $3\sqrt{2}$ birim olduğuna göre, x değeri kaç olabilir?

A) -4 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

20. $i=\sqrt{-1}$ ve $z=x+yi$ olmak üzere,

$$|z-2|<2$$
$$y>x$$

şartlarını sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntülerinin oluşturduğu düzlemsel bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) $4\pi-2$ B) 4π C) $\pi-2$ D) π E) $\pi+2$

TESTİN ÇÖZÜMLERİ

1. $\dfrac{\sqrt{-2}.\sqrt{-8}+1}{\sqrt{(-3)^2}}=\dfrac{\sqrt{-1}.\sqrt{2}.\sqrt{-1}.\sqrt{8}+1}{|-3|}$

$=\dfrac{i.\sqrt{2}.i.2\sqrt{2}+1}{3}$

$=\dfrac{4.i^2+1}{3}$

$=\dfrac{-4+1}{3}$

$=-1$ dir.

Cevap: B

2. $i^{37}=(i^4)^9.i^1=1^9.i=i,$

$i^{-5}=i^{-5+8}=i^3=-i,$

$i^3=-i$

olduğundan, $i^{37}-2i^{-5}+i^3=i-2.(-i)-i=2i$ dir.

Cevap : D

3. $i^{-1}=i^{-1+40}=i^{39}$

$i^{-2}=i^{-2+40}=i^{38}$

$i^{-3}=i^{-3+40}=i^{37}$

$i^{-4}=i^{-4+40}=i^{36}$

. . .
. . .
. . .

$i^{-39}=i^{-39+40}=i^1$

O halde,

$i^{-1}+i^{-2}+i^{-3}+\ldots+i^{-39}=i+i^2+i^3+\ldots+i^{39}$

$=\underbrace{i-1-i+1}_{0}+\ldots+\underbrace{i^{37}+i^{38}+i^{39}}_{i-1-i}$

$=-1$ dir.

(Ardışık dört terimin toplamının 0 olduğuna dikkat ediniz.)

Cevap : B

4. $f(x)=\dfrac{2x^2-2x+2}{x^3+1}$

$f(i)=\dfrac{2i^2-2i+2}{i^3+1}$

$=\dfrac{-2-2i+2}{1-i}$

$=\dfrac{-2i.(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$=\dfrac{-2i(1+i)}{2}$

$=-i-i^2$

$=1-i$ dir.

Cevap : C

5. $\underset{(2+i)}{\dfrac{1}{2-i}}+\underset{(2-i)}{\dfrac{1}{2+i}}=\dfrac{2+i+2-i}{2^2+1^2}$

$=\dfrac{4}{5}$ tir.

Cevap : E

6. $z=\sqrt{-x^2+2x-1}+|-x|+2x$

$z=\sqrt{-1.(x-1)^2}-x+2x\ ,\quad (x<0)$

$z=\sqrt{-1}\,.\,|x-1|+x$

$z=x+(1-x)\,i$ bulunur.

$Re(z)=x$ ve $İm(z)=1-x$ tir.

O halde, $Re(z)+İm(z)=x+1-x=1$ dir.

Cevap: B

7. $\left|\dfrac{(2-i)^2.\sqrt{1-i\sqrt{3}}}{1+i}\right|$

$=\dfrac{|2-i|^2.\sqrt{|1-i\sqrt{3}|}}{|1+i|}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{2^2+(-1)^2}\right)^2.\sqrt{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$=\dfrac{(\sqrt{5})^2.\sqrt{\sqrt{4}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{5.\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=5$ tir.

Cevap : D

8. $\dfrac{1-2i}{1+i}+a+bi=3+2i$

$a+bi=3+2i-\dfrac{1-2i}{\underset{(1-i)}{1+i}}$

$a+bi=3+2i-\dfrac{1-2i-i-2}{2}$

$a+bi=3+\dfrac{1}{2}+2i+\dfrac{3i}{2}$

$a+bi=\dfrac{7}{2}+\dfrac{7}{2}i$ olduğundan,

$a=\dfrac{7}{2},\ b=\dfrac{7}{2}$ ve $a-b=\dfrac{7}{2}-\dfrac{7}{2}=0$ dır.

Cevap : A

9. $z_1-z_2=(a+i)-(2-i)=(a-2)+2i$

$\overline{z_1-z_2}=(a-2)-2i$

$|\overline{z_1-z_2}|=2\Rightarrow\sqrt{(a-2)^2+(-2)^2}=2$

$\Rightarrow (a-2)^2+2^2=2^2$

$\Rightarrow (a-2)^2=0$

$\Rightarrow a-2=0$

$\Rightarrow a=2$ dir.

Cevap : C

10. $(-1-i)^3.(2-2i)^4=-(1+i)^3.(2(1-i))^4$

$=-(1+i)^3.2^4.(1-i)^4$

$=-2^4.(1+i)^3(1-i)^3.(1-i)$

$=-2^4.((1+i)(1-i))^3.(1-i)$

$=-2^4.(2)^3.(1-i)$

$=-2^7(1-i)$

$=-2^7+2^7.i$

olduğundan, reel kısmı -2^7 dir.

Cevap : E

11. $\dfrac{i+1}{z}=1-i\Rightarrow z=\dfrac{1+i}{\underset{(1+i)}{1-i}}$

$z=\dfrac{2i}{2}$

$z=i$ dir.

O halde, $z^{2003}=i^{2003}=i^3=-i$ dir.

Cevap : A

12. $(i-1).\bar{z} + i.z = 2-3i$

$(i-1)(x-yi) + i(x+yi) = 2-3i$

$xi + y - x + yi + xi - y = 2-3i$

$-x + (2x+y)i = 2-3i$

olduğundan, $-x = 2$ ve $2x + y = -3$ tür.

$-x = 2 \Rightarrow x = -2$ ve

$2x + y = -3 \Rightarrow 2.(-2) + y = -3 \Rightarrow y = 1$ dir.

O halde, $z = -2+i$ ve $|z| = \sqrt{5}$ tir.

Cevap : A

13. $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$ dir.

$z + \bar{z} = 2x$ ve $z - \bar{z} = 2yi$ dir.

$|z|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$

ve $Re(z) - İm(z) = x - y$ dir.

$$\frac{2.|z|^2}{z-\bar{z}} = \frac{z+\bar{z}}{i} \Rightarrow \frac{2.|z|^2}{2yi} = \frac{2x}{i}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2xy$$
$$\Rightarrow (x-y)^2 = 0$$
$$\Rightarrow x - y = 0 \text{ dır.}$$

Cevap : C

14. Reel katsayılı ve köklerinin biri $1 - 2i$ olan $x^2 + (m-1)x + n = 0$ denkleminin diğer kökü $1 + 2i$ dir.

Köklerin Toplamı: $(1-2i) + (1+2i) = -\dfrac{m-1}{1}$

$2 = -m + 1$

$m = -1$ dir.

Köklerin Çarpımı: $(1-2i).(1+2i) = \dfrac{n}{1}$

$5 = n$ dir.

O halde, $m + n = (-1) + 5 = 4$ tür.

Cevap : C

15. $|z-3i| < |z+3|$

$|x + yi - 3i| < |x + yi + 3|$

$|x + (y-3)i| < |(x+3) + yi|$

$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} < \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$

$x^2 + (y-3)^2 < (x+3)^2 + y^2$

$x^2 + y^2 - 6y + 9 < x^2 + 6x + 9 + y^2$

$-6y < 6x$

$y > -x$ tir.

Cevap : D

16. $|z - 2i|$ demek z ile $2i$ karmaşık sayısı arasındaki uzaklık demektir.
$|z - 4 + i| = 2$ ise merkezi $(4, -1)$ ve yarıçapı 2 olan çemberdir ve z bu çember üzerindeki noktalardır. Bu noktalardan $2i$ karmaşık sayısına en uzak olan nokta ile aralarındaki uzaklığı bulmalıyız. Bu uzaklık, $2i = (0,2)$ noktasının $(4, -1)$ noktasına olan uzaklıktan 2 (yarıçap kadar daha) büyüktür.

$\sqrt{(4-0)^2 + (2-(-1)^2} + 2 = \sqrt{4^2+3^2} + 2$

$= 5 + 2 = 7$ dir.

Cevap : D

17. $z - 2 - i = 2 + 2ni$

$z = 4 + (2n + 1)i$ dir.

$|z| = 5 \Rightarrow \sqrt{4^2 + (2n+1)^2} = 5$

$\Rightarrow 4^2 + (2n+1)^2 = 5^2$

$\Rightarrow (2n+1)^2 = 3^2$

olduğundan, $2n + 1 = 3$ veya $2n + 1 = -3$ tür.
$2n + 1 = 3 \Rightarrow n = 1$ veya $2n + 1 = -3 \Rightarrow n = -2$ dir.
O halde, n pozitif sayısı 1 dir.

Cevap : A

18. ***1. yol:***

z nin kareköklerinin biri $a + bi$ olsun.
O halde, $(a + bi)^2 = z$ dir.

$z = (a + bi)^2 \Rightarrow -7 - 24i = a^2 - b^2 + 2abi$

$\Rightarrow -7 = a^2 - b^2$ ve $-24 = 2ab$ dir.

$a = 3$ ve $b = -4$ için $2ab = -24$ ve $a^2 - b^2 = -7$ olduğundan z nin kareköklerinden biri $3 - 4i$ dir.

2. yol:

şıklardan karesi, $-7 - 24i$ olan sadece $3 - 4i$ karmaşık sayıdır,

3. yol:

$|z| = \sqrt{7^2 + (24)^2} = 25$ tir ve z nin kareköklerinin uzunluğu $\sqrt{25} = 5$ tir. Şıklardan uzunluğu 5 olan sadece $3 - 4i$ dir.

Cevap : D

19. $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{2} \Rightarrow |-1 + xi - x + i| = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow |-(1 + x) + (1 + x)i| = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{(-(1+x))^2 + (1+x)^2} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2(x+1)^2} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow |x + 1|\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow |x + 1| = 3$ tür.

$\Rightarrow x + 1 = 3$ veya $x + 1 = -3$

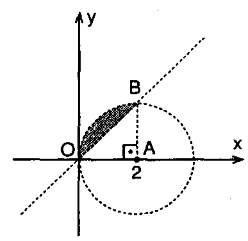
$\Rightarrow x = 2$ veya $x = -4$ tür.

Cevap : A

20. $|z - 2| < 2 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} < 2$

$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 < 2^2$

ifadesi merkezi (2, 0) noktası ve yarıçapı 2 birim olan çemberin iç bölgesidir.
$y > x$ ile çemberin iç bölgesinin kesişimi yandaki taralı bölge gibidir.



Şekildeki taralı alanın değeri, çeyrek dairenin alanından OAB diküçgenin alanı kadar eksiktir.

Üçgenin alanı,

$A_1 = \dfrac{2.2}{2} = 2$ birimkaredir.

Çeyrek çemberin alanı,

$A_2 = \dfrac{\pi . 2^2}{4} = \pi$ birimkaredir.

Taralı alan,
T.A $= A_2 - A_1 = \pi - 2$ dir.

Cevap : C

CEVAPLI TEST

1. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$(1 - i^{4n+2})(1 - i^3)(i^{8n} - i)$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) -4 B) -2 C) 2 D) 4 E) 8

2. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{43}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1 + i$ B) -1 C) 0 D) $1 - i$ E) 1

3. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$\frac{\sqrt{2}}{i - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + i}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{2\sqrt{2}\,i}{3}$ B) $-\frac{\sqrt{2}\,i}{3}$ C) $-\frac{4i}{3}$ D) $-\frac{4}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

4. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

olduğuna göre, P(i – 1) aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) i C) $i - 1$ D) $1 - i$ E) 1

5. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$(2 + 2i)^8 \cdot (i - 1)^{16}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) -2^{24} B) -2^{20} C) 2^{16} D) 2^{20} E) 2^{24}

6. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$(x - i)(1 + 2i) = 3 + (y - 1)i$$

olduğuna göre, y kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

7. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = \frac{i^3 + 1}{(i + 1)^3}$$

olduğuna göre, | z | kaçtır?

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

8. $$z = \frac{(\sqrt{2} - i)^2 (1 + 2i)}{\sqrt{3 - 4i}}$$

karmaşık sayısının uzunluğu kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. $$z = 2 - 3i$$

karmaşık sayısının çarpmaya göre tersinin reel kısmı kaçtır?

A) -2 B) -3 C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{2}{13}$ E) $\frac{3}{13}$

10. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$z = 1 + i$
$u = 2i$
$v = 2$

olduğuna göre, $\frac{\bar{z} \cdot \bar{u}}{\bar{v}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1 + i$ B) $i - 1$ C) $1 - i$ D) $-1 - i$ E) i

11. $i=\sqrt{-1}$ ve $z=a+bi$ olmak üzere,

$$z(1+i)+i=1$$

olduğuna göre, a^2+b^2 kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

12. $i^2=-1$ olmak üzere,

$$z_1 \cdot z_2 = 1+2i$$
$$\frac{z_1^2}{z_2}=2-i$$

olduğuna göre, $|z_1|^3$ kaçtır?

A) 1 B) $\sqrt{5}$ C) 5 D) 25 E) 30

13. $$4z.\bar{z}=4|z|-1$$

olduğuna göre, z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{i}{8}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{i}{4}$

C) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$ D) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$

E) $\sqrt{3}-i$

14. $$i+3z=|z|$$

olduğuna göre, z karmaşık sayısının sanal (imajiner) kısmı kaçtır?

A) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

15. Gerçel katsayılı 6. dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin dört tane farklı kökü 1, 2, $1+i$ ve $2-i$ dir.

Buna göre, bu denklemin diğer iki kökünün toplamı kaçtır?

A) $-1-2i$ B) $3+2i$ C) $1-2i$ D) 1 E) 3

16. $i^2=-1$ ve $z=x+yi$ olmak üzere,

$$|z|^2=8$$

olduğuna göre, $\bar{z}$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $3-i$ B) $-3-i$ C) $\sqrt{7}+i$

D) $\sqrt{5}+3i$ E) $\sqrt{3}-5i$

17. $i^2=-1$ olmak üzere,

$$z_1=1-2i$$
$$z_2=3-4i$$

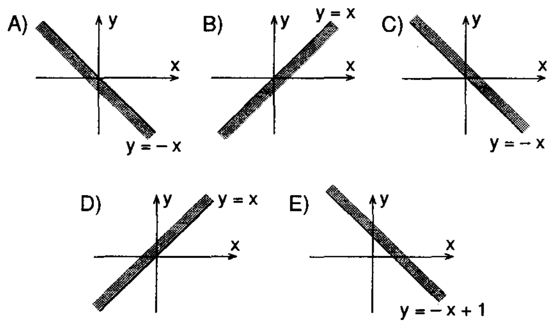
olduğuna göre, $|z_1-\bar{z}_2|$ kaçtır?

A) $2\sqrt{10}$ B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{3}$

18. $z=x+yi$ olmak üzere,

$$|z+1|\ge|\bar{z}-i|$$

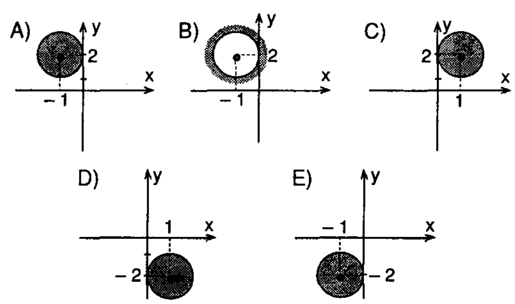
şartını sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?



19. $z=x+yi$ olmak üzere,

$$|z-1+2i|\le 1$$

şartını sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?



20. $$|z|=3$$

olduğuna göre, $|z-\sqrt{3}-i|$ nin en küçük değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

CEVAP ANAHTARI

1-D	2-B	3-D	4-A	5-D	6-E	7-D	8-C	9-D	10-D
11-B	12-C	13-B	14-B	15-E	16-C	17-A	18-B	19-D	20-A

28. BÖLÜM LOGARİTMA

A. TANIM

$a \in R^+ - \{1\}$ ve $x \in R^+$ olmak üzere, $a^y = x$ eşitliğini inceleyelim.
Bu eşitlikte; a değerini bulmak için **kök alma**, x değerini bulmak için **kuvvet** (üs) **alma**, y değerini bulmak için de **logaritma** işlemi yapılır.
$a \in R^+ - \{1\}$, $x \in R^+$ ve $y \in R$ olmak üzere,

$\boxed{a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x}$ tir.

Burada; y sayısı, x sayısının a tabanına göre logaritmasıdır.

Örnek:

1) $\log_2 8 = y \Rightarrow 8 = 2^y \Rightarrow y = 3$ tür.
2) $\log_a 64 = 3 \Rightarrow 64 = a^3 \Rightarrow a = 4$ tür.
3) $\log_3 x = -2 \Rightarrow x = 3^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$ dur.
4) $\log_a a = x \Rightarrow a = a^x \Rightarrow x = 1$ dir.
5) $\log_a 1 = n \Rightarrow 1 = a^n \Rightarrow n = 0$ dır.
6) $\log_5 (-25) = m \Rightarrow -25 = 5^m \Rightarrow m \notin R$ dir.

Sonuç:

1) $\log_a a = 1$
2) $\log_a 1 = 0$
3) $y = \log_a f(x) \Rightarrow f(x) > 0$

Örnek:

$$\log_{x-1} (9 - x)$$

ifadesinin bir reel sayı belirtmesi için x in hangi aralıkta olması gerektiğini bulalım.

Çözüm:

Tanım gereği,
$\log_{x-1} (9 - x) \in R \Rightarrow (9 - x > 0$, $x - 1 > 0$ ve $x - 1 \neq 1)$ dir.

Buna göre, $x < 9$ ve $x > 1$ ve $x \neq 2$ dir.

O halde, bu üç şarta uyan x reel sayılarının aralığı, $(1, 9) - \{2\}$ dir.

Örnek:

$$\log_5 (\log_3 (\log_2 x)) = 0$$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm:

$\log_5 (\log_3 (\log_2 x)) = 0 \Rightarrow \log_3 (\log_2 x) = 5^0 = 1$

$\Rightarrow \log_2 x = 3^1$

$\Rightarrow x = 2^3 = 8$ dir.

Örnek:

$$\log_3 (a^3.b.c) = 5$$

$$\log_3 \left(\frac{b^2}{c}\right) = 1$$

olduğuna göre, a.b çarpımını bulalım.

Çözüm:

$\log_3 (a^3.b.c) = 5 \Rightarrow a^3.b.c = 3^5$

$\log_3 \left(\frac{b^2}{c}\right) = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{c} = 3^1$

x

$a^3.b^3 = 3^6$

$a.b = 3^2$

$a.b = 9$ dur.

Örnek:

$$f(x) = \log_x (25 - x^2)$$

fonksiyonunun <u>en geniş</u> tanım aralığını bulalım.

Çözüm:

Tanım gereği,

$25 - x^2 > 0$ ve $x > 0$ ve $x \neq 1$ dir.

Buna göre,

$x^2 < 25 \Rightarrow x^2 - 25 < 0$

$\Rightarrow (x-5)(x+5) < 0$ dır.

x		-5		5	
$x^2 - 25$	+		−		+

çözüm

O halde, $x > 0$ ve $x \neq 1$ olduğundan,

$x \in (0,5) - \{1\}$ dir.

Örnek:

$\log_{\sqrt[3]{2}} a = 3$ ve $\log_{\sqrt{3}} b = 4$

olduğuna göre, a.b çarpımını bulalım.

Örnek:

$\log_{\sqrt[3]{2}} a = 3 \Rightarrow a = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \Rightarrow a = 2$ dir.

$\log_{\sqrt{3}} b = 4 \Rightarrow b = \left(\sqrt{3}\right)^4 \Rightarrow b = 9$ dur.

Buradan, $a.b = 18$ dir.

B. ÖZEL LOGARİTMALAR

1) Bayağı Logaritma

$y = \log_{10} x = \log x$ fonksiyonuna **10 tabanında logaritma** veya **bayağı logaritma** denir.

Örnek:

$\log_{10} 10 = \log 10 = 1$ dir.

2) Doğal Logaritma

$e = 2{,}71828....$ olmak üzere,

$y = \log_e x = \ln x$ fonksiyonuna **doğal logaritma** denir.

Örnek:

$\log_e e = \ln e = 1$ dir.

C. LOGARİTMANIN ÖZELLİKLERİ

$x, y \in R^+$ ve $a \in R^+ - \{1\}$ olmak üzere,

1) $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$

4) $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$

dir.

Örnek:

1) $\log 5 + \log 2 = \log (5.2) = \log 10 = 1$

2) $\log 300 - \log 3 = \log \left(\frac{300}{3}\right)$

$= \log 100$

$= \log (10^2)$

$= 2.\log 10 = 2$

3) $\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2} \underbrace{\log_5 5}_{1} = \frac{3}{2}$

Örnek:

$\log (2x - y) = \log x + \log y$

olduğuna göre, y nin x türünden eşitini bulalım.

Çözüm:

$\log (2x - y) = \log x + \log y$

$\Rightarrow \log (2x - y) = \log (x.y)$

$\Rightarrow 2x - y = x.y \Rightarrow 2x = x.y + y$

$\Rightarrow 2x = y.(x + 1)$

$\Rightarrow y = \frac{2x}{x+1}$ dir.

Örnek:

$$\log\ (a.b) = 3$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = 1$$

olduğuna göre, a değerini bulalım.

Çözüm:

1. yol:

$\log(a.b) = 3 \Rightarrow \log a + \log b = 3$

$\log\left(\frac{a}{b}\right) = 1 \Rightarrow \log a - \log b = 1$

$+$

$$2 \log a = 4$$

$$\log a = 2$$

$$a = 10^2 = 100 \text{ dür.}$$

2. yol:

$\log(a.b) = 3 \Rightarrow a.b = 10^3$

$\log\left(\frac{a}{b}\right) = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 10$

$\times$

$$a^2 = 10^4 \Rightarrow a = 10^2 = 100 \text{ dür.}$$

Örnek:

$$\log_2 \sqrt{2 . \sqrt[3]{2 . \sqrt{2}}}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\log_2 \sqrt{2 . \sqrt[3]{2 . \sqrt{2}}} = \log_2 \sqrt[12]{2^6 . 2^2 . 2}$$

$$= \log_2 \sqrt[12]{2^9}$$

$$= \log_2 2^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3}{4} \text{ tür.}$$

Örnek:

$$a = \sqrt[3]{b^2}$$

olduğuna göre, $\log_b \sqrt{a}$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$a = \sqrt[3]{b^2} \Rightarrow \log_b \sqrt{a} = \log_b \sqrt{\sqrt[3]{b^2}}$$

$$= \log_b \sqrt[6]{b^2}$$

$$= \log_b b^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \text{ tür.}$$

Örnek:

$$\log 5 = a,\ \log 3 = b,\ \log 2 = c$$

olduğuna göre, log (22,5) ifadesinin a, b, c türünden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\log\ (22{,}5) = \log\left(\frac{45}{2}\right)$$

$$= \log\left(\frac{5 . 3^2}{2}\right)$$

$$= \log 5 + \log 3^2 - \log 2$$

$$= \log 5 + 2 \log 3 - \log 2$$

$$= a + 2b - c \text{ dir.}$$

Örnek:

$$\log_5 x^2 = 6 + \log_5 \frac{1}{x}$$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm:

$$\log_5 x^2 = 6 + \log_5 \frac{1}{x} \Rightarrow 2.\log_5 x = 6 + \log_5 x^{-1}$$

$$\Rightarrow 2.\log_5 x = 6 - \log_5 x$$

$$\Rightarrow 3.\log_5 x = 6$$

$$\Rightarrow \log_5 x = 2$$

$$\Rightarrow x = 5^2 = 25 \text{ tir.}$$

Örnek:

$$\log 5 = n$$

olduğuna göre, log 4 değerinin a türünden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\log 4 = 2 \log 2 = 2.\log \frac{10}{5}$$

$$= 2.(\log 10 - \log 5)$$

$$= 2\ (1 - n) \text{ dir.}$$

$a \in R^+$, $a \neq 1$ ve $x \in R^+$ olmak üzere,

$$\boxed{a^{\log_a x} = x} \text{ tir.}$$

Örnek:

$3^{\log_3 5} = 5$, $e^{\ln 3} = 3$ ve $10^{\log A} = A$ dır.

Örnek:

$$(\sqrt{5})^{\log_5 9} + (27)^{\log_3 2}$$

işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$(\sqrt{5})^{\log_5 9} + (27)^{\log_3 2} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_5 3^2} + (3^3)^{\log_3 2}$$

$$= 5^{\frac{1}{2}.2.\log_5 3} + 3^{3.\log_3 2}$$

$$= 5^{\log_5 3} + 3^{\log_3 8}$$

$$= 3 + 8 = 11 \text{ dir.}$$

$$\boxed{a^{\log_b c} = c^{\log_b a}} \text{ dır.}$$

Örnek:

$9^{\log_3 10} = 10^{\log_3 9} = 10^{2.\log_3 3} = 10^2 = 100$ dür.

Örnek:

$$(10)^{\log_5 x} + x^{\log_5 10} = 200$$

eşitliğini sağlayan x değerini bulalım.

Çözüm:

$(x)^{\log_5 10} = (10)^{\log_5 x}$ olduğundan,

$$(10)^{\log_5 x} + x^{\log_5 10} = 2.(10)^{\log_5 x}$$

$$200 = 2.(10)^{\log_5 x}$$

$$10^2 = (10)^{\log_5 x}$$

$$2 = \log_5 x$$

$$x = 25 \text{ tir.}$$

Taban Değiştirme Kuralı:

$a \neq 1$, $b \neq 1$ ve $a, b, c \in R^+$ olmak üzere,

$$\boxed{\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a} = \frac{\log c}{\log a} = \frac{\ln c}{\ln a}} \text{ dır.}$$

Uyarı:

$a \neq 1$, $b \neq 1$ ve $a, b \in R^+$ olmak üzere,

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $\log x = \dfrac{1}{\log_x 10}$ olur.

Örnek:

$$\log_2 5 = x$$

olduğuna göre, $\log_5 10$ ifadesinin x türünden eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\log_5 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 5} = \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 5}$$

$$= \frac{1+x}{x} \text{ olur.}$$

Örnek:

$$\log_2 3 = x \text{ ve } \log_5 3 = y$$

olduğuna göre, $\log_6 10$ ifadesinin x ve y türünden eşitini bulalım.

$$\log_6 10 = \frac{\log_3 10}{\log_3 6} = \frac{\log_3 2 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + 1}$$

$$= \frac{x+y}{y.(1+x)} \text{ olur.}$$

Örnek:

$$a.b.c = 1000$$

olduğuna göre, $\frac{1}{\log_a 10} + \frac{1}{\log_b 10} + \frac{1}{\log_c 10}$

ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{1}{\log_a 10} = \log a, \quad \frac{1}{\log_b 10} = \log b, \quad \frac{1}{\log_c 10} = \log c$$

olduğundan,

$$\frac{1}{\log_a 10} + \frac{1}{\log_b 10} + \frac{1}{\log_c 10} = \log a + \log b + \log c$$

$$= \log(a.b.c)$$

$$= \log 1000$$

$$= 3 \text{ olur.}$$

Örnek:

$$\log_5 x + 4.\log_x 5 = 4$$

olduğuna göre, x değerini bulalım.

Çözüm:

$\log_5 x = a$ denilirse $\log_x 5 = \frac{1}{a}$ olur. Buradan,

$$\log_5 x + 4.\log_x 5 = 4$$

$$a + \frac{4}{a} = 4 \Rightarrow a^2 + 4 = 4a$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (a-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ olduğundan,}$$

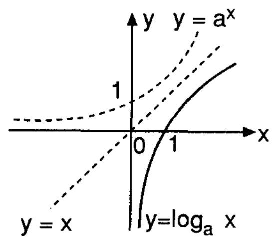
$$a = \log_5 x = 2 \Rightarrow x = 25 \text{ olur.}$$

D. LOGARİTMA FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ

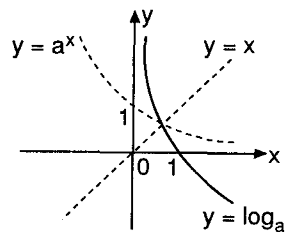
Üstel fonksiyon bire bir ve örten olduğu için ters fonksiyonu vardır ve bu fonksiyona **logaritma fonksiyonu** denir.

$y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği a nın durumuna göre çizilirse,

1. $a > 1$ için



2. $0 < a < 1$ için



grafikleri elde edilir.

Not:

$y = \log_a(mx + n)$ fonksiyonunun grafiği, aşağıdaki işlemler yapılarak çizilir.
1) Logaritmanın tanımından, f(x) in grafiği,
$mx + n > 0$
şartının sağlandığı bölgededir.
2) $y = 0$ ve $y = 1$ için sırasıyla x_0 ve x_1 değerleri bulunur. Grafik,
$(x_0, 0)$ ve $(x_1, 1)$ noktalarından geçer.

Örnek:

$$f(x) = \log_2 (x - 1)$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

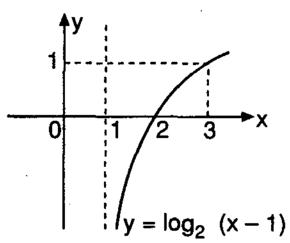
f(x) fonksiyonu, $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ için tanımlıdır.

$y = 0$ için, $\log_2 (x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ve

$y = 1$ için, $\log_2 (x - 1) = 1 \Rightarrow x = 3$

olduğundan grafik (2,0) ve (3,1) noktalarından geçer.

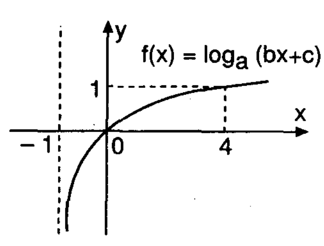
Taban 1 den büyük olduğundan, verilen fonksiyonun grafiği,



biçimindedir.

Örnek:

Şekilde grafiği verilen, y = f(x) fonksiyonunun denklemini bulalım.



Çözüm:

(0,0) ve (4,1) noktaları grafik üzerinde olduğundan,
$f(0) = 0 \Rightarrow \log_a (b.0 + c) = 0 \Rightarrow c = a^0 \Rightarrow c = 1$
$f(4) = 1 \Rightarrow \log_a (b.4 + c) = 1 \Rightarrow 4b + 1 = a$
$x = -1$ için f(x) tanımsız olduğundan,
$b.(-1) + c = 0 \Rightarrow -b + 1 = 0 \Rightarrow b = 1$ dir.
$b = 1$ olduğundan, $a = 4b + 1 \Rightarrow a = 5$ olur.
Buradan, $f(x) = \log_a (bx + c) \Rightarrow f(x) = \log_5 (x + 1)$
olarak bulunur.

E. LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TERSİ

$a \in R^+ - \{1\}$ ve $x \in R^+$ olmak üzere,

$\boxed{f(x) = \log_a x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = a^x}$ tir.

Örnek:

$f(x) = \log_5 x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = 5^x$ tir.

Örnek:

$$f(x) = y = 2 \log_5 x \Rightarrow x = 2 . \log_5 f^{-1}(x)$$
$$\frac{x}{2} = \log_5 f^{-1}(x)$$
$$5^{\frac{x}{2}} = f^{-1}(x)$$
$$(\sqrt{5})^x = f^{-1}(x) \quad \text{tir.}$$

Örnek:

Tanımlı olduğu değerler için,

$$f(x) = 4 . 7^{2x-5}$$

fonksiyonunun tersini bulalım.

Çözüm:

$$f(x) = 4 . 7^{2x-5} \Rightarrow \frac{f(x)}{4} = 7^{2x-5}$$
$$\Rightarrow \log_7 \left(\frac{f(x)}{4}\right) = 2x - 5$$
$$\Rightarrow 5 + \log_7 \left(\frac{f(x)}{4}\right) = 2x$$
$$\Rightarrow \frac{5}{2} + \frac{1}{2} . \log_7 \left(\frac{f(x)}{4}\right) = x \quad \text{tir.}$$

f(x) in tersi, $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} . \log_7 \left(\frac{x}{4}\right) = f^{-1}(x)$ ve

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{2} + \log_7 \sqrt{\frac{x}{4}} \quad \text{tür.}$$

F. LOGARİTMALI EŞİTSİZLİKLER

Bir eşitsizlik içinde bilinmeyenin logaritması varsa bu tür eşitsizliklere **logaritmalı eşitsizlikler** denir.

1) $a > 1$ olmak üzere,
$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$
(eşitsizliğin yönü değiştirilmez.)
2) $0 < a < 1$ olmak üzere,
$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$
(eşitsizliğin yönü değiştirilir.)

Örnek:

$\log_3 (\log_2 (x-1)) > 0 \Rightarrow \log_2 (x-1) > 3^0 = 1$

$\Rightarrow x - 1 > 2^1$

$\Rightarrow x > 3$ tür.

Örnek:

$\log_2 (x-3) < 4 \Rightarrow 0 < x - 3 < 2^4$

$\Rightarrow 3 < x < 19$ dur.

Örnek:

$\log_{\frac{1}{2}} (3x-1) < 0 \Rightarrow \log_{2^{-1}} (3x-1) < 0$

$\Rightarrow -\log_2 (3x-1) < 0$

$\Rightarrow \log_2 (3x-1) > 0$

$\Rightarrow 3x - 1 > 1$

$\Rightarrow x > \frac{2}{3}$ tür.

Örnek:

$$\log_2 (\log_5 (3x-1)) \leq 1$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\log_2 (\log_5 (3x-1)) \leq 1 \Rightarrow 0 < \log_5 (3x-1) \leq 2$

$\Rightarrow 5^0 < 3x - 1 \leq 5^2$

$\Rightarrow 2 < 3x \leq 26$

$\Rightarrow \frac{2}{3} < x \leq \frac{26}{3}$ bulunur.

O halde, $Ç = (\frac{2}{3}, \frac{26}{3}]$ olur.

G. BAYAĞI LOGARİTMA

1) Karekteristik ve Mantis

$x \in R^+$, $k \in Z$ ve $0 \leq m < 1$ olmak üzere,

$$\log x = k + m$$

eşitliğinde k tamsayısına x in **logaritmasının karekteristiği,** m reel sayısına da x in **logaritmasının mantisi** denir.

Örnek:

log 30 = 1,477 ifadesinde, 30 sayısının logaritmasının karekteristiği 1 ve mantisi 0,477 dir.

Örnek:

$$\log 2 = 0{,}301$$

olduğuna göre, log (800) değerinin karekteristik ve mantisini bulalım.

Çözüm:

$\log (800) = \log (2^3 . 10^2) = 2 + 3 \log 2$

$= 2 + 3.(0{,}301)$

$= 2 + 0{,}903$

$= 2{,}903$ olduğundan,

karekteristik 2 ve mantis 0,903 olur.

Örnek:

$$\log A = -3{,}954$$

olduğuna göre, log A nın karekteristik ve mantisini bulalım.

Çözüm:

$\log A = -3{,}954 \Rightarrow \log A = -3 - 1 + 1 - 0{,}954$

$= -4 + 0{,}046$

$= \bar{4}{,}046$

olduğundan, karekteristik -4 ve mantis 0,046 olur.

Uyarı:

> *$\overline{4},046 = -4 + 0,046$ ve*
> *$\overline{4},046 \neq -4,046$ olduğuna dikkat ediniz.*

Örnek:

$$\log 2 = 0,301$$

olduğuna göre, $(40)^{40}$ sayısının kaç basamaklı bir sayı olduğunu bulalım.

Çözüm:

$\log (40)^{40} = 40 . \log (40)$

$= 40 . (\log 2^2 . 10)$

$= 40 . (1 + 2 \log 2)$

$= 40 . (1 + 0,602)$

$= 40 . (1,602)$

$= 64,08$ olduğundan, karekteristik 64 ve basamak sayısı 65 tir.

Uyarı:

> *1 den büyük pozitif tamsayıların basamak sayısı, sayının logaritmasının karekteristiğinin bir fazlasıdır.*

2) Kologaritma

$x \in R^+$ olmak üzere, x in çarpmaya göre tersinin logaritmasına **x in kologaritması** denir ve **colog x** biçiminde gösterilir.

$\boxed{\text{colog } x = \log \frac{1}{x} = \log x^{-1} = -\log x}$ tir.

Örnek:

$$\log x = 1,73$$

olduğuna göre, colog x in karekteristiğini ve mantisini bulalım.

Çözüm:

$\log x = 1,73 \Rightarrow \text{colog } x = -\log x$

$= -1,73$

$= -1 - \mathbf{1} + \mathbf{1} - 0,73$

$= -2 + 0,27$

$= \overline{2},27$ dir.

colog x in karekteristiği -2 ve mantisi 0,27 dir.

Örnek:

$$\log A = \overline{3},52$$

olduğuna göre, colog A değerini bulalım.

Çözüm:

$\log A = \overline{3},52 \Rightarrow \text{colog } A = -(\overline{3},52)$

$= -(-3 + 0,52)$

$= 3 - 0,52$

$= 2,48$ dir.

ÇÖZÜMLÜ TEST

1. $\log_{x-3}(3x+19) = 2$

olduğuna göre, x değeri kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 10 E) 13

2. $\log_2(\log_2(\log_2(x-1))) = 1$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

A) 15 B) 17 C) 31 D) 33 E) 65

3. $\log_{\sqrt{27}}(3^x) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}$

olduğuna göre, x kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

4. $\log_2(x^2+x-2) = 3 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5. $\log_{(a.b)} b = \frac{1}{3}$

olduğuna göre, $\log_a(a.b)$ değeri kaçtır?

A) 3 B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

6. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{0,04} - \log_{\sqrt[3]{0,008}} 25 - \log_{0,25} \sqrt[3]{0,125}$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{13}{6}$ B) $\frac{19}{3}$ C) $\frac{37}{6}$ D) 6 E) $\frac{35}{6}$

7. $\log_3 5 = x$

olduğuna göre $\log_{75} 45$ ifadesinin x türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x+2}{x+3}$ B) $\frac{2x+1}{3x+1}$ C) $\frac{2x+1}{x+2}$

D) $\frac{x+2}{2x+1}$ E) $\frac{x+3}{x+2}$

8. $\log_n m = a$

olduğuna göre $\log_{m^3.n}(m.n^2)$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{2a+1}{3a+1}$ B) $\frac{a+2}{a+3}$ C) $\frac{2a+1}{a+3}$

D) $\frac{a+3}{a+2}$ E) $\frac{a+2}{3a+1}$

9. $f(x) = \log_{(x-2)}(6x - x^2)$

fonksiyonunu tanımlı yapan kaç farklı x tamsayısı vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10. $\log A^2 + \log \frac{1}{B} = 1$

$\log A - \log_{\frac{1}{10}} B = 5$

olduğuna göre, $\frac{B}{A}$ oranı kaçtır?

A) 100 B) 25 C) 10 D) 5 E) 2

11. $$x^{\ln 2} + 2^{\ln x} = 8$$

olduğuna göre, x kaçtır?

A) e^4 B) e^2 C) 4 D) 2 E) 1

12. $$5^{\log_{\sqrt{5}} 4} - (\sqrt{5})^{\log_{25} 16}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 18 B) 14 C) 10 D) 6 E) 2

13. $$2 . \log x = 1 + \log (x - \frac{5}{2})$$

denklemini sağlayan x kaçtır?

A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 5 D) 10 E) 20

14. $$\left(\log_{\frac{1}{9}} 125\right) . \left(\log_4 \sqrt{27}\right) . \left(\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{2}\right)$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) -3 B) -2 C) $-\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

15 $x_1 > x_2$ olmak üzere,

$$9^x - 8.3^x + 12 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre, $x_1 - x_2$ farkı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) 2 E) 3

16. $$f(x) = 5^{2x-1}$$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-1 + \log_5 x$

B) $\frac{1}{2} - \log_5 x$

C) $1 - \log_5 x$

D) $\frac{1}{2} + \log_5 \sqrt{x}$

E) $-\frac{1}{2} + \log_5 \sqrt{x}$

17. $$\log_2 (x-4) + \log_{\frac{1}{2}} (x+3) < 0$$

eşitsizliğinin <u>en geniş</u> çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) (1 , 10) B) (2, 12) C) (4, 10) D) (2, 4) E) (4, ∞)

18. $$\log 3 = 0,477$$

olduğuna göre, $(90)^{50}$ sayısı kaç basamaklıdır?

A) 95 B) 96 C) 97 D) 98 E) 99

19. $$\log 2 = 0,301$$

olduğuna göre, log (0, 0025) değeri kaçtır?

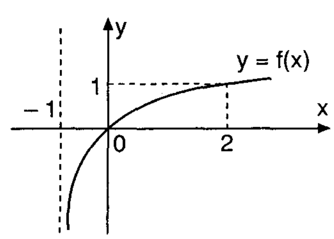
A) $\overline{3},699$ B) $\overline{3},398$ C) $\overline{3},301$ D) $\overline{2},699$ E) $\overline{2},301$

20. $$\log x = 0,543$$

olduğuna göre, colog $(\frac{x^2}{10})$ değeri kaçtır?

A) $\overline{1},914$ B) $\overline{1},044$ C) $\overline{1},056$ D) 0,056 E) $\overline{1},888$

21. Yandaki şekilde $f(x) = \log_a (x+1)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, $\log_6 (12.a)$ değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

TESTİN ÇÖZÜMLERİ

1. $\log_{x-3}(3x+19) = 2 \Rightarrow 3x+19 = (x-3)^2$

$$3x + 19 = x^2 - 6x + 9$$

$$0 = x^2 - 9x - 10$$

$$0 = (x-10).(x+1)$$

olduğundan, $x - 10 = 0$ veya $x + 1 = 0$

$x = 10$ veya $x = -1$ dir.

$x = -1$ verilen denklemi sağlamaz.
$x = 10$ verilen denklemi sağlar.

Cevap: D

2. $\log_2(\log_2(\log_2(x-1))) = 1$

$$\log_2(\log_2(x-1)) = 2$$

$$\log_2(x-1) = 2^2$$

$$(x-1) = 2^4$$

$x = 17$ dir.

Cevap: B

3. $\log_{\sqrt{27}}(3^x) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}$

$$\log_{3^{\frac{3}{2}}} 3^x = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{x}{\frac{3}{2}} \cdot \log_3 3 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} \cdot \log_3 3$$

$\frac{2x}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 2$ dir.

Cevap: E

4. $\log_2(x^2 + x - 2) = 3 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ ise,

$$\log_2(x^2 + x - 2) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 3$$

$$\log_2(x^2 + x - 2) - \log_2(x-1) = 3$$

$$\log_2 \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

$$\log_2 \frac{(x+2).(x-1)}{(x-1)} = 3$$

$$\log_2(x+2) = 3$$

$$(x+2) = 2^3$$

$x = 6$ dır.

Cevap: E

5. $\log_{(a.b)} b = \frac{1}{3} \Rightarrow (a.b)^{\frac{1}{3}} = b$

$$a.b = b^3$$

$a = b^2$ dir.

Buna göre,

$$\log_a(a.b) = \log_{b^2}(b^2.b)$$

$$= \log_{b^2} b^3$$

$$= \frac{3}{2}\log_b b$$

$= \frac{3}{2}$ dir.

Cevap: C

6. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{0,04} - \log_{\sqrt[3]{0,008}} 25 - \log_{0,25} \sqrt[3]{0,125}$

$= \log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{\frac{1}{25}} - \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{125}}} 25 - \log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

$= \log_{5^{-1}} \sqrt[3]{5^{-2}} - \log_{\sqrt[3]{5^{-3}}} 5^2 - \log_{2^{-2}} \sqrt[3]{2^{-3}}$

$= \dfrac{-\frac{2}{3}}{-1} - \dfrac{2}{-\frac{3}{3}} - \dfrac{-\frac{3}{3}}{-2}$

$= \dfrac{2}{3} + 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{6}$ dır.

Cevap: A

7. $\log_3 5 = x \Rightarrow \log_{75} 45 = \dfrac{\log_3 45}{\log_3 75}$

$= \dfrac{\log_3 (3^2 . 5)}{\log_3 (3 . 5^2)}$

$= \dfrac{\log_3 3^2 + \log_3 5}{\log_3 3 + \log_3 5^2}$

$= \dfrac{2 + \log_3 5}{1 + 2\log_3 5}$

$= \dfrac{2 + x}{1 + 2x}$

Cevap: D

8. $\log_n m = a \Rightarrow m = n^a$

$\log_{m^3.n} (m . n^2) = \log_{n^{3a}.n} (n^a . n^2)$

$= \log_{n^{3a+1}} n^{a+2}$

$= \dfrac{a+2}{3a+1} . \log_n n$

$= \dfrac{a+2}{3a+1}$

Cevap: E

9. f(x) fonksiyonunun tanımlı olması için,

$f(x) = \log_{(x-2)} (6x - x^2)$ olduğundan

$6x - x^2 > 0$, $x - 2 > 0$, $x - 2 \neq 1$

$x.(6 - x) > 0$, $x > 2$, $x \neq 3$ tür.

Buna göre,

$x.(6 - x) > 0 \Rightarrow$

x		0		6	
$x.(6-x)$	−		+		−

çözüm

ve $x > 2$, $x \neq 3$ olduğundan f(x) in tanım aralığı, $(2,6) - \{3\}$ tür. Fonksiyonu tanımlı yapan x tamsayıları da, 4 ve 5 olup 2 tanedir.

Cevap: A

10. $\log A^2 + \log \dfrac{1}{B} = 1$

$2\log A - \log B = 1$ dir.... (1)

$\log A - \log_{\frac{1}{10}} B = 5$

$\log A + \log B = 5$ tir.... (2)

(1) ve (2) denklemleri taraf tarafa toplanırsa,

$3\log A = 6 \Rightarrow \log A = 2 \Rightarrow A = 100$ bulunur.

$\log A = 2 \Rightarrow 2 + \log B = 5$

$\log B = 3$

$B = 10^3 = 1000$ dir.

O halde, $\dfrac{B}{A} = \dfrac{1000}{100} = 10$ olur.

Cevap: C

11. $x^{\ln 2} = 2^{\ln x}$ olduğundan,

$x^{\ln 2} + 2^{\ln x} = 8$

$2.2^{\ln x} = 8$

$2^{\ln x} = 2^2$

$\ln x = 2$

$x = e^2$ dir.

Cevap: B

12. $\log_{\sqrt{5}} 4 = 4.\log_5 2$ ve

$\log_{25} 16 = 2\log_5 2$ olduğundan,

$$5^{\log_{\sqrt{5}} 4} - (\sqrt{5})^{\log_{25} 16} = 5^{4.\log_5 2} - (\sqrt{5})^{2.\log_5 2}$$
$$= 5^{\log_5 16} - 5^{\log_5 2}$$
$$= 16 - 2$$
$$= 14 \text{ tür.}$$

Cevap: B

13. $2.\log x = 1 + \log (x - \frac{5}{2})$

$$\log x^2 - \log (\frac{2x-5}{2}) = 1$$
$$\frac{2.x^2}{2x-5} = 10$$
$$2.x^2 = 20x - 50$$
$$x^2 - 10x + 25 = 0$$
$$(x-5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ tir}$$

Cevap: C

14. $\log_{\frac{1}{9}} 125 = -\frac{3}{2} \cdot \log_3 5,$

$\log_4 \sqrt{27} = \frac{3}{4} \cdot \log_2 3,$

$\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{2} = \frac{2}{3} \cdot \log_5 2$ olduğundan,

$$\left(\log_{\frac{1}{9}} 125\right) . \left(\log_4 \sqrt{27}\right) . \left(\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{2}\right)$$
$$= -\frac{3}{2} \cdot \log_3 5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \log_2 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \log_5 2$$
$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \log_3 5 \cdot \log_2 3 . \log_5 2$$
$$= -\frac{3}{4} \text{ tür.}$$

Cevap: C

15. $9^x - 8.3^x + 12 = 0$ denkleminde,

$3^x = t$ dönüşümü yapılırsa,

$t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow (t-2).(t-6) = 0$

olduğundan, $t = 2$ ve $t = 6$ dır.

Buradan, $3^{x_1} = 6$ ve $3^{x_2} = 2$

$x_1 = \log_3 6$ ve $x_2 = \log_3 2$ olur.

O halde, $x_1 - x_2 = \log_3 6 - \log_3 2$

$$= \log_3 (\frac{6}{2})$$
$$= \log_3 3$$
$$= 1 \text{ olur.}$$

Cevap: C

16. $f(x) = 5^{2x-1}$ fonksiyonunda,

$$x = 5^{2.f^{-1}(x) - 1} \Rightarrow 5x = 5^{2.f^{-1}(x)}$$
$$\Rightarrow \log_5 (5x) = 2.f^{-1}(x)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} . \log_5 (5x) = f^{-1}(x)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} . (1 + \log_5 x) = f^{-1}(x)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_5 x = f^{-1}(x)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \log_5 \sqrt{x} = f^{-1}(x) \text{ olur.}$$

Cevap: D

17. $\log_2 (x-4) + \log_{\frac{1}{2}} (x+3) < 0$

$\log_2 (x-4) - \log_2 (x+3) < 0$

$\log_2 (\frac{x-4}{x+3}) < 0$

$0 < \frac{x-4}{x+3} < 1$

$x+3 > 0$ olduğundan eşitsizlik sisteminin her tarafı $x+3$ ile çarpılırsa,

$0 < x-4 < x+3$ olacağından,

$0 < x-4$ ve $x-4 < x+3$ olur.

Buradan, $x > 4$ bulunur.

($x-4 < x+3$ eşitliğinin her x reel sayısı için sağlandığına dikkat ediniz.)

Cevap: E

18. $(90)^{50} = A$ diyelim ve her iki tarafın logaritmasını alalım.

$\log A = 50.\log 90$

$= 50.(1 + 2\log 3)$

$= 50.(1 + 2.0{,}477)$

$= 50.(1{,}954)$

$= 97{,}70$ olduğundan karekteristik 97 ve basamak sayısı $97 + 1 = 98$ dir.

Cevap: D

19. $\log (0{,}0025) = \log (\frac{1}{400})$

$= -\log 400$

$= -(2 + 2\log 2)$

$= -(2 + 2.0{,}301)$

$= -(2{,}602)$

$= -2{,}602$

$= -2 - 1 + 1 - 0{,}602$

$= \bar{3}{,}398$ dir.

Cevap: B

20. $\text{colog} (\frac{x^2}{10}) = -\log (\frac{x^2}{10})$

$= -(2\log x - 1)$

$= 1 - 2\log x$

$= 1 - 2.(0{,}543)$

$= 1 - 1{,}086$

$= -0{,}086$

$= \bar{1}{,}914$ tür.

Cevap: A

21. $(x = 2$ ve $y = 1) \Rightarrow 1 = \log_a (2+1)$

$\Rightarrow a = 3$ olur.

Buradan, $\log_6 (12.a) = \log_6 (12.3)$

$= \log_6 6^2$

$= 2$ olur.

Cevap: B

CEVAPLI TEST

1. $\log_2 (x^2 - 10x - 3) = 3$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) – 11 B) – 10 C) 10 D) 11 E) 12

2. $\ln(\log(x+4)^e) = 1$

olduğuna göre , x kaçtır?

A) 1 B) e C) 4 D) 6 E) 10

3. $\log_5 625 = \log_{125} 5^a$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 16 B) 14 C) 12 D) 10 E) 8

4. $\log\left[\log_{\frac{1}{2}}(\ln x)\right] = 0$

olduğuna göre , x kaçtır?

A) $\frac{1}{e^2}$ B) $\frac{1}{e}$ C) $\frac{\sqrt{e}}{e}$ D) $\sqrt{e}$ E) e^2

5. $\log_a (a.b) = 3$

olduğuna göre , $\log_b (a.b)$ değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

6. $\log_{0,04} \sqrt{125} + \log_{25} \sqrt[3]{0,008}$

toplamının sonucu kaçtır?

A) $-\frac{25}{4}$ B) $-\frac{9}{2}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $-\frac{5}{4}$ E) $-\frac{1}{6}$

7. $\log_x y = m$

olduğuna göre, $\log_y (x.y)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) m + 1 B) m C) $\frac{m+1}{m}$ D) $\frac{m}{m+1}$ E) $\frac{m+1}{m+2}$

8. $\log_2 (A.B) = 4$

$\log_2 A - \log_2 \left(\frac{B}{2}\right) = 3$

olduğuna göre, A + B toplamı kaçtır?

A) 6 B) 10 C) 16 D) 18 E) 20

9. $\log_2 5 = a$ ve $\log_5 4 = b$

olduğuna göre, $\log_{\sqrt{2}} (a.b)$ değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

10. $5^{\log_5 3} + x = (\sqrt{2})^{\log_2 25}$

olduğuna göre, x değeri kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

11. $\frac{1}{\ln x} = \frac{\ln 5}{\ln 9} \cdot \log_{25} 3$

olduğuna göre, x değeri kaçtır?

A) e^4 B) e^3 C) e^2 D) e E) 1

12. $\log_3 5 = a$

olduğuna göre, $\log_{25} 81$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2a$ B) a C) $\frac{a}{2}$ D) $\frac{2}{a}$ E) $\frac{1}{2a}$

13. $2\log(x + 2) = \log x + \log(x + 5)$

olduğuna göre, x kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. $\log 5 = x$

olduğuna göre, log 8 in x türünden değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

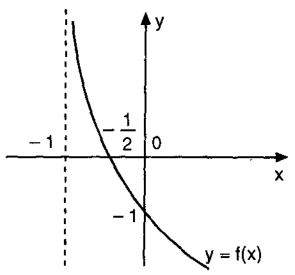
A) $x - 3$ B) $3x - 1$ C) $3 - x$ D) $3 - 3x$ E) $3x + 1$

15. $\log_5 7 = a$ ve $lo_5 2 = b$

olduğuna göre, log 35 ifadesinin a ve b türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{a-1}{b+1}$ B) $\frac{a}{b}$ C) $\frac{a+1}{b-1}$ D) $\frac{a-1}{b-1}$ E) $\frac{a+1}{b+1}$

16. Yandaki şekilde grafiği verilen $f(x) = \log_a (mx + n)$ fonksiyonunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?



A) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x - 1)$ B) $f(x) = \log_2 (x + 1)$

C) $f(x) = \log_4 (x + \frac{1}{2})$ D) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (2x + 2)$

E) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} (x + 1)$

17. $f(x) = 3 + \log_5 (x^3 - 2)$

olduğuna göre, $f^{-1}(5)$ değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18. $\log 2 = 0{,}301$

olduğuna göre, $(80)^{50}$ sayısı kaç basamaklıdır?

A) 94 B) 95 C) 96 D) 97 E) 98

19. $\log 3 = 0{,}477$

olduğuna göre, $\log\left(\frac{1}{30}\right)$ değeri kaçtır?

A) $\bar{1},477$ B) $\bar{1},523$ C) $\bar{2},477$ D) $\bar{2},523$ E) $\bar{3},523$

20. $\log x = 1{,}3$

olduğuna göre, colog $(10.x)^3$ değeri kaçtır?

A) 7,1 B) 6,9 C) $\bar{5},9$ D) $\bar{6},9$ E) $\bar{7},1$

21. $\log_{\frac{1}{4}} (4x - 4) \geq 0$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(\frac{1}{4}, 1]$ B) $(\frac{1}{2}, 1]$ C) $(1, \frac{5}{4}]$ D) $(\frac{5}{4}, 2]$ E) $(\frac{3}{2}, 2]$

CEVAP ANAHTARI

1-C	2-D	3-C	4-D	5-D	6-D	7-C	8-B	9-D	10-E	11-A
12-D	13-C	14-D	15-E	16-D	17-B	18-C	19-D	20-E	21-C	

29. BÖLÜM PERMÜTASYON, KOMBİNASYON, BİNOM FORMÜLÜ

A. SAYMANIN TEMEL KURALLARI

Bu bölümde, sayma işlemleri ile ilgili uygulamalar, örneklendirme yoluyla açıklanacaktır.

1. a) Bir sınıftaki öğrencilerin sayısını tespit etmek için,

b) Bir kitaplıktaki kitapların sayısını tespit etmek için,

c) Bir torbadaki bilyelerin sayısını tespit etmek için,

d) Sonlu bir kümenin eleman sayısını tespit etmek için,

bire bir eşleme yoluyla sayma yapılır.

2. a) A ve B kentleri arasında ulaşım, 4 farklı karayolu **veya** iki farklı demiryolu ile gerçekleştirilebiliyorsa; bir kişinin A dan B ye kaç farklı yoldan gidebileceğini bulmak için,

$4 + 2 = 6$ şeklinde,

b) Farklı 2 çift kundurası, farklı 3 çift spor ayakkabısı olan bir kişinin, spor ayakkabılarından **veya** kunduralarından birini kaç farklı şekilde seçip giyebileceğini bulmak için,

$2 + 3 = 5$ şeklinde,

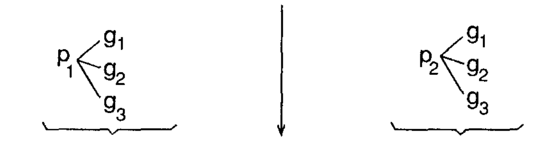
c) 4 tane gömleği, 3 tane tişörtü olan bir kişinin, gömleklerinden **veya** tişörtlerinden birini kaç farklı şekilde seçip giyebileceğini bulmak için,

$4 + 3 = 7$ şeklinde,

toplama yoluyla sayma yapılır.

3. a) Farklı 2 pantolonu $\{p_1, p_2\}$ ve farklı 3 gömleği $\{g_1, g_2, g_3\}$ olan bir kişinin, 1 pantolon ve 1 gömleği kaç farklı şekilde giyebileceğini bulmak için,

birinci pantolonu ile üç gömleğinden birini **veya** ikinci pantolonu ile üç gömleğinden birini



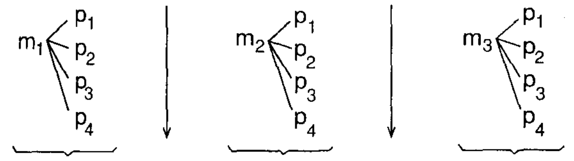
(3 durum) + (3 durum)

$= 2.3 = 6$ şeklinde,

pantolonlarının sayısı — gömleklerinin sayısı

b) 3 çeşit meşrubat $\{m_1, m_2, m_3\}$ ve 4 çeşit pasta $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ satılan bir pastanede, bir çeşit meşrubat ve bir çeşit pasta ile kahvaltı eden bir kişinin, kahvaltı etmek için kaç farklı seçim yapabileceğini bulmak için,

1. çeşit meşrubat ile 4 çeşit pastadan birini **veya** 2. çeşit meşrubat ile 4 çeşit pastadan birini **veya** 3. çeşit meşrubat ile 4 çeşit pastadan birini



(4 durum) + (4 durum) + (4 durum)

$= 3.4 = 12$ şeklinde

meşrubat çeşitlerinin sayısı — pasta çeşitlerinin sayısı

çarpma yoluyla sayma yapılır.

Sonuç:

Birbirinden bağımsız (ayrık) r tane işten,

1. iş n_1 değişik yoldan,

2. iş n_2 değişik yoldan,

3. iş n_3 değişik yoldan,

.
.

r. iş n_r değişik yoldan gerçekleştirilebiliyorsa,

***1)** Bu r tane işten biri, (1. si veya 2. si veya ... veya r. si)*

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots n_r$$

*değişik yoldan gerçekleştirilebilir ve bu şekildeki sayma işlemine **toplama kuralı** denir.*

***2)** Bu r tane iş birlikte, sıralı bir biçimde (1. si **ve** 2. si **ve** ... **ve** r. si birlikte ve sıralı bir biçimde)*

$$n_1 . n_2 . n_3 . \dots . n_r$$

*değişik yoldan gerçekleştirilebilir ve bu şekildeki sayma işlemine **çarpma kuralı** denir.*

Örnek:

7 çeşit soğuk içecek ve 5 çeşit sıcak içecek ikram edilen bir toplantıda, toplantıya katılanlardan birisinin, sıcak veya soğuk içeceklerden birini kaç farklı şekilde seçebileceğini bulalım.

Çözüm:

Bir kişi sıcak veya soğuk içeceklerden birini seçeceği için, (sıcak ve soğuk birer içeceği birlikte seçmeyeceğinden) $5 + 7 = 12$ değişik şekilde seçim yapabilir.

Örnek:

10 kız, 15 erkek öğrencinin bulunduğu bir sınıfta, bir başkan ve bir başkan yardımcısı seçilecektir.

a) Kaç farklı seçim yapılabileceğini,

b) Başkan erkek, başkan yardımcısı kız öğrenci olmak şartıyla kaç farklı seçim yapılabileceğini,

c) Hem başkan hem de yardımcısının ikisinin de kız veya ikisinin de erkek öğrenci olması şartıyla kaç farklı seçim yapılabileceğini,

d) Birisinin kız, diğerinin erkek öğrenci olması şartıyla kaç farklı seçim yapılabileceğini bulalım.

Çözüm:

a) Bir başkan ve bir başkan yardımcısının seçilebilmesi için sıralı bir biçimde iki iş birlikte yapılacaktır. Buna göre, sınıftaki $10 + 15 = 25$ öğrenciden bir başkan 25 değişik şekilde, başkan seçildikten sonra kalan 24 öğrenciden bir başkan yardımcısı 24 değişik şekilde seçilebilir. Bu iki seçim birlikte ve sıralı bir biçimde yapılacağından,

$25.24 = 600$ değişik şekilde seçim yapılabilir.

b) 15 erkek öğrenciden bir başkan 15 değişik şekilde ve 10 kız öğrenciden bir başkan yardımcısı 10 değişik şekilde seçilebileceğinden, başkan erkek, yardımcısı kız öğrenci olacak şekilde,

$15.10 = 150$ değişik seçim yapılabilir.

c) Başkan ve yardımcısının kız öğrenci olabileceği durumların sayısı, $10.9 = 90$ veya başkan ve yardımcısının erkek öğrenci olabileceği durumların sayısı $15.14 = 210$ olduğundan ikisinin de kız veya ikisinin de erkek öğrenci olduğu durumlarının sayısı, $90 + 210 = 300$ dür.

d) Başkanın kız, yardımcısının erkek öğrenci olduğu durumların sayısı, $10.15 = 150$ veya başkanın erkek, yardımcısının kız öğrenci olduğu durumların sayısı, $15.10 = 150$ olduğundan birinin kız, diğerinin erkek olduğu bütün durumlarını sayısı,

$150 + 150 = 300$ dür.

Burada, (c) ve (d) şıklarındaki durumların toplamının bütün durumlar (a seçeneği) olduğu,

$300 + 300 = 600$ şeklinde görülür.

Örnek:

A şehrinden B şehrine karayoluyla 4 farklı yoldan, B şehrinden C şehrine ise karayoluyla 5 farklı yoldan ve A dan C ye 3 farklı uçak şirketi vasıtasıyla havayolundan gidilebilmektedir.

Buna göre, A dan C ye gitmek isteyen bir kişinin kaç farklı seçim yapabileceğini bulalım.

Çözüm:

A dan C ye karayolundan $4.5 = 20$ farklı yoldan, hava yolundanda 3 farklı yoldan gidilebileceğinden A dan C ye karayolu veya havayolu ile toplam

$4.5 + 3 = 23$ farklı yoldan gidilebilir.

Örnek:

Üç arkadaş birlikte bir belediye otobüsüne biniyorlar. Otobüste boş olan 6 koltuğa kaç farklı şekilde oturabileceklerini bulalım.

Çözüm:

Üç arkadaştan birincisi boş olan 6 koltuktan birini 6 değişik şekilde seçip oturabilir. Birinci oturduktan sonra ikincisi boş kalan 5 koltuktan birini 5 değişik şekilde seçip oturabilir. İkincisi oturduktan sonra üçüncüsü boş kalan 4 koltuktan birini 4 değişik şekilde seçip oturabilir. O halde, bu üç arkadaş, boş olan 6 koltuğa,

$6.5.4 = 120$ değişik şekilde oturabilir.

Örnek:

4 mektubun 5 posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabileceğini bulalım.

Çözüm:

1. yol:

Bir mektup, bir posta kutusuna 5 farklı seçim yapılarak atılabilir. O halde, 4 mektup,

$5.5.5.5 = 5^4 = 625$ farklı şekilde atılabilir.

2. yol:

f : A → B, f = "Mektupların posta kutusuna atılması" şeklinde bir fonksiyon olarak düşünülürse,

A dan B ye fonksiyon sayısı:

s(A) = 4 (mektupların sayısı)

s(B) = 5 (posta kutularının sayısı) olmak üzere,

$[\,s(B)\,]^{s(A)} = 5^4 = 625$ tir.

Örnek:

10 kişinin katıldığı bir sınavın başarılı olma bakımından kaç değişik şekilde sonuçlanabileceğini bulalım.

Çözüm:

Sınava katılan her bir kişinin sınavı iki şekilde (başarılı olma ya da başarısız olma) sonuçlanabilir. Buna göre, sınava birlikte katılan 10 kişinin sınavı toplam,

$$\underbrace{2.2.2.\ \dots\ .2}_{10 \text{ tane}} = 2^{10} = 1024$$

farklı şekilde sonuçlanabilir.

Örnek:

n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısını bulalım.

Çözüm:

Kümenin her bir elemanı için, alt kümelerin elemanı olması ya da olmaması gibi iki durum vardır.

O halde, n tane elemandan her birinin, alt kümelerin elemanı olması ya da olmaması durumlarının toplam sayısı, dolayısıyla n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısı,

$$\underbrace{2.2.2.\ \dots\ .2}_{n \text{ tane}} = 2^n \text{ dir.}$$

Örnek:

A = { M, E, R, S, İ, N }

kümesindeki harfler kullanılarak, anlamlı ya da anlamsız, dört harfli;

a) Kaç farklı kelime yazılabileceğini,

b) "M" harfi ile başlayıp "E" harfi ile biten kaç kelime yazılabileceğini,

c) Sesli (ünlü) harfle başlayıp sessiz (ünsüz) harfle biten, harfleri tekrarsız kaç kelime yazılabileceğini,

d) "E" harfinin mutlaka bulunduğu kaç kelime yazılabileceğini,

e) Harfleri farklı, "E" harfinin mutlaka bulunduğu kaç kelime yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

xyzt biçiminde dört harfli kelimeler yazılıyor olsun. İstenen şartlarda kelimelerin yazılabilmesi için;

x , y, z, t seçilmesi gibi dört işlem bir arada, sıralı bir biçimde yapılacaktır. Dolayısıyla istenen durumların sayısı çarpma kuralıyla bulunur. O halde,

a) x, y, z ve t den her birinin yerine 6 harften herhangi biri yazılabilir.

x	y	z	t
6	6	6	6

Buna göre, dört harfli 6.6.6.6 = 1296 farklı kelime yazılabilir.

b) x yerine M, t yerine E, y ve z yerine de 6 harften herhangi biri yazılabilir.

x	y	z	t
1	6	6	1
{M}			{E}

Buna göre, "M" ile başlayıp "E" ile biten dört harfli, 1.6.6.1 = 36 değişik kelime yazılabilir.

c) x yerine sesli harflerden biri (E veya İ) 2 değişik şekilde, t yerine sessiz harflerden biri (M, R, S, N) 4 değişik şekilde seçilip yazılabilir. Harfleri tekrarsız kelimeler yazılacağından, x yerine ve t yerine yazılan birer harfin (2 harfin) dışında geriye kalan 6 – 2 = 4 harften biri 4 değişik şekilde y yerine ve bundan sonra geriye kalan 3 harften biri 3 değişik şekilde z yerine yazılabilir.

birinci iş	y	z	ikinci iş
2	4	3	4
{E, İ}			{M,R,S,N}

Buna göre, sesli ile başlayıp sessiz ile biten, harfleri tekrarsız, dört harfli, 2.4.3.4 = 96 değişik kelime yazılabilir.

d) 4 harfli bütün kelimelerin sayısından, "E" nin bulunmadığı 4 harfli kelimelerin sayısı çıkarılırsa, "E" nin kesinlikle bulunduğu 4 harfli kelimelerin sayısı bulunmuş olur. "E" harfinin bulunmadığı 4 harfli kelimeler ; x, y, z ve t yerine "E" dışında, diğer 5 harften herhangi biri 5 değişik şekilde yazılarak oluşturulabilir.

x	y	z	t
5	5	5	5

Buna göre, "E" nin bulunmadığı dört harfli, 5.5.5.5 = 625 değişik kelime yazılabilir.
Dört harfli bütün kelimelerin sayısı 1296 olduğundan, "E" harfinin bulunduğu dört harfli kelimelerin sayısı, 1296 – 625 = 671 dir.

e) Harfleri farklı, dört harfli kelimeler; x yerine, 6 harften herhangi biri, y yerine kalan 5 harften herhangi biri, z yerine kalan 4 harften herhangi biri, t yerine kalan 3 harften herhangi biri yazılarak oluşturulur.

1.iş	2.iş	3.iş	4.iş
x	y	z	t
6	5	4	3

Buna göre, harfleri farklı dört harfli, 6.5.4.3 = 360 değişik kelime yazılabilir.
"E" harfinin bulunmadığı, harfleri farklı dört harfli kelimeler ise; x yerine "E" hariç kalan 5 harften biri, y yerine kalan 4 harften biri, z yerine kalan 3 harften biri, t yerine kalan 2 harften biri yazılarak oluşturulabilir.

1.iş	2.iş	3.iş	4.iş
x	y	z	t
5	4	3	2

Buna göre, "E" harfinin bulunmadığı, harfleri farklı dört harfli kelimelerin sayısı, 5.4.3.2 = 120 dir.
O halde, harfleri farklı, "E" harfinin mutlaka bulunduğu, dört harfli, 360 – 120 = 240 kelime yazılabilir.

Örnek:
A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 } kümesinin elemanları kullanılarak, üç basamaklı,

a) Kaç farklı sayı yazılabileceğini,
b) Rakamları farklı, kaç değişik sayı yazılabileceğini,
c) Kaç değişik çift sayı yazılabileceğini,
d) Rakamları farklı kaç değişik tek sayı yazılabileceğini,
e) Rakamları farklı kaç değişik çift sayı yazılabileceğini,
f) 300 den büyük, rakamları tekrarsız 5 ile bölünebilen kaç değişik sayı yazılabileceğini,
g) 250 den büyük, rakamları tekrarsız kaç değişik sayı yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:
a) Yüzler basamağına 0 (sıfır) hariç diğer beş rakamdan herhangi biri, onlar ve birler basamağına da altı rakamdan herhangi biri yazılabilir.

yüzler b.	onlar b.	birler b.
5	6	6

Buna göre, üç basamaklı, 5.6.6 = 180 sayı yazılabilir.

b) Yüzler basamağına 0 (sıfır) hariç diğer beş rakamdan herhangi biri, rakamları tekrarsız olduğundan, yüzler basamağına yazılan rakamın dışında kalan beş rakamdan herhangi biri onlar basamağına, yüzler ve onlar basamağına yazılan iki rakamın dışında geriye kalan dört rakamdan herhangi biri birler basamağına yazılabilir.

1.iş		
yüzler b.	onlar b.	birler b.
5	5	4
{1,2,3,4,5} ↓ herhangi bir rakam,örneğin {1} yazılsın	{0,2,3,4,5} ↓ herhangi bir rakam,örneğin {0} yazılsın	{2,3,4,5}

Buna göre, üç basamaklı ve rakamları farklı, 5.5.4 = 100 sayı yazılabilir.
c) 0 (sıfır) hariç diğer beş rakamdan herhangi biri yüzler basamağına, altı rakamdan herhangi biri onlar basamağına, üç tane çift (0, 2, 4) sayıdan herhangi biri birler basamağına yazılarak çift sayılar oluşturulabilir.
Buna göre, üç basamaklı, 5.6.3 = 90 tane çift sayı yazılabilir.

d) Üç tane tek (1, 3, 5) sayıdan herhangi biri birler basamağına, rakamları tekrarsız olduğundan, birler basamağına yazılan rakam ve 0 hariç diğer dört rakamdan herhangi biri yüzler basamağına, birler ve yüzler basamağına yazılan iki rakam hariç, diğer dört rakamdan herhangi biri onlar basamağına yazılarak, üç basamaklı, rakamları tekrarsız tek sayılar oluşturulabilir.

2.iş		1.iş
yüzler b.	onlar b.	birler b.
4	4	3
{1,2,3,4}	{0,1,2,3}	{1,3,5}
herhangi bir rakam,örneğin {4} yazılsın		herhangi bir rakam,örneğin {5} yazılsın

Buna göre, rakamları farklı, üç basamaklı,
4.4.3 = 48 tek sayı yazılabilir.

e) ***1. yol:***
Üç basamaklı rakamları farklı tüm sayılardan, üç basamaklı rakamları farklı tek sayılar atılırsa geriye üç basamaklı, rakamları farklı çift sayılar kalır ve bunların sayısı, 100 – 48 = 52 dir.

2. yol:
Birler basamağı 2 ve 4 olan durumların sayısı birbirine eşit, birler basamağı 0 (sıfır) olan durumların sayısı bunlardan farklı olur. O halde, bu iki durumu ayrı ayrı hesaplayalım.

3.iş	2.iş	1.iş
yüzler b.	onlar b.	birler b.
4	5	1
{2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	{0}
	örneğin {1} yazılsın	

\+

2.iş	3.iş	1.iş
yüzler b.	onlar b.	birler b.
4	4	2
{1,3,4,5}	{0,3,4,5}	{2,4}
örneğin {1} yazılsın		örneğin {2} yazılsın

Buna göre, rakamları farklı, üç basamaklı,
4.5.1 + 4.4.2 = 52 tane çift sayı yazılabilir.

3. yol:
Sıfırın (0) yüzler basamağına geldiği durumları da hesaba katarak yaptığımız saymanın sonucundan, sıfırın (0) yüzler basamağında olduğu durumların sayısını çıkararak sonucu bulabiliriz.

2.iş	3.iş	1.iş
yüzler b.	onlar b.	birler b.
5	4	3
{0,1,2,3,5}	{0,1,2,3}	{0,2,4}
örneğin {5} yazılsın		örneğin {4} yazılsın

–

1.iş	3.iş	2.iş
yüzler b.	onlar b.	birler b.
1	4	2
{0}	{1,2,3,5}	{2,4}
		örneğin {4} yazılsın

Buna göre, rakamları tekrarsız, üç basamaklı,
5.4.3 – 1.4.2 = 52 çift sayı yazılabilir.

Uyarı:

Rakamları tekrarsız çift sayıların sayılması işleminde, yukarıdaki çözümlerin her üçünde de yapılan iki işlemin sonucunu toplama veya çıkarma işlemi yapılmıştır. O halde, bu üç yoldan herhangi biri, diğerlerine göre daha pratik bir çözüm değildir. Dolayısıyla bu yollardan hata yapma olasılığı daha düşük olan 1. yol tercih edilmelidir. Yani rakamları tekrarsız bütün sayılardan, rakamları tekrarsız bütün tek sayılar atıldığında geriye rakamları tekrarsız çift sayılar kalır.

f) 300 den büyük sayılar yazılabilmesi için yüzler basamağı 3, 4, 5 olmalıdır. Yüzler basamağına 3 ve 4 yazıldığında olabilecek durumların (birler basamağına 0 veya 5 gelmesi) sayısı birbirine eşit ve yüzler basamağına 5 yazıldığında olabilecek durumların (birler basamağına 0 gelmesi) sayısı bu ikisinden farklı olduğundan, yüzler basamağının 5 olduğu durumların sayısını ayrıca hesaplayalım. 5 ile bölünebilen sayıların birler basamağındaki rakam 0 (sıfır) veya 5 olduğundan,

1.iş	3.iş	2.iş
yüzler b.	onlar b.	birler b.
1	4	1
{5}	{1,2,3,4}	{0}

\+

1.iş	3.iş	2.iş
yüzler b.	onlar b.	birler b.
2	4	2
{3,4}	{0,1,2,4}	{0,5}
örneğin {3} yazılsın		örneğin {5} yazılsın

Buna göre, 300 den büyük, rakamları tekrarsız, 5 ile bölünebilen üç basamaklı, 1.4.1 + 2.4.2 = 20 tane sayı yazılabilir.

g) Rakamları tekrarsız, 250 den büyük sayıları, yüzler basamağı 2 olanlar ve yüzler basamağı 3, 4, 5 olanlar diye ayrı ayrı düşünürsek,

1.iş	2.iş	3.iş		1.iş	2.iş	3.iş
yüzler b.	onlar b.	birler b.		yüzler b.	onlar b.	birler b.
1	1	3	+	3	5	4
{2}	{5}	{1,3,4}		{3,4,5}	{0,1,2,4,5}	{1,2,4,5}
				↓ örneğin {3} yazılsın	↓ örneğin {0} yazılsın	

Buna göre, üç basamaklı, 250 den büyük, rakamları tekrarsız, $1.1.3 + 3.5.4 = 63$ tane sayı yazılabilir.

Örnek:

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ kümesinin elemanları kullanılarak yazılabilecek, iki basamaklı, rakamları farklı bütün doğal sayıların toplamını bulalım.

Çözüm:

A kümesinin elemanları ile rakamları farklı iki basamaklı,

onlar b.	birler b.
5	4

$5.4 = 20$ tane doğal sayı yazılabilir.

Bu beş tane rakamın herbirinin basamaklarda bulunma sayıları eşittir. Buna göre,

$\dfrac{20}{5} = 4$ olduğundan, bu rakamlardan biri, dörder defa birler ve onlar basamağında bulunur.

O halde, bu rakamlar birler basamağına geldiğinde basamak değerlerinin toplamı, $4.(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 60$ ve bu rakamlar onlar basamağına geldiğinde basamak değerlerinin toplamı, $10.60 = 600$ olacağından, bu rakamlarla yazılabilecek 20 sayının toplamı, $600 + 60 = 660$ olur.

Örnek:

Asal çarpanlarına ayrılmış şekli,

$$2^7.3^4.5^3$$

olan sayının pozitif bölenlerinin sayısını bulalım.

Çözüm:

Bu sayının, 2 nin kuvveti olan bölenlerinin kümesi:

$$A = \{ 2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^7 \}$$

3 ün kuvveti olan bölenlerinin kümesi:

$$B = \{ 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4 \}$$

5 in kuvveti olan bölenlerinin kümesi:

$$C = \{ 5^0, 5^1, 5^2, 5^3 \} \text{ ve}$$

A, B ve C kümesinden seçilen birer elemanın çarpımı, $2^7.3^4.5^3$ sayısının pozitif bölenlerinden herhangi biri olacağından, bu sayının bütün pozitif bölenlerinin sayısı; A, B ve C kümelerinden birer tane elamanın birlikte seçildiği bütün durumların sayısı kadardır. Buna göre, $2^7.3^4.5^3$ sayısının pozitif bölenlerinin sayısı:

$$\begin{aligned} s(A).s(B).s(C) &= (7 + 1).(4 + 1).(3 + 1) \\ &= 8.5.4 \\ &= 160 \text{ tır.} \end{aligned}$$

B. PERMÜTASYON (SIRALAMA)

r ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, sonlu n elemanlı bir A kümesinin birbirinden farkı **r** ($r \leq n$) elemanının her bir **sıralanışına** (dizilişine) A kümesinin **r li bir permütasyonu** denir.

> **n elemanlı** bir kümenin **r li** tüm **permütasyonlarının sayısı P(n, r)** biçiminde gösterilir.
>
> $P(n, r) = \underbrace{n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-r+1)}_{r \text{ tane çarpan}} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ dir.

n = r olması durumunda, yani n pozitif tamsayı olmak üzere, **A** kümesinin **elemanlarının** birbirinden farklı her **sıralanışına** (dizilişine) A kümesinin bir **permütasyonu** denir.

> A kümesinin permütasyonlarının sayısı,
>
> $P(n, n) = n!$ dir.

Örnek:

a) 10 arkadaştan herhangi üçünün yan yana kaç değişik şekilde oturabileceğini,

b) 10 arkadaşın tamamının yan yana kaç farklı şekilde oturabileceğini bulalım.

Çözüm:

a) 10 arkadaştan 3 ünün, 10 un 3 lü permütasyonlarının sayısı kadar sayıda yan yana oturabileceği durum vardır. O halde, P(10, 3) = 10.9.8 = 720 dir.
Veya, 10 arkadaştan 3 ünün yan yana oturuşları xyz biçiminde olsun. x yerine 10 kişiden herhangi biri, y yerine kalan 9 kişiden herhangi biri, z yerine kalan 8 kişiden herhangi biri gelebilir. Bu durumda xyz şeklindeki bütün sıralanışların sayısı: 10.9.8 = 720 dir.

b) 10 kişinin tamamının yan yana oturabileceği P(10, 10) = 10! değişik durum olur.

Örnek:

"İSTANBUL" kelimesinin harfleri birer kez kullanılarak, anlamlı ya da anlamsız;

a) 4 harfli kaç kelime yazılabileceğini,

b) "A" ile başlayan 4 harfli kaç kelime yazılabileceğini,

c) "A" ile başlayıp "T" ile biten 8 harfli kaç kelime yazılabileceğini,

d) "S" harfinin olmadığı 5 harfli kaç kelime yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

a) Harfleri tekrarsız olduğundan çözümü permütasyonla yapabiliriz. 8 harfin 4 lü permütasyonlarının sayısı kadar 4 harfli kelimeler yazılabilir.
P(8, 4) = 8.7.6.5 = 1680

b) ***1. yol:***

8 harfin herbirinin ilk harf olduğu durumların sayısı birbirine eşit olacağından "A" ile başlayan 4 harfli kelimelerin sayısı, $\frac{1}{8}$.P(8,4) = 210 dur.

2. yol:

İlk harf "A" olacağına göre, diğer üç harf kalan 7 harften 3 ü olacaktır. O halde, "A" ile başlayan 4 harfli kelimelerin sayısı P(7, 3) = 7.6.5 = 210 dur.

c) "A" ile başlayıp "T" ile biteceğine göre, diğer 6 harfin yerine kalan harfler gelecektir. Buna göre, "A" ile başlayıp "T" ile biten 8 harfli P(6, 6) = 6! = 720 kelime yazılabilir.

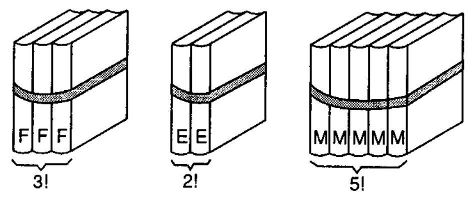
d) "S" harfi olmayacağına göre, kalan 7 harfin 5 iyle P(7, 5) = 7.6.5.4.3 = 2520 değişik beş harfli kelime yazılabilir.

Örnek:

Farklı 5 matematik, farklı 3 fizik ve farklı 2 edebiyat kitabının, aynı branşın kitaplarının tümü bir arada olmak şartıyla, kitaplığın bir rafına kaç farklı şekilde dizilebileceğini bulalım.

Çözüm:

Aynı branşın kitaplarının tümü bir arada olacağına göre, herhangi bir branşın tüm kitaplarını bir eleman gibi düşünerek sıralama yaparsak, fizik (F), edebiyat (E) ve matematik (M) branşlarının farklı sıralanışlarının sayısı 3! fizik, edebiyat ve matematik kitaplarının kendi aralarındaki yer değiştirmelerinin sayısı sırasıyla 3!, 2! ve 5! dir.
Bu dört iş birlikte yapıldığında istenilen şekildeki dizilişler gerçekleşeceğinden,



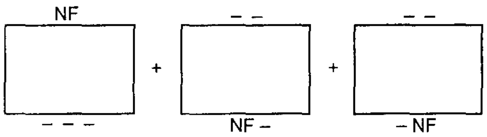
FEM → 3!.(3!.2!.5!) = 3!.3!.2!.5! dir.

Örnek:

Aralarında Nermin ve Feyza'nın da bulunduğu beş kişilik bir yönetim kurulu, dikdörtgen şeklindeki bir toplantı masasının karşılıklı iki kenarına, bir tarafta iki karşılarında üç kişi olacak şekilde oturuyorlar.

Toplantıda Nermin ve Feyza'nın yan yana olmaları şartıyla, bu beş kişinin kaç değişik şekilde oturabileceğini bulalım.

Çözüm:



Şekilden görüldüğü gibi, Nermin ve Feyza yan yana oturduktan sonra, kalan 3 koltuğa üç kişi $3! = 6$ değişik şekilde oturabilir. Nermin ve Feyza kendi aralarında $2! = 2$ değişik şekilde yer değiştirebilir. Şekilde gösterilen üç konum birinci iş, Nermin ile Feyza'nın yan yana oturması ikinci iş, kalan üç kişinin boş koltuklara oturması üçüncü iş olmak üzere, bu üç iş birlikte,

$$3.2!.3! = 36$$

değişik şekilde gerçekleşebilir.

Örnek:

$\dfrac{P(7, r)}{P(6, r)} = \dfrac{7}{5}$ olduğuna göre, r yi bulalım.

Çözüm:

$$\frac{P(7, r)}{P(6, r)} = \frac{7}{5} \Rightarrow 5.P(7, r) = 7.P(6, r)$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \frac{7!}{(7-r)!} = 7 \cdot \frac{6!}{(6-r)!}$$

$$\Rightarrow \frac{5.7!}{(7-r).(7-r-1)!} = \frac{7!}{(6-r)!}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{7-r} = 1$$

$$\Rightarrow 5 = 7 - r \Rightarrow r = 2 \text{ dir.}$$

Uyarı:

$P(n, 1) = n$, $P(n, n) = n!$ dir.

Örnek:

$$P(n+1,\ n-1) + P(n,\ n-2) = 6.P(n, n)$$

olduğuna göre, n değerini bulalım.

Çözüm:

$$P(n+1,\ n-1) + P(n,\ n-2) = 6.P(n, n)$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1-(n-1))!} + \frac{n!}{(n-(n-2))!} = 6.n!$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)!}{2!} + \frac{n!}{2!} = 6.n!$$

$$\Rightarrow (n+1)! + n! = 12.n!$$

$$\Rightarrow (n+1).n! = 11.n!$$

$$\Rightarrow n = 10 \text{ dur.}$$

1) Tekrarlı Permütasyon

A yı iki kez kullanarak yazılabilecek iki harfli kelimeler $2! = 2$ tane değil, bir tanedir. (AA) Burada A lar farklı olsaydı (A_1, A_2) yazılabilecek kelimelerin sayısında (2), A ların kendi arasındaki yer değiştirmelerinin sayısı (2!) oranında azalma olduğu görülmektedir.

Yani, $2! \cdot \dfrac{1}{2!} = 1$ dir.

Benzer şekilde, B yi üç kez kullanarak yazılabilecek üç harfli kelimeler $3! = 6$ tane değil, bir tanedir. (BBB) Burada da B ler farklı olsaydı (B_1, B_2, B_3) yazılabilecek kelimelerin sayısında ($3! = 6$), B lerin kendi arasındaki yer değiştirmelerinin sayısı (3!) oranında azalma olur.

O halde, bu iki işin birlikte gerçekleştirilmesi durumunda, yani A yı iki kez, B yi üç kez kullanarak yazılabilecek beş harfli kelimeler 120 tane değil, iki iş birlikte gerçekleştirildiği için, A ların kendi aralarındaki yer değiştirmelerinin sayısı (2!) **ve** B lerin kendi aralarındaki yer değiştirmelerinin sayısı (3!) oranlarında, yani toplam 2!.3! oranında daha az sayıdadır.

n_1 tanesi **birinci** türden, n_2 tanesi **ikinci** türden, n_3 tanesi **üçüncü** türden, ... , n_r tanesi **r yinci** türden olmak üzere toplam, $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$ tane elemanın birbirinden farklı sıralanışlarının sayısı,

$$\frac{n!}{n_1!.n_2!.n_3!. \ldots .n_r!} \text{ dir.}$$

Örnek:

"MATEMATİK" kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek, dokuz harfli,

a) Kaç değişik kelime yazılabileceğini,

b) "A" ile başlayan kaç değişik kelime yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

a) 2 tane M, 2 tane A, 2 tane T harfi olduğundan yazılabilecek 9 harfli farklı kelimelerin sayısı,

$$\frac{9!}{2!.2!.2!} \text{ dir.}$$

b) ***1. yol:***

A ların ikisi aynı olduğundan, A lardan bir tanesi ilk harf olarak yazılsın. O halde, kalan 8 harften 2 tanesi M, 2 tanesi T ve 1 tanesi A olduğundan, bu 8 harfin A nın yanına getirilmesiyle oluşturulabilecek 9 harfli kelimeler (8 harf sıralanacağından)

A	....
1	8!

$$\longrightarrow \frac{8!}{2!.2!} \text{ dir.}$$

2. yol:

9 harfin hepsinin farklı olduğunu düşünerek 9 harfin istenilen şartlardaki sıralanışlarının sayısını bulduktan sonra, aynı harflerin kendi aralarında yer değiştirmelerinden dolayı ortaya çıkan azalmaları hesaba katarsak,

$$\underset{\{A,\,A\}}{\underline{2}} \cdot \underset{\{A,\,T,\,T,\,M,\,M,\,E,\,İ,\,K\}}{\cdots\cdots\cdots}$$

$\downarrow$

{ A } yazılsın.

olduğundan, $\dfrac{2.8!}{2!.2!.2!} = \dfrac{8!}{2!.2!}$ dir.

Sonuç:

Tekrarlı permütasyonların hesaplanmasında, sıralanacak bütün elemanlar birbirinden farklı düşünülerek istenilen şartlardaki sıralamaların sayısı bulunduktan sonra, aynı tür elemanların kendi aralarındaki yer değiştirmelerinden dolayı ortaya çıkan azalmalar hesaba katılarak çözüm yapılır.

Örnek:

1 i bir kez, 2 yi iki kez, 3 ü üç kez, 4 ü dört kez kullanarak, 10 basamaklı kaç farklı tek sayı yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

2.iş	1.iş
....	birler b.
9!	4
	{1,3,3,3}

1, 3, 3, 3 rakamlarından biri birler basamağına yazıldıktan sonra, kalan 9 rakam diğer basamaklara 9! kadar değişik sayıda sıralanabilir. Buna göre, istenen tek sayılar,

$$\frac{4.9!}{2!.3!.4!} = \frac{9.8.7!}{2.6.3!}$$

$$= 7! = 5040 \text{ tır.}$$

Örnek:

100233344 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek, 9 basamaklı kaç farklı çift sayı yazılabileceğini bulalım.

Çözüm:

1. yol:

9 basamaklı tüm sayılardan, 9 basamaklı tek sayılar atılırsa geriye 9 basamaklı çift sayılar kalır. Buna göre,

1.iş	2.iş		2.iş	3.iş	1.iş
10^8 ler basamağı	....		10^8 ler basamağı	....	birler b.
7	8!	–	6	7!	4
{1,2,3,3,3,4,4}			{2,3,3,3,4,4}		{1,3,3,3} $\downarrow$ örneğin {1} yazılsın

2 tane 0 (sıfır), 3 tane 3 ve 2 tane 4 olduğundan,

$$\frac{7.8! - 6.4.7!}{2!.3!.2!} = \frac{32.7!}{24}$$

$$= \frac{4.7!}{3} \text{ tür.}$$

2. yol:

Birler basamağı 0 (sıfır) olan sayılarla, birler basamağı 0 (sıfır) olmayan çift sayıların adedini ayrı ayrı bulalım.

2.iş	3.iş	1.iş		2.iş	3.iş	1.iş
10^8 ler basamağı	......	birler b.		10^8 ler basamağı	......	birler b.
7	7!	2	+	6	7!	3
{1,2,3,3,3,4,4}		{0,0}		{1,3,3,3,4,4}		{2,4,4} ↓ örneğin {2} yazılsın

$$\frac{7.2.7! + 6.3.7!}{2!.3!.2!} = \frac{4.7!}{3} \quad \text{tür.}$$

Örnek:

6 oyuncağın, üç kardeşten en küçüğüne 3, en büyüğüne 1, ortancaya 2 oyuncak verilmek şartıyla, kaç farklı şekilde paylaştırılabileceğini bulalım.

Çözüm:

6 oyuncak sayı bakımından birinciye (en küçük çocuğa) 3, ikinciye (en büyük çocuğa) 1, üçüncüye (ortanca çocuğa) 2 tane verileceğinden,

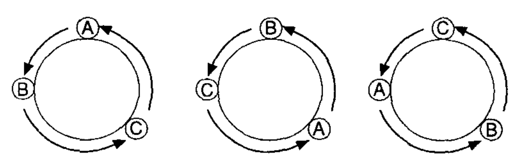
$$\frac{6!}{3!.2!} = \frac{6.5.4.3!}{6.2} = 60$$

değişik şekilde paylaştırılabilir.

2) Dairesel (Dönel) Permütasyon

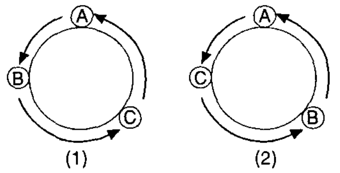
Sonlu bir kümenin elemanlarının bir çember üzerinde birbirlerine göre farklı biçimde sıralanışlarından herbirine bu elemanların **bir dairesel permütasyonu** veya **dönel sıralanması** denir.

Örneğin; A, B, C kişilerinin yuvarlak bir masa etrafında birbirlerine göre, farklı bir şekilde oturdukları durumların sayısı,



Yukarıdaki şekillerde, sıralanışlar farklı görünse de A, B, C kişilerinin birbirlerine göre durumları göz önüne alınırsa üçünün de aynı bir dairesel permütasyon (dönel sıralama) olduğu görülür.

Bu üç kişinin yuvarlak bir masa etrafında birbirlerine göre farklı bir sıralanışla oturdukları durumlar aşağıdaki iki şekilde görülmektedir.



(1) (2)

Şekilden de görüldüğü gibi üç kişi yuvarlak bir masa etrafında farklı 2 biçiminde sıralanmaktadır. Ayrıca, herhangi bir kişinin, iki şekilde de diğer ikisine göre sabit bir noktada olduğu gözlemlenebilir.

		1. şekil	2. şekil
Örneğin;	A için,	$B \to C$	$C \to B$
	B için,	$C \to A$	$A \to C$
	C için,	$A \to B$	$B \to A$

O halde, sonlu n elemanlı bir kümenin elemanlarının birbirinden farklı dairesel permütasyon (dönel sıralanış) sayısını hesaplamak için, kümenin herhangi bir elemanının, yerini değiştirmemek üzere sabit bir noktaya konulduğu düşünülür. Sonra, kalan (n – 1) elemanın her permütasyonu farklı bir sıralanış olur. Dolayısıyla kalan (n – 1) eleman toplam (n – 1)! sayıda farklı biçimde sıralanabilir.

Sonuç:

*Birbirinden farklı, sonlu **n** elamanın **dairesel permütasyon** (dönel sıralama) **sayısı, (n – 1)!** dir.*

Örnek:

7 öğrencinin, okul kantininde yuvarlak bir masa etrafında kaç farklı biçimde oturabileceğini bulalım.

Çözüm:

7 eleman, dairesel olarak (7 – 1)! = 720 değişik biçimde sıralanabilir.

Uyarı:

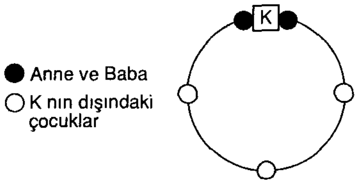
Sonlu n elemanın dairesel olarak farklı sıralanışlarının sayısı hesaplanırken, elemanlardan herhangi biri belli bir noktaya sabitlendikten sonra, kalan (n – 1) elemanın sıralanışları, yan yana sıralanışlarda olduğu gibi düşünülür.

Örnek:

Anne, baba ve dört çocuğunun, sadece en küçük çocuk anne ve babasının arasında olacak şekilde, yemek masasının etrafında kaç farklı şekilde sıralanabileceklerini bulalım.

Çözüm:

1. yol:

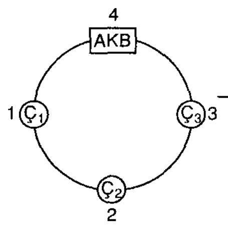


En küçük çocuk (K) bir sandelyeye oturduktan sonra, bir tarafına anne, diğer tarafına baba otursun. Anne ve babadan biri, örneğin önce anne, en küçük çocuğun bir yanına $2! = 2$ değişik şekilde, ardından baba, bu çocuğun boş kalan yanına 1 şekilde oturur. Bundan sonra da diğer üç çocuk kalan yerlere $3! = 6$ değişik şekilde oturabilirler. O halde, en küçük çocuğun anne ve babasının arasında oturduğu bütün durumların sayısı,

$$2!.1.3! = 12 \text{ dir.}$$

2. yol:

Anne (A), en küçük çocuk (K) ve baba (B) bir eleman gibi düşünülürse, diğer üç çocukla birlikte toplam dört elemanın dairesel sıralanışı söz konusu olur. Bununla birlikte anne ve baba kendi arasında $2! = 2$ değişik şekilde yer değiştirebilir. O halde, bu şekildeki bütün sıralanışların sayısı,



$\longrightarrow (4-1)!.2! = 12$ olur.

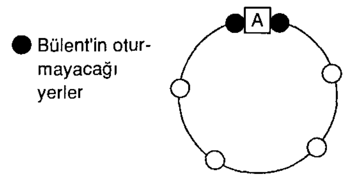
Örnek:

Aralarında Ali ve Bülent'in de bulunduğu 7 arkadaş, yuvarlak bir masa etrafında oturuyorlar.

Ali ile Bülent'in yan yana olmadığı kaç farklı sıralanış olduğunu bulalım.

Çözüm:

1. yol:



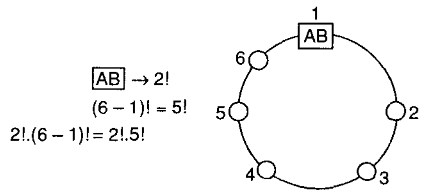
İlk önce Ali (veya önce Bülent) belli bir yere, yer değiştirmemek üzere, otursun. İki yanına Bülent'in dışında diğer arkadaşlarından herhangi biri oturacağına göre, Bülent'in dışında, kalan 5 kişiden biri 5 değişik şekilde Ali'nin bir yanına (birinci iş), kalan 4 kişiden biri de 4 değişik şekilde boş kalan diğer yanına (ikinci iş) oturabilirler. Bundan sonra kalanların (Bülent dahil) oturması için hiçbir şart olmadığından kalan 4 kişi $4! = 24$ değişik şekilde oturabilirler (üçüncü iş).

O halde, bu üç iş birlikte,

$$5.4.4! = 480$$

değişik şekilde gerçekleşebilir.

2. yol:



Ali ile Bülent'in yan yana oturdukları durumlar

Ali (A) ile Bülent (B) i bir eleman (AB) gibi düşünürsek, diğer 5 arkadaşıyla beraber 6 elemanın dairesel sıralanışlarının sayısı $(6-1)! = 5!$ olduğundan, Ali ile Bülent'in yan yana oturdukları, Ali ile Bülent'in kendi aralarında yer değiştirmelerini (2!) de hesaba katarsak, $2!.5! = 240$ durum vardır. 7 elemanın dairesel sıralanışlarının sayısı da $(7-1)! = 6!$ olduğundan, 7 arkadaş $6! = 720$ değişik şekilde bu masa etrafında oturabilirler. Bütün durumların sayısından Ali ile Bülent'in yan yana oturdukları durumların sayısı çıkarılırsa, Ali ile Bülent'in yan yana oturmadıkları durumların sayısı bulunur. O halde, Ali ile Bülent'in yan yana oturmadıkları durumların sayısı,

$$\begin{pmatrix}\text{Bütün}\\ \text{durumlar}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Ali ile Bülent'in}\\ \text{yan yana olduğu}\\ \text{durumlar}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Ali ile Bülent'in}\\ \text{yan yana olmadığı}\\ \text{durumlar}\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}(7-1)! - 2!.(6-1)! &= 6! - 2!\,.\,5!\\ &= 720 - 2.120\\ &= 480 \text{ dir.}\end{aligned}$$

C. KOMBİNASYON (GRUPLAMA)

n ve r birer doğal sayı ve $0 \le r \le n$ olmak üzere, **n** elemanlı bir A kümesinin **r** elemanlı **alt kümelerinden** her birine **A kümesinin r li bir kombinasyonu** denir ve A kümesinin r li kombinasyonlarının tümünün sayısı, **C(n, r)** veya $\binom{n}{r}$ şeklinde gösterilir.

Kombinasyon gruplandırma (küme oluşturma) olduğundan n elemanın r li her bir permütasyonu, aynı kombinasyondan (aynı kümeden) oluşturuluyor demektir. O halde, n elemanın r elemanlı tüm permütasyonları, n elemandan oluşturulan r li bir grubun (kümenin) elemanlarının sıralanmasıyla oluşturulur. Buna göre, n eleman içinden r elemanlı bir grup oluşturulduktan sonra (birinci iş) bu r elemanın sıralanmaları (ikinci iş), n nin r li permütasyonlarını meydana getirir. O halde, çarpma kuralına göre,

$$\binom{n}{r}.r! = P(n, r) \Rightarrow \binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!.r!} \text{ dir.}$$

Sonuç:

n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı,

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!.r!} \text{ dir.}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{\overbrace{n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-r+1)}^{r \text{ tane çarpan}}}{r!}$$

şeklinde hesap yapılır.

Örneğin, üç elemanlı bir $A = \{x, y, z\}$ kümesinin iki elemanlı ve üç elemanlı, permütasyonlarını ve kombinasyonlarını yazalım.

1) İki elemanlı kombinasyonları ve permütasyonları

Kombinasyonlar	Permütasyonlar
{ x, y }	(x, y), (y, x)
{ y, z }	(y, z), (z, y)
{ x, z }	(x, z), (z, x)
+ 3 tane	+ 6 tane

$$\binom{3}{2} = \frac{P(3, 2)}{2!} = \frac{3.2}{2} = 3,$$

2) Üç elemanlı kombinasyonu : { x, y, z } bir tane ve üç elemanlı permütasyonları :

(x, y, z), (x, z, y), (y, x, z), (y, z, x), (z, x, y), (z, y, x) altı tanedir.

$$\binom{3}{3} = \frac{P(3, 3)}{3!} = \frac{3!}{3!} = 1 \text{ dir.}$$

Sonuç:

1) n elemandan r eleman seçiliyorsa, sıralamanın önemi yoktur. Çünkü kümenin elemanlarının yer değiştirmesi kümeyi değiştirmez. Kombinasyonla hesap yapılır.

2) n elemandan r eleman seçildikten sonra bu r eleman sıralanıyorsa permütasyonla hesap yapılır.

3) Permütasyon hesabı; n elemandan r elemanın seçimini kombinasyonla hesapladıktan sonra, bu r elemanın sıralanışlarının sayısı (r!) ile çarpılarak da yapılabilir.

Örnek:

3 elemanlı alt kümelerinin sayısı 84 olan bir kümenin eleman sayısını bulalım.

Çözüm:

Bu kümenin eleman sayısına n denilirse, 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı C(n, 3) olur. Buna göre,

$$C(n, 3) = \frac{P(n, 3)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 84$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 3.2.4.3.7$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 9.8.7$$

$$\Rightarrow n = 9 \text{ dur.}$$

Örnek:

20 kişilik bir sınıftan üç kişilik bir yarışma ekibinin kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulalım.

Çözüm:

20 kişi içinden 3 kişi,

$$\binom{20}{3} = \frac{20.19.18}{3!} = \frac{20.19.6.3}{3.2}$$

$= 1140$ değişik şekilde seçilebilir.

Kombinasyonla İlgili Özellikler :

1) $C(n, r) = C(n, n-r)$ dir. Buradan,

$\binom{n}{x} = \binom{n}{y} \Rightarrow x = y$ veya $x + y = n$ olur.

2) $C(n, 0) = C(n, n) = 1$ dir.

3) $C(n, 1) = C(n, n-1) = n$ dir.

4) Sonlu n elemanlı bir kümenin;

0 elemanlı alt kümelerinin sayısı $= C(n, 0)$

1 elemanlı alt kümelerinin sayısı $= C(n, 1)$

2 elemanlı alt kümelerinin sayısı $= C(n, 2)$

....

n elemanlı alt kümelerinin sayısı $= C(n, n)$

olduğundan tüm alt kümelerinin sayısı,

$C(n, 0) + C(n + 1) + C(n, 2) + \ldots + C(n, n) = 2^n$ dir.

Örnek:

1) $\binom{20}{17} = \binom{20}{3} = \dfrac{20.19.18}{3.2} = 1140$ tır.

2) $\binom{n}{5} = \binom{n}{10} \Rightarrow n = 5 + 10 = 15$ tir.

3) $\binom{n}{2n-5} = \binom{n}{n+1} \Rightarrow 2n - 5 = n + 1 \Rightarrow n = 6$ veya

$(2n-5) + (n+1) = n \Rightarrow n = 2$

bulunur.

Ancak, $n = 2$ için $\binom{2}{3}$ ve $\binom{2}{-1}$ ifadeleri anlamsız olduğundan, $n \neq 2$ olmalıdır.

Buna göre, $n = 6$ dır.

4) $\binom{n}{2n-10} = \binom{n}{n-3} \Rightarrow 2n - 10 = n - 3 \Rightarrow n = 7$ veya

$(2n - 10) + (n - 3) = n$

$\Rightarrow 2n = 13 \Rightarrow n = \dfrac{13}{2} \notin N$

olduğundan, $n = 7$ dir.

Örnek:

Kız öğrencilerin sayısı, erkek öğrencilerin sayısına eşit olan bir sınıftaki erkek öğrenciler arasından basketbol takımı için 5 kişi, kız öğrenciler arasından ise masa tenisi takımı için 2 kişi seçilecektir.

Her iki takım için yapılabilecek seçmelerin sayısı birbirine eşit olduğuna göre, bu sınıftan bilgi yarışmasına katılacak 4 kişilik kaç farklı grup oluşturulabileceğini bulalım.

Çözüm:

Kız öğrencilerin sayısı ve erkek öğrencilerin sayısı n olsun.

Problemde verilenlere göre,

$\binom{n}{5} = \binom{n}{2} \Rightarrow n = 2 + 5 = 7$ ve

sınıf mevcudu : $2n = 14$ tür.

O halde, bilgi yarışmasına katılacak 4 kişilik

$\binom{14}{4} = \dfrac{14.13.12.11}{4.3.2} = 7.13.11$

$= 1001$

farklı grup oluşturulabilir.

Örnek:

$$4.C(n, 1) = C(n, 2) + 4$$

eşitliğini sağlayan n değerini bulalım.

Çözüm:

$4.C(n, 1) = C(n, 2) + 4 \Rightarrow 4.n = \dfrac{n(n-1)}{2!} + 4$

$\Rightarrow (4n - 4).2 = n^2 - n$

$\Rightarrow n^2 - 9n + 8 = 0$

$-1.(-8)$

$\Rightarrow n_1 = 1$ veya $n_2 = 8$ olur.

Ancak, $n = 1$ için $C(1, 2)$ anlamsız olduğundan, $n = 8$ dir.

Örnek:

Asal çarpanlarına ayrılmış şekli,

$$x = 2^4.3^3.5^5$$

olan bir sayının pozitif tamsayı bölenlerinin;

a) Kaç tanesinin tek sayı olduğunu,

b) Kaç tanesinin çift sayı olduğunu,

c) Kaç tanesinin 5 ile bölünebildiğini bulalım.

Çözüm:

$A = \{ 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 \}$, $B = \{ 3^0, 3^1, 3^2, 3^3 \}$

$C = \{ 5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5 \}$ olsun.

a) B ve C kümelerinden seçilen birer elemanın çarpımı, x in pozitif tek sayı bölenidir. Bu iki seçim birlikte yapıldığından çarpma kuralına göre, x in bütün pozitif tek sayı bölenleri,

$$\binom{s(B)}{1} \cdot \binom{s(C)}{1} = \binom{4}{1} \cdot \binom{6}{1} = 4.6 = 24 \text{ tanedir.}$$

b) A kümesinden seçilen 2^1 elemanı ile birlikte, A kümesinin diğer 4 elemanından birinin, B kümesinin 4 elemanından seçilen bir elemanın ve C kümesinin 6 elemanından seçilen bir elemanın çarpımı x in pozitif çift sayı bölenidir. Bu dört seçme işlemi birlikte yapılacağından, çarpma kuralına göre, x in pozitif çift sayı bölenleri,

$$\underbrace{\binom{1}{1}}_{2^1 \text{ in seçimi}} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{6}{1} = 1.4.4.6 = 96 \text{ tanedir.}$$

c) C kümesinin 5^1 elemanı seçildikten sonra, kalan 5 elemandan birinin, A kümesinden seçilen 5 elemandan birinin ve B kümesinden seçilen 4 elemandan birinin çarpımı, x in 5 ile bölünebilen pozitif tamsayı bölenidir. Bu dört seçme işlemi birlikte yapıldığından, çarpma kuralına göre, x in 5 ile bölünebilen pozitif tamsayı bölenleri,

$$\underbrace{\binom{1}{1}}_{5^1 \text{ in seçimi}} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} = 1.5.5.4 = 100 \text{ tanedir.}$$

Örnek:

$A = \{ a, b, c, d, e, f, g \}$ kümesinin dört elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde,

a) "b" nin bulunmayacağını,

b) "c" nin bulunacağını,

c) Sesli harflerden en az birinin bulunacağını ("a" veya "e" nin bulunacağını)

d) Sesli harflerden en az birinin bulunmayacağını ("a" veya "e" nin bulunmayacağını)

bulalım.

Çözüm:

a) "b" nin bulunmadığı 4 elemanlı alt kümeler, diğer 6 elemanla oluşturulacak 4 elemanlı alt kümelerdir. Buna göre, "b" nin bulunmadığı 4 elemanlı alt kümelerin sayısı,

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6.5}{2!} = 15 \text{ tir.}$$

b) 4 elemanlı alt kümelerde "c" bulunacağına göre, oluşturulacak alt kümeye "c" yi seçtikten sonra (birinci iş), kalan 6 elemandan 3 eleman daha seçilmelidir (ikinci iş). O halde, "c" nin bulunduğu 4 elemanlı alt kümelerin sayısı,

$$\underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{c nin seçimi}} \cdot \binom{6}{3} = \frac{6.5.4}{3!} = 20 \text{ dir.}$$

c) ***1. yol:***

"a" nın bulunduğu 4 elemanlı alt kümelerin tümünü K, "e" nin bulunduğu 4 elemanlı alt kümelerin tümünü L ile gösterelim.

O halde, "a" veya "e" nin bulunduğu 4 elemanlı alt kümeler $K \cup L$, hem "a" hem de "e" nin bulunduğu 4 elemanlı alt kümeler $K \cap L$ ile gösterilir.

Buna göre, "a" veya "e" nin bulunduğu alt kümelerin sayısı,

$$s(K \cup L) = s(K) + s(L) - s(K \cap L)$$

$$= \underbrace{\binom{1}{1} \cdot \binom{6}{3}}_{\text{a seçildi}} + \underbrace{\binom{1}{1} \cdot \binom{6}{3}}_{\text{e seçildi}} - \underbrace{\binom{1}{1} \cdot \binom{5}{2}}_{\text{a ve e seçildi}}$$

$$= 20 + 20 - \frac{5.4}{2} = 30 \text{ dur.}$$

2. yol:

4 elemanlı bütün alt kümelerin sayısından, "a" ve "e" nin ikisinin de bulunmadığı 4 elemanlı alt kümelerin sayısı çıkarılırsa, "a" veya "e" den en az birinin bulunduğu alt kümelerin sayısı bulunur. Burada, "a" ve "e" nin ikisinin de bulunmadığı 4 elemanlı alt kümeler, kalan 5 elemandan oluşturulacak 4 elemanlı alt kümelerdir.

Buna göre,

$$s(K \cup L) = \begin{pmatrix}\text{4 elemanlı tüm}\\ \text{alt kümelerin sayısı}\end{pmatrix} - s[\,(K \cap L)'\,]$$

$$= \binom{7}{4} - \binom{5}{4} = \binom{7}{3} - \binom{5}{1}$$

$$= \frac{7.6.5}{3!} - 5 = 30 \quad \text{dur.}$$

d) ***1. yol:***

"a" nın bulunmadığı 4 elemanlı tüm alt kümeler K'
"e" nin bulunmadığı 4 elemanlı tüm alt kümeler L'
olduğundan, "a" veya "e" nin (a ve e den en az birinin) bulunmadığı 4 elemanlı tüm alt kümeler $K' \cup L'$ ve hem "a" hem de "e" nin bulunmadığı 4 elemanlı alt kümeler $K' \cap L'$ yi oluşturur. Buna göre,

$$s(K' \cup L') = s(K') + s(L') - s(K' \cap L')$$

$$= \binom{6}{4} + \binom{6}{4} - \binom{5}{4}$$

$$= \binom{6}{2}.2 - \binom{5}{1}$$

$$= \frac{6.5}{2!}.2 - 5 = 25 \quad \text{tir.}$$

2. yol:

$K' \cup L' = (K \cap L)'$ olduğundan 4 elemanlı alt kümelerin sayısından, hem "a" hem de "e" nin bulunduğu 4 elemanlı alt kümelerin sayısı çıkarılırsa, "a" veya "e" den en az birinin bulunmadığı 4 elemanlı alt kümelerin sayısı bulunur.
Buna göre,

$$s(K' \cup L') = \binom{7}{4} - s(K \cap L)$$

$$= \binom{7}{3} - \underbrace{\binom{1}{1}}_{\uparrow}.\binom{5}{2} = 25 \quad \text{tir.}$$

a ve e seçildi.

Örnek:

Aralarında aynı mevkide oynayan Ahmet ve Yakup'un da bulunduğu 12 kişilik bir basketbolcu kafilesinden oluşturulacak 5 kişilik bir takımda, Ahmet ve Yakup'tan sadece birisi olacağına göre, bu takımın kaç farklı seçilebileceğini bulalım.

Çözüm:

5 kişilik takımda, Ahmet ve Yakup'tan sadece birisi olacağına göre, ikinsinden biri $\binom{2}{1}$ kadar farklı şekilde, kalan 10 kişiden de 4 ü $\binom{10}{4}$ kadar farklı sayıda seçilebilir.
O halde, bu iki seçim birlikte,

$$\binom{2}{1}.\binom{10}{4} = 2.\frac{10.9.8.7}{4.3.2}$$

$= 420$ değişik sekilde yapılabilir.

Örnek:

7 kız, 10 erkek öğrenci arasından ikisi kız, üçü erkek öğrenci olan kaç farklı yarışma ekibi oluşturulabileceğini bulalım.

Çözüm:

7 kız öğrenci arasından 2 kız öğrenci ve 10 erkek öğrenci arasından 3 erkek öğrenci, birlikte (çarpma kuralına göre)

$\binom{7}{2}.\binom{10}{3}$ farklı sayıda seçilebilir.

Örnek:

Bir düzlemde, herhangi ikisi paralel olmayan 8 doğrunun en çok kaç noktada kesişebileceğini bulalım.

Çözüm:

Doğrulardan herhangi ikisi paralel olmadığına göre, 8 doğrudan seçilen herhangi ikisinin bir kesim noktası vardır. O halde, 8 doğru toplam (en çok)

$\binom{8}{2} = \frac{8.7}{2} = 28$ noktada kesişebilir.

Örnek:

Bir düzlemdeki bir çember üzerinde belli 10 nokta işaretleniyor. Bu 10 noktadan,

a) Kaç doğru geçtiğini

b) Köşeleri bu 10 nokta üzerinde olan kaç üçgen çizilebileceğini bulalım.

Çözüm:

a) Çember üzerindeki noktaların herhangi üçü birden doğrusal olamaz. O halde, bir düzlemdeki çember üzerinde bulunan noktaların herhangi ikisinden bir doğru geçer.

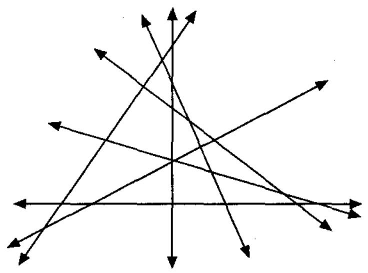
Buna göre, bu 10 noktadan

$\binom{10}{2} = \frac{10.9}{2} = 45$ doğru geçer.

b) Herhangi üçü doğrusal olmayan üç nokta birleştirilerek bir üçgen çizilebileceğine göre, köşeleri bu noktalar üzerinde olan üçgenlerin sayısı, bu 10 noktadan seçilebilecek farklı 3 noktanın sayısı kadardır. O halde, köşeleri bu noktalar üzerinde olan,

$\binom{10}{3} = \frac{10.9.8}{3.2} = 120$ üçgen çizilebilir.

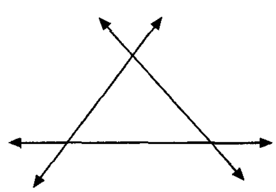
Örnek:



Şekildeki 7 doğrunun kaç farklı üçgen oluşturduğunu bulalım.

Çözüm:

Bir düzlemde herhangi ikisi birbirine paralel olmayan ve herhangi üçü aynı noktadan geçmeyen üç doğru bir üçgen meydana getirir.



Buna göre, şekildeki 7 doğrunun herhangi ikisi birbirine paralel olmadığına ve herhangi üçü aynı noktadan geçmediğine göre bu 7 doğru,

$\binom{7}{3} = \frac{7.6.5}{3!} = 35$ üçgen meydana getirir.

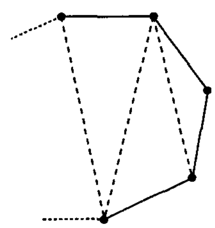
Örnek:

15 kenarlı bir dışbükey çokgenin köşegen sayısını bulalım.

Çözüm:

1. yol:

Bir dışbükey çokgenin, aynı kenar üzerinde olmayan iki köşesini birleştiren doğru parçası, çokgenin köşegenlerinden biridir. Çokgenin köşelerinin sayısı kenarlarının sayısına eşit olduğundan, bu çokgenin 15 köşesi vardır.



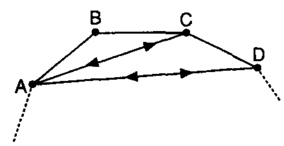
O halde, bu 15 köşenin herhangi ikisini birleştiren doğru parçalarından 15 tanesi çokgenin kenarları, diğerleri ise köşegenleridir. Buna göre, 15 kenarlı (15 köşesi) olan bir dışbükey çokgenin köşegen sayısı,

$$\binom{15}{2} - 15 = \frac{15.14}{2} - 15$$

$$= 6.15 = 90 \text{ dır.}$$

2. yol:

Yandaki şekilde B köşesi; A, B ve C köşesi dışındaki $15 - 3 = 12$ köşe ile birleştirilerek 12 köşegen çizilebilir.



Benzer şekilde, C köşesi; B, C ve D dışında $15 - 3 = 12$ köşe ile birleştirilerek 12 köşegen daha çizilebilir. Böylelikle her köşenin diğer 12 köşe ile birleştirilmesi, bire bir eşleme yoluyla sayılırsa, köşegen sayısının 2 katı kadar sayma yapılmış olur. Çünkü,

A köşesinden çizilen köşegenler sayılırken;

AC, AD, ... sayıldığı gibi

C köşesinden çizilen köşegenler sayılırken CA,

D köşesinden çizilen köşegenler sayılırken DA,

....

bunun gibi her köşegen iki kez sayıldığından, toplam köşegen sayısı,

$$\frac{15.12}{2} = 90 \text{ dır.}$$

Yukarıdaki problemin 1. yolundan (veya 2. yolundan) hareketle, n kenarlı bir çokgenin köşegen sayısı:

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)-2n}{2}$$

$$= \frac{n(n-3)}{2}$$

olarak bulunur.

D. BİNOM FORMÜLÜ

$n \in N$ ve x ve y den en az biri sıfırdan farklı olmak üzere,

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n$$

eşitliğine **binom formülü** (binom açılımı),

$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ sayılarına da binom katsayıları denir.

Örnek:

1) $(x+y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \ldots + \binom{5}{5}y^5$

$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

2) $(x-2)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4.(-2) + \binom{5}{2}x^3(-2)^2 + \ldots$

$\ldots + \binom{5}{5}(-2)^5$

$= x^5 - 5x^4.2 + 10.x^3.4 - 10.x^2.8 + 5.x.16 - 32$

$= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$ dir.

Binom katsayıları aşağıdaki üçgeni meydana getirir.

$(x+y)^0$: $\binom{0}{0}$

$(x+y)^1$: $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

$(x+y)^2$: $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$(x+y)^3$: $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$(x+y)^4$: $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

....
....
....

O halde,

$(x+y)^0$: 1

$(x+y)^1$: 1 1

$(x+y)^2$: 1 2 1

$(x+y)^3$: 1 3 3 1

$(x+y)^4$: 1 4 6 4 1

$(x+y)^5$: 1 5 10 10 5 1

....
....
....

Sonuç:

1) $(x+y)^n$ ifadesinin açılımında $n+1$ terim vardır.

2) $(x+y)^n$ ifadesinin açılımında her terimde x ve y nin üsleri toplamı n dir.

3) $(x+y)^n$ ifadesinin açılımında x ve y yerine (değişkenler yerine) 1 yazılırsa açılımdaki katsayılar toplamı,

$$(1+1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

olarak bulunur.

4) Katsayılar üçgeninden,

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1} \text{ dir.}$$

5) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ olduğundan, $(x+y)^n$ açılımında baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin katsayıları mutlak değerce birbirine eşittir.

6) $(x+y)^n$ açılımında,

baştan $r+1$ inci terim: $\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$,

sondan p yinci terim: $\binom{n}{n+1-p}x^{p-1}y^{n+1-p}$ dir.

7) $(x+y)^{2n}$ açılımında ortadaki terim:

$$\binom{2n}{n}x^n y^n \text{ dir.}$$

Örnek:

1) $(x - 2y + 3)^7$ ifadesinin açılımında katsayılar toplamı, $(1 - 2.1 + 3)^7 = 2^7 = 128$ dir.

2) $\binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{10}{4} = \binom{10}{5} + \binom{10}{4} = \binom{11}{5}$ dir.

3) $(x - 3y)^7$ ifadesinin açılımında baştan dördüncü terim: $r + 1 = 4 \Rightarrow r = 3$ olduğundan, baştan dördüncü terim,

$$\binom{7}{3}.x^{7-3}.(-3y)^3 = 35.(-27)x^4y^3$$
$$= -945x^4y^3 \text{ tür.}$$

4) $(x + 2y)^{10}$ ifadesinin açılımında sondan yedinci terim:

$$\binom{10}{10+1-7}.x^{7-1}.(2y)^{10+1-7} = \binom{10}{4}.x^6.2^4.y^4$$
$$= 3360x^6y^4 \text{ tür.}$$

Burada terim sayısı 11 ve r yerine $11 - 7 = 4$ yazıldığına dikkat ediniz.

5) $(x - 2y)^{10}$ ifadesinin açılımında ortanca terim:

$$\binom{10}{5}.x^5.(-2y)^5 = -32.\binom{10}{5}x^5y^5$$
$$= -8064x^5y^5 \text{ tir.}$$

Örnek:

$$(x + 2y)^8 = x^8 + ... + 16ax^3y^5 + ...$$

eşitliğinde a değerini bulalım.

Çözüm:

Verilen eşitlikten,

$$16ax^3y^5 = \binom{8}{5}x^3.(2y)^5$$

$$\Rightarrow 16.a = \binom{8}{3}.2^5 \Rightarrow a = \frac{8.7.6}{3!}.2$$
$$= 112 \text{ dir.}$$

Örnek:

$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$ ifadesinin açılımında sabit terimi bulalım.

Çözüm:

Sabit terim (x ten bağımsız, yani x^0 ın katsayısı)

$$\binom{6}{r}x^{6-r}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = k.x^0 \quad (k : \text{sabit terim})$$

$$\Rightarrow x^{6-r}.x^{-2r} = x^0 \Rightarrow 6 - 3r = 0$$
$$\Rightarrow r = 2 \text{ dir.}$$

O halde, $k = \binom{6}{2} = \frac{6.5}{2} = 15$ tir.

Örnek:

a bir reel sayı olmak üzere, $(x^2 + 2y + a)^7$ ifadesinin açılımında katsayılar toplamı -128 olduğuna göre, x^6y^3 ün katsayısını bulalım.

Çözüm:

Katsayılar toplamı -128 olarak veriliyor. a bir sabit sayı olduğundan x ve y değişkenleri yerine 1 yazıp -128 e eşitleyelim.

$$(1^2 + 2.1 + a)^7 = -128 \Rightarrow (3 + a)^7 = (-2)^7$$
$$\Rightarrow 3 + a = -2$$
$$\Rightarrow a = -5 \text{ tir.}$$

O halde,

$(x^2 + 2.y - 5)^7$ açılımında x^6y^3 ün elde edilebilmesi için,

$(x^2)^3.(2y)^3.(-5)^1$ olduğundan, 7 tane $(x^2 + 2y - 5)$ çarpanın üçünün seçilip x^2 lerin çarpılmasıyla x^6, kalan $7 - 3 = 4$ çarpandan üçünün seçilip $(2y)$ lerin çarpılmasıyla y^3 elde edilir ve geriye 1 tane çarpan kalır. Bu şekilde çarpanların çarpılmasıyla da,

$$(x^2)^3.(2y)^3.(-5)^1.\binom{7}{3}.\binom{4}{3}.\binom{1}{1} = k.x^6y^3 \text{ terimi bulunur.}$$

Buna göre,

$$k = 2^3.(-5)^1.\binom{7}{3}.\binom{4}{3}.\binom{1}{1} \Rightarrow k = 8.(-5).\frac{7.6.5}{3!}.4.1$$
$$\Rightarrow k = -5600 \text{ olur.}$$

$\binom{4}{1}$

Uyarı:

1) p, q, r birer doğal sayı ve $p + q + r = n$ olmak üzere, $(ax + by + cz)^n$ ifadesinin açılımında, $x^p y^q z^r$ li terim pratik olarak,

$$(ax)^p.(by)^q.(cz)^r.\frac{n!}{p!.q!.r!}$$

şeklinde bulunur.

2) $n \in N$ olmak üzere, $(x + y + z)^n$ ifadesinin açılımındaki terimlerin sayısı:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

dir.

Örnek:

$(x - y + 2)^5$ ifadesinin açılımında,

a) Terim sayısını,

b) x^2y^2 nin katsayısını bulalım.

Çözüm:

a) $(x - y + 2)^5 = [\,(x - y) + 2\,]^5$

şeklinde düşünerek açılımı yazalım.

$$\underbrace{\binom{5}{0}(x-y)^5.2^0}_{6 \text{ terim}} + \underbrace{\binom{5}{1}(x-y)^4.2^1}_{5 \text{ terim}} + \ldots + \underbrace{\binom{5}{5}2^5}_{1 \text{ terim}}$$

Buna göre, açılımındaki terimlerin sayısı,

$$6 + 5 + 4 + \ldots + 1 = \frac{6.7}{2} = 21 \quad \text{dir.}$$

Veya, $n = 5$ olduğundan terim sayısı,

$$\frac{(5+1).(5+2)}{2} = 21 \quad \text{dir.}$$

b) $(x - y + 2)^5 = \ldots + k.x^2y^2 + \ldots$ ise,

$$x^2.(-y)^2.2^1.\frac{5!}{2!.2!.1!} = k.x^2y^2$$

$$\Rightarrow x^2y^2.(-1)^2.2.\frac{5.4.3.2}{2.2} = kx^2y^2$$

$$\Rightarrow k = 60 \text{ tır.}$$

Örnek:

$(\sqrt[3]{2} - \sqrt{5})^9$ ifadesinin açılımında rasyonel terimlerin toplamını bulalım.

Çözüm:

Rasyonel ilk terimden sonra, kök kuvvetlerinin (3 ve 2 nin) en küçük ortak katı 6 olduğundan, her 6 terim sonrası yine rasyonel terimdir.

Buna göre, sadece rasyonel terimleri yazıp toplayalım.

$$\binom{9}{0}.(\sqrt[3]{2})^9.(-\sqrt{5})^0 + \binom{9}{6}.(\sqrt[3]{2})^3.(-\sqrt{5})^6$$

$$= 1.2^3.1 + \frac{9.8.7}{3!}.2.5^3$$

$$= 8 + 84.250 = 21008 \text{ dir.}$$

ÇÖZÜMLÜ TEST – 1

1. İstanbul'dan İzmir'e ve İzmir'den Antalya'ya deniz yoluyla bir yoldan, kara yoluyla bir yoldan ve hava yoluyla bir yoldan gidilebilmektedir.

Bir yol bir kez kullanılmak üzere, İstanbul'dan Antalya'ya, İzmir'e uğramak şartıyla kaç türlü gidilebilir?

A) 12 B) 9 C) 8 D) 6 E) 4

2. **3 çeşit meyve fidesi, bir bahçede işaretli 5 farklı noktaya kaç farklı şekilde dikilebilir?**

A) 10 B) 24 C) 60 D) 120 E) 125

3. **10 kişilik bir gruptan, bir başkan, bir başkan yardımcısı ve 2 üye kaç farklı şekilde seçilebilir?**

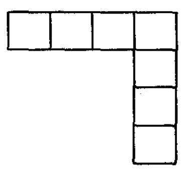
A) 2160 B) 3360 C) 4320 D) 5040 E) 6180

4. **12 koşucunun katıldığı bir koşunun ilk üç derecesi, berabere kalma durumu olmamak şartıyla, kaç değişik şekilde gerçekleşebilir?**

A) 1440 B) 1320 C) 1300 D) 1200 E) 1000

5. A = { 2 , 3 , 4 , 6 , 8 , 9 , 15 }

kümesinin elemanları şekildeki kutulara, her kutuya bir sayı gelecek şekilde yazılacaktır.



Satırların veya sütunların birine çift sayılar diğerine de 3 ile bölünebilen sayılar yazılmak şartıyla, bu kareler kaç farklı şekilde doldurulabilir?

A) 288 B) 144 C) 108 D) 72 E) 36

6. 20 soruluk bir teste her sorunun 5 seçeneği vardır.

Art arda iki sorunun cevabı farklı olmak şartıyla, bu testin cevap anahtarı kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

A) $(5!)^4$ B) $(4!)^5$ C) 5^{20} D) 4^{20} E) 5.4^{19}

7. $P(n, 2) + P(3n + 1, 1) = 9$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8. A = { a , b , c , d , e , f }

kümesinin elemanları ile oluşturulacak 4 lü permütasyonların kaç tanesinde "f" harfi bulunur?

A) 120 B) 160 C) 180 D) 220 E) 240

9. **4 mektup 5 posta kutusuna, mektupların her biri farklı kutulara atılmak şartıyla, kaç farklı şekilde atılabilir?**

A) 5^4 B) 4^5 C) 5! D) 60 E) 4!

10. A = { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }

kümesinin elemanları birer kez kullanılarak 450 den büyük, üç basamaklı kaç farklı tek sayı yazılabilir?

A) 16 B) 20 C) 24 D) 28 E) 30

11. A = { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 }

kümesinin elemanları birer defa kullanılarak 4 basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

A) 240 B) 260 C) 300 D) 320 E) 360

12. **İçlerinde Kemal ile Ali'nin de bulunduğu 5 kişilik bir grup Ali ve Kemal daima yanyana gelecek şekilde bir sıraya kaç farklı şekilde oturabilirler?**

A) 120 B) 56 C) 48 D) 24 E) 12

13. A = { 0 , 1 , 2 , 5 , 6 }

kümesinin elemanları kullanılarak, rakamlarından sadece biri "6" olan, üç basamaklı kaç farklı tek sayı yazılabilir?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

14. Farklı renklerdeki sekiz tane ampülden bir tanesi bozuktur.

Bir kez deneme yapılan ampul ikinci bir kez denenmemek şartıyla, bozuk olan ampülün dördüncü denemede kesinlikle bulunabilmesi için en çok kaç deneme yapılmalıdır?

A) 150 B) 180 C) 200 D) 210 E) 240

15. "İSTANBUL"

kelimesinin harfleri kullanılarak "İ" harfi ile başlayan fakat "A" harfi ile bitmeyen, harfleri farklı, anlamlı ya da anlamsız, dört harfli kaç değişik kelime yazılabilir?

A) 64 B) 56 C) 48 D) 42 E) 36

16. 0 , 3 , 5 , 7 rakamları birer defa kullanılarak 500 den büyük kaç farklı sayı yazılabilir?

A) 36 B) 32 C) 30 D) 24 E) 20

17. Aralarında Ahmet ve Sinan'ın da bulunduğu sekiz arkadaş, beşi arkada, üçü önde olacak şekilde poz vererek fotoğraf çektireceklerdir.

Ahmet ve Sinan'ın yan yana olduğu kaç farklı fotoğraf çekilebilir?

A) 8640 B) 8600 C) 8560 D) 8400 E) 8240

18. 4 farklı Matematik kitabı, 3 farklı Türkçe kitabı ve 2 farklı Sosyal Bilgiler kitabı, Matematik kitapları birbirinden ayrılmamak şartıyla, bir rafa kaç farklı şekilde dizilebilir?

A) 7!.4! B) 6!.4! C) 7!.3! D) 5!.5! E) 6!.3!

19. 22244433

sayısının rakamları kullanılarak 8 basamaklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?

A) 386 B) 420 C) 456 D) 480 E) 512

20. Bir sağlık kurulundaki 4 doktor ve 4 asistan, iki doktor arasında bir asistan olacak şekilde, bir masa etrafında dairesel olarak kaç değişik şekilde sıralanabilirler?

A) 576 B) 464 C) 360 D) 144 E) 36

21. 4 Matematik, 3 Fizik, 2 Kimya öğretmeni toplantı masasına birlikte oturuyorlar.

Aynı branştan olan tüm öğretmenler yan yana olmak şartıyla, dairesel olarak kaç farklı şekilde sıralanırlar?

A) 864 B) 576 C) 524 D) 464 E) 348

22. 2 si kırmızı, 2 si beyaz, 5 i mavi 9 özdeş bilye, mavi bilyelerin hepsi bir arada olmak şartıyla, yan yana kaç farklı şekilde sıralanabilir?

A) 120 B) 100 C) 90 D) 60 E) 30

23. 10 kişilik bir kurulda bir başkan ve iki başkan yardımcısı vardır.

Başkan daima yardımcılarının arasında olmak şartıyla, bu kuruldakiler yuvarlak bir masa etrafına kaç farklı şekilde oturabilirler?

A) 2!.9! B) 2!.8! C) 2!.7! D) 3!.8! E) 3!.7!

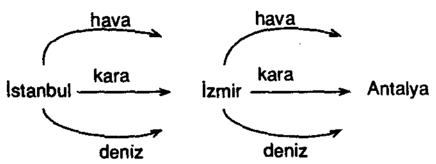
24. A = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 7 , 9 }

kümesinin elemanları kullanılarak rakamları farklı, üç basamaklı 4 ile bölünebilen kaç farklı sayı yazılabilir?

A) 30 B) 50 C) 60 D) 75 E) 92

TESTİN ÇÖZÜMLERİ

1.



İstanbul'dan İzmir'e 3 değişik yoldan ve İstanbul'dan İzmir'e giderken kullanılan yolun dışında bir yol kullanılacağı için, İzmir'den Antalya'ya 2 değişik yoldan gidilebilir. Buna göre, istenen sonuç,

$$3.2 = 6 \text{ dır.}$$

Cevap: D

2. Birinci meyve fidesi işaretli 5 yerden birine, ikinci meyve fidesi kalan 4 yerden birine, üçüncü meyve fidesi kalan 3 yerden birine dikilebilir. Buna göre,

3 fide 5 yere,

$$5.4.3 = 60$$

değişik şekilde dikilebilir.

Veya; 3 meyve fidesi, tanım (A) kümesinin elemanları, işaretli 5 nokta değer (B) kümesinin elemanları olmak üzere, A dan B ye bire bir fonksiyon gibi düşünülürse,

$$P(5\ ,\ 3) = 60 \text{ olur.}$$

Cevap: C

3. 10 kişiden herhangi biri başkan, kalan 9 kişiden biri başkan yardımcısı, kalan 8 kişiden biri üyelerden biri ve kalan 7 kişiden biri ikinci üye olarak seçilebilir. Buna göre, istenen tüm durumların sayısı,

$$10.9.8.7 = 5040 \text{ tır.}$$

Veya, $P(10\ ,\ 4) = 5040$ şeklinde işlem yapılabilir.

Cevap: D

4.

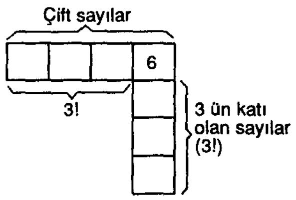
$$\begin{array}{|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{1.} & \multicolumn{1}{c}{2.} & \multicolumn{1}{c}{3.} \\ \hline 12 & 11 & 10 \\ \hline \end{array} \longrightarrow 12.11.10 = 1320 \text{ olduğundan}$$

12 koşucunun katıldığı bir yarışın ilk üç derecesi 1320 değişik şekilde gerçekleşebilir. Veya,

12 kişiden 3 kişi $P(12\ ,\ 3) = 1320$ değişik, şekilde sıralanabilir.

Cevap: B

5. İstenen durumları şekil üzerinde gösterelim.



Şekilde, çift sayılar ve 3 ün katı olan sayılar satır ve sütunda yer değiştirebileceğinden, istenen bütün durumların sayısı,

$$3!.3!.2! = 72 \text{ dir.}$$

Cevap: D

6. Birinci sorunun cevabı 5 seçenekten biri, ikinci sorunun cevabı birincidekinden farklı olacağından 4 seçenekten biri, üçüncü sorunun cevabı ikincidekinden farklı olacağından 4 seçenekten biri, ... şeklinde olacaktır. Buna göre,

$$\begin{array}{ccccc} \underline{1.\ \text{soru}} & \underline{2.\ \text{soru}} & \underline{3.\ \text{soru}} & \ldots\ldots & \underline{20.\ \text{soru}} \\ 5 & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{4 \qquad\quad 4 \qquad \ldots\ldots \qquad 4}_{19 \text{ tane } 4}} \end{array}$$

5.4^{19} değişik şekilde cevap anahtarı oluşturulabilir.

Cevap: E

7. $P(n, 2) + P(3n + 1, 1) = 9$

$\Rightarrow n(n - 1) + 3n + 1 = 9$

$\Rightarrow n^2 + 2n - 8 = 0$

$-2 . 4$

$n_1 = -4 \notin N$, $n_2 = 2 \in N$ olduğundan, $n = 2$ dir.

Cevap: A

8. *1. yol:*

$\boxed{f}$ P(5,3) ve f ikinci, üçüncü, dördüncü sırada olabileceğinden f nin bulunduğu 4 lü permütasyonların sayısı,

$4 . P(5,3) = 4 . 5 . 4 . 3 = 240$ tır.

2. yol:

{ a , b , c , d , e , f } kümesinin 4 lü tüm permütasyonlarının sayısından P(6,4), f nin bulunmadığı (dolayısıyla kalan 5 elemanın) 4 lü permütasyonların sayısı çıkarılırsa, f nin bulunduğu 4 lü permütasyonların sayısı bulunur.

Buna göre,

$P(6,4) - P(5,4) = 6.5.4.3 - 5.4.3.2$

$= 5.4.3 (6 - 2)$

$= 240$ tır.

Cevap: E

9. Birinci mektup 5 posta kutusundan herhangi birine, ikinci mektup birincinin atılmadığı 4 posta kutusundan herhangi birine, üçüncü mektup birinci ve ikincinin atılmadığı 3 posta kutusundan herhangi birine, dördüncü mektup diğer üçünün atılmadığı 2 posta kutusundan herhangi birine atılabilir. Buna göre, istenen durumların sayısı,

1.M	2.M	3.M	4.M
5	4	3	2

$5.4.3.2 = 5!$ dir.

Veya; mektuplar tanım (A) kümesinin, posta kutuları değer (B) kümesinin elemanları olmak üzere, A dan B ye bire bir fonksiyon şeklinde düşünülürse,

$P(5,4) = 5!$ dir.

Cevap: C

10. İstenen tüm durumları şema üzerinde göstererek çözüm yapalım.

1.iş	2.iş	3.iş
yüzler b.	onlar b.	birler b.
1	1	2
{4}	{5}	{1,3}

→ $1.1.2 = 2$

1.iş	2.iş	3.iş
yüzler b.	onlar b.	birler b.
1	1	3
{4}	{6}	{1,3,5}

→ $1.1.3 = 3$

1.iş	3.iş	2.iş
yüzler b.	onlar b.	birler b.
1	5	2
{5}	{0,2,3,4,6}	{1,3}

{1} yazılsın

→ $1.5.2 = 10$

1.iş	3.iş	2.iş
yüzler b.	onlar b.	birler b.
1	5	3
{6}	{0,2,3,4,5}	{1,3,5}

{1} yazılsın

→ $1.5.3 = 15$

$+$

$2 + 3 + 10 + 15$

$= 30$

farklı sayı yazılabilir.

Cevap: E

11. *1. yol:*

Binler basamağına sıfırın (0) geldiği durumları da 4 basamaklı sayı gibi düşünürsek,

$P(6,4) = 6.5.4.3 = 360$ farklı sayıda sıralama olur. Altı rakamın binler basamağına gelme şansı eşit olduğundan bu şekilde elde edilen sıralamalardan $\frac{1}{6}$ sı sıfırın (0) binler basamağında olduğu durumlardır. O halde, $\frac{5}{6}$ sı da dört basamaklı sayılardır.

$\frac{5}{6} . 360 = 300$ dür.

2. yol:

Binler basamağına, sıfırın (0) dışındaki beş rakamdan biri ve bundan sonra, binler basamağına yazılan rakamın dışında, beş rakamın üçü yüzler, onlar ve birler basamağına sıralanırsa, 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 rakamlarıyla, dört basamaklı, rakamları farklı,

$$5.P(5,3) = 5.5.4.3 = 300$$

farklı sayı yazılabilir.

Cevap: C

12. Ali ve Kemal yan yana olacağından bir eleman gibi düşünülürse, diğer 3 elemanla birlikte toplam 4 elemanın sıralanışı 4! ve Ali ile Kemal'in kendi aralarında yer değiştirmeleri de 2! olduğundan, istenen sıralamalarının sayısı,

$$4!.2! = 24.2 = 48 \text{ dir.}$$

Cevap: C

13.

1.iş	2.iş	3.iş
yüzler b.	onlar b.	birler b.
1	4	2
{6}	{0,1,2,5}	{1,5}

1.iş	2.iş	3.iş
yüzler b.	onlar b.	birler b.
3	1	2
{1,2,5}	{6}	{1,5}

0 , 1 , 2 , 5, 6 rakamları kullanılarak, rakamlarından sadece biri 6 olan, üç basamaklı,

$$1.4.2 + 3.1.2 = 14$$

farklı tek sayı yazılabilir.

Cevap: A

14. Bir kez denenen ampül, tekrar denenmemek şartıyla, sağlam (S) ve bozuk (B) olmak üzere,

Denemeler	1.	2.	3.	4.
	S	S	S	B
	7	6	5	1

bozuk olan ampül en çok, kesinlikle, 7.6.5 = 210 denemede bulunabilir.

Cevap: D

15.

1.iş	2.iş	3.iş
1	6	6
{İ}	{S, T, A, N, B, U}	{S, T, N, B, U, L}

{L} yazılsın

Yukarıdaki şemadan, istenen kelimelerin sayısı,

$$1.6.6 = 36 \text{ dır.}$$

Cevap: E

16. 0 , 3 , 5 , 7 rakamları birer defa kullanılarak, 500 den büyük üç basamaklı veya dört basamaklı sayılar yazılabilir. O halde,

1.iş	2.iş
yüzler b	• •
2	P(3,2)
{5 , 7}	

→ 2.3.2 = 12

{5} yazılsın

farklı üç basamaklı ve

1.iş	2.iş
binler b	• • •
3	3!
{3 , 5, 7}	{0 , 5 , 7}

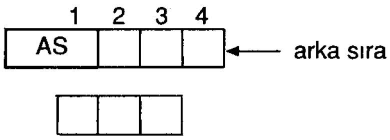
→ 3.3! = 18

{3} yazılsın

farklı dört basamaklı sayı yazılabileceğinden toplam, 12 + 18 = 30 sayı yazılabilir.

Cevap: C

17.



1. durum: Ahmet ile Sinan arkada olduklarında, 4 farklı şekilde yan yana durabilirler (birinci iş), ikisi yan yana durduktan sonra kalan 6 kişi, 6 değişik şekilde sıralanabilir (ikinci iş). Ahmet ile Sinan'ın kendi aralarında yer değiştirmeleri de hesaba katılırsa, Ahmet ile Sinan'ın arka sırada yan yana oldukları, $4.6!.2!$ farklı durum olur.

2. durum: Ahmet ile Sinan ön sırada yan yana olduklarında, 2 farklı şekilde yan yana durabilirler (birinci iş). Benzer şekilde diğer 6 kişi, 6! değişik biçimde sıralanabilir. Ahmet ile Sinan'ın kendi aralarında yer değiştirmeleri de hesaba katılırsa, Ahmet ile Sinan'ın ön sırada yan yana oldukları, $2.6!.2!$ farklı durum olur.

Buna göre, istenen tüm durumların sayısı,

$4.6!.2! + 2.6!.2! = 6.6!.2! = 8640$ tır.

Cevap: A

18. Matematik kitapları bir arada olacağına göre bir eleman gibi düşünülürse, 3 Türkçe ve 2 Sosyal Bilgiler kitabıyla birlikte toplam, $1 + 3 + 2 = 6$ eleman 6! kadar farklı sayıda sıralanabilir (birinci iş). Matematik kitapları kendi aralarında 4! kadar farklı sayıda yer değiştirebilir (ikinci iş). Buna göre, bu iki iş birlikte $4!.6!$ kadar farklı sayıda gerçekleşebilir.

Cevap: B

19.

2.iş	1.iş
....	birler b.
7!	6
{2,2,2,4,4,3,3}	{2,2,2,4,4,4}

{4} yazılsın

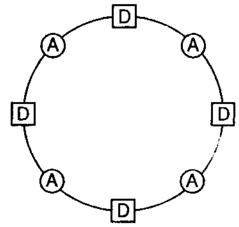
3 tane 2, 3 tane 4 ve 2 tane 3 olduğundan, 8 basamaklı,

$$\frac{6.7!}{3!.3!.2!} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!.2} = 420$$

farklı çift sayı yazılabilir.

Cevap: B

20. 4 doktor (D) aralarında birer boş yer kalacak şekilde dairesel olarak $(4-1)! = 3!$ kadar farklı şekilde sıralanabilir (birinci iş). Bundan sonra kalan boş yerlere 4 asistan (A) 4! kadar farklı sayıda sıralanırlar (ikinci iş). Buna göre, bu iki iş birlikte,



$$3!.4! = 6.24 = 144$$

farklı şekilde gerçekleşebilir.

Cevap: D

21. 4 Matematik öğretmeni bir eleman, 3 Fizik öğretmeni ikinci bir eleman, 2 kimya öğretmeni üçüncü bir eleman gibi düşünülürse, 3 eleman dairesel olarak $(3-1)! = 2!$ farklı şekilde sıralanabilir. Aynı branştan olan öğretmenlerin kendi aralarında yer değiştirmeleri (ikinci iş) de hesaba katılırsa, bu iki iş birlikte,

$$2!.4!.3!.2! = 2.24.6.2 = 576$$

farklı şekilde gerçekleşebilir.

Cevap: B

22. 5 mavi bilye bir eleman gibi düşünülürse, 2 kırmızı ve 2 beyaz bilye ile birlikte toplam, $1 + 2 + 2 = 5$ eleman 5! farklı sayıda yan yana sıralanabilir. Kırmızı bilyelerin ve beyaz bilyelerin kendi aralarındaki yer değiştirmeleri farklı sıralanışlar meydana getirmediği için, bu yer değiştirmelerden dolayı olan azalmalar hesaba katılırsa,

$$\frac{5!}{2!.2!} = \frac{5.4.3.2}{2.2} = 30$$

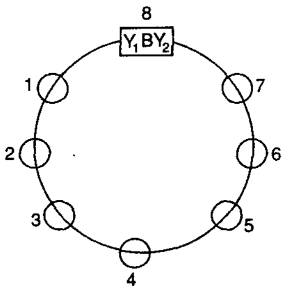
farklı sıralama olur.

Cevap: E

23. ***1. yol:***

Başkan bir yere oturduktan sonra iki yardımcısından biri bir yanına 2! değişik sayıda, diğer yardımcısı da başkanın boş kalan yanına 1 şekilde oturur (birinci iş). Kalan 7 kişi de diğer yerlere 7! farklı sayıda sıralanabilir. O halde başkan iki yardımcısının arasında olacak şekilde, 10 kişi dairesel olarak, 2!.7! farklı sayıda oturabilirler.

2. yol:



Başkan (B) ve iki yardımcısı (Y_1 ve Y_2) bir eleman gibi düşünülürse, diğer 7 kişi ile birlikte 8 eleman dairesel olarak, (8 – 1)! = 7! farklı sayıda sıranabilir (birinci iş). İki yardımcısı da keni aralarında 2! farklı şekilde sıralanabileceğinden (ikinci iş), başkan, iki yardımcısının arasında olmak şartıyla 10 kişi dairesel olarak,

7!.2!

farklı sayıda sıralanabilir.

Cevap: C

24. **1. durum:** Onlar basamağındaki rakam tek sayı, (1 , 3 , 5 , 7 , 9) iken birler basamağı sadece 2 olabilir.

3.iş	1.iş	2.iş	
yüzler b.	onlar b.	birler b.	
5	5	1	→ 5.1.5 = 25
{3,4,5,7,9}	{1,3,5,7,9}	{2}	

{1} yazılsın

2. durum: Onlar ve birler basamağındaki rakamlar sırasıyla 2 ve 4 , yüzler basamağındaki rakam diğer beş rakamdan biri (1 , 3 , 5 , 7 , 9) olabalir.

x y z → x 2 4 → 5.1.1 = 5

{ 1 , 3 , 5 , 7 , 9 }

Buna göre; 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 7 , 9 rakamlarıyla, rakamları farklı, üç basamaklı, 4 ile bölünebilen

25 + 5 = 30 farklı sayı yazılabilir.

Cevap: A

ÇÖZÜMLÜ TEST – 2

1. $C(n, r) = \binom{n}{r}$ ve $n > 2$ olmak üzere,

$$\binom{n}{1} + C(n, n-2) = 4n - 3$$

olduğuna göre, n değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2. 10 kişilik bir gruptan 5 kişilik bir yarışma ekibi ve bu ekip içinden de bir ekip sözcüsü seçilecektir.

Buna göre, bu ekip kaç değişik biçimde oluşturulabilir?

A) 840 B) 960 C) 1160 D) 1260 E) 1440

3. 8 kişilik bir guruptan, <u>en az</u> 2, <u>en çok</u> 7 kişilik kaç farklı grup oluşturulabilir?

A) 256 B) 246 C) 224 D) 216 E) 192

4. $\binom{5}{1} - \binom{6}{2} + \binom{5}{2} - \binom{6}{3} + \ldots + \binom{5}{5} - \binom{6}{6}$

işleminin sonucu kaçtır?

A) – 26 B) – 20 C) – 10 D) 12 E) 24

5. Bir sınıftaki öğrencilerle oluşturulabilecek 2 şerli grupların sayısı, 3 erli grupların sayısının $\frac{3}{5}$ i kadardır.

Buna göre, sınıf mevcudu kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

6. 5 kız ve 6 erkek arasından 6 kişilik takımlar oluşturulacaktır.

Eşit sayıda kız ve erkeğin bulunduğu kaç farklı takım oluşturulabilir?

A) 120 B) 180 C) 200 D) 220 E) 240

7. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

kümesinin beş elemanlı alt kümelerinin kaç tanesi $B = \{2, 3, 4\}$ kümesini kapsar?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 24 E) 32

8. A, B, C, D, E, F, G gibi yedi değişik seçmeli dersten A ve F aynı saatte verilmektedir.

Bu yedi dersten üçünü seçecek olan bir öğrenci kaç farklı seçim yapabilir?

A) 21 B) 25 C) 27 D) 30 E) 33

9. 10 kişinin katıldığı bir sınavda belli iki kişinin başarılı ve belli bir kişinin de başarısız olduğu biliniyor.

Buna göre, bu sınav başarı yönünden kaç farklı şekilde sonuçlanabilir?

A) 56 B) 64 C) 96 D) 120 E) 128

10. 12 kişi arasından seçilen 8 kişilik bir grup İzmir'e, kalan 4 kişilik grup da Samsun'a gidecektir.

Buna göre, bu iki grup kaç değişik biçimde oluşturulabilir?

A) 285 B) 360 C) 385 D) 460 E) 495

11. **7 farklı oyuncak, iki kardeşten küçüğüne 5 tane, büyüğüne 2 tane verilmek şartıyla kaç değişik şekilde paylaştırılabilir?**

A) 42 B) 36 C) 21 D) 18 E) 15

12. 5 doktor ve 7 hemşire arasından 5 kişilik bir acil yardım ekibi oluşturuluyor.

En az 1, en çok 4 doktorun bulunduğu kaç farklı ekip oluşturulabilir?

A) 660 B) 690 C) 730 D) 770 E) 850

13.

A = { k , m , l }

B = { a , e , o , ü }

A ve B kümelerinden alınan 2 sesli ve 2 sessiz harfle anlamlı ya da anlamsız, harfleri tekrarsız, 4 harfli kaç farklı kelime oluşturulabilir?

A) 168 B) 217 C) 340 D) 402 E) 432

14. **Aralarında Ali ve Ayşe'nin de bulunduğu 8 erkek ve 5 kız arasından kızlardan Ayşe'nin erkeklerden Ali'nin olduğu 3 erkek ve 2 kızdan oluşan 5 kişilik kaç farklı grup oluşturulabilir?**

A) 112 B) 210 C) 99 D) 90 E) 84

15. Bir otelde biri 3, diğeri 4 kişilik 2 oda vardır. İçlerinde Hasan ve Okan'ın da bulunduğu 7 kişilik bir ekip bu otele yerleşecektir.

Hasan ve Okan farklı odalarda kalmak şartıyla, bu yerleşim kaç farklı şekilde gerçekleşebilir?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 40 E) 60

16. **2 evli çiftin bulunduğu 10 kişilik topluluktan, evli çiftler birbirlerinden ve eşlerinden ayrılmamak şartıyla, 5 kişilik bir gezi grubu en çok kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 12 B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

17. 10 soruluk bir sınavda ilk 4 sorudan en az 3 ünü cevaplamak mecburidir.

Bu sınavda toplam 8 soru cevaplanacağına göre, sınava giren bir öğrenci bu soruları kaç farklı şekilde seçebilir?

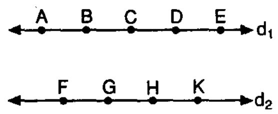
A) 99 B) 84 C) 60 D) 39 E) 25

18. 11 farklı noktanın 3 ü bir doğru üzerinde 4 ü de bu doğruya paralel başka bir doğru üzerindedir.

Buna göre, bu 11 noktadan en çok kaç farklı doğru geçer?

A) 50 B) 48 C) 46 D) 45 E) 42

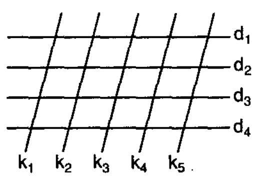
19.



Şekilde birbirine paralel d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki 9 nokta ile kaç üçgen çizilebilir?

A) 84 B) 78 C) 70 D) 64 E) 56

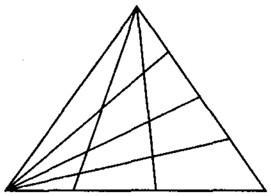
20. Yandaki şekilde; d_1, d_2, d_3, d_4 doğruları birbirine paralel ve k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 doğruları da birbirine paraleldir.



Buna göre, bu şekilde kaç farklı paralelkenar vardır?

A) 45 B) 50 C) 60 D) 72 E) 80

21. **Şekilde kaç farklı üçgen vardır?**



A) 42 B) 40 C) 39 D) 36 E) 32

22. **Aynı düzlemdeki 7 farklı çember en çok kaç noktada kesişir?**

A) 21 B) 25 C) 32 D) 36 E) 42

23. $$\binom{n}{4} + 2.\binom{n}{5} + \binom{n}{6} = 28$$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

24. $$(x - y + 2z)^7$$

ifadesinin açılımında kaç terim vardır?

A) 8 B) 15 C) 28 D) 36 E) 45

25. a bir reel sayı olmak üzere,

$$(x - 2y + az)^5$$

ifadesinin açılımında katsayılar toplamı −32 olduğuna göre, a kaçtır?

A) −3 B) −2 C) −1 D) 1 E) 3

26. $n \in Z^+$ olmak üzere,

$$(x^2 - 2y)^n$$

ifadesinin açılımında $x^6 y^3$ ün katsayısı kaçtır?

A) −240 B) −160 C) 120 D) 160 E) 240

27. $$\left(\frac{2}{x} - \sqrt[3]{x}\right)^{12}$$

ifadesinin açılımında sabit terim kaçtır?

A) −1760 B) −1480 C) −1200 D) 1200 E) 1760

28. $$\left(\frac{1}{x} - x^2\right)^7$$

açılımında x^8 li terimin katsayısı kaçtır?

A) 21 B) 12 C) 7 D) −12 E) −21

29. $n \in Z^+$ olmak üzere,

$$(x^2 + y^3 - 2z^4)^n$$

ifadesinin açılımındaki bir terim $x^6 . y^{12} . z^{20}$ olduğuna göre, n kaçtır?

A) 38 B) 35 C) 20 D) 12 E) 8

30. $$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$$

ifadesinin açılımındaki rasyonel terimlerin toplamı kaçtır?

A) −35 B) −49 C) 35 D) 49 E) 59

TESTİN ÇÖZÜMLERİ

1. $\binom{n}{1} + C(n, n-2) = 4n - 3$

$\Rightarrow \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 4n - 3$

$\Rightarrow n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 4n - 3$

$\Rightarrow n(n-1) = 2.(3n-3)$

$\Rightarrow n(n-1) = 2.3.(n-1)$

$\Rightarrow n = 6$ dır.

Cevap: C

2. ***1. yol:***
10 kişiden 5 kişi $\binom{10}{5}$ değişik şekilde, 5 kişiden bir ekip sözcüsü $\binom{5}{1}$ değişik şekilde seçilebilir. O halde, istenen yarışma ekibi,

$$\binom{10}{5}.\binom{5}{1} = \frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2}.5$$
$$= 1260$$

değişik şekilde oluşturulabilir.

2. yol:
10 kişiden 1 kişi grup sözcüsü olarak seçildikten sonra, kalan 9 kişiden 4 kişi seçilerek 5 kişilik yarışma ekibi,

$$\binom{10}{1}.\binom{9}{4} = 10.\frac{9.8.7.6}{4.3.2} = 1260$$

değişik şekilde oluşturulabilir.

Cevap: D

3. $\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\ldots+\binom{8}{7} = 2^8-\binom{8}{0}-\binom{8}{1}-\binom{8}{8}$

$= 256 - 1 - 8 - 1$

$= 246$ dır.

Cevap: B

4. $\binom{5}{1}-\binom{6}{2}+\binom{5}{2}-\binom{6}{3}+\ldots+\binom{5}{5}-\binom{6}{6}$

$=\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\ldots+\binom{5}{5}-\left[\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\ldots+\binom{6}{6}\right]$

$= 2^5-\binom{5}{0}-\left[2^6-\binom{6}{0}-\binom{6}{1}\right]$

$\Rightarrow = 32 - 1 - 64 + 1 + 6 = -26$ dır.

Cevap: A

5. Sınıf mevcudu n olsun. Problemde verilenlere göre,

$\binom{n}{2} = \dfrac{3}{5}.\binom{n}{3} \Rightarrow \dfrac{n(n-1)}{2!} = \dfrac{3}{5}.\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{10}.(n-2)$

$\Rightarrow 5 = n - 2 \Rightarrow n = 7$ dir.

Cevap: B

6. 5 kız arasından 3 kız, 6 erkek arasından 3 erkek seçilerek, kız ve erkek sayısının birbirine eşit olduğu 6 kişilik,

$$\binom{5}{3}.\binom{6}{3} = 10.20 = 200$$

farklı takım oluşturulabilir.

Cevap: C

7. 2 , 3 , 4 seçildikten sonra, yanına geriye kalan beş elemandan, yani 1 , 5 , 6 , 7 , 8 elemanlarından herhangi ikisi seçilerek oluşturulan beş elemanlı kümeler,
B = { 2 , 3 , 4 } kümesini kapsar.

O halde, beş elemandan ikisi, $\binom{5}{2} = 10$ farklı şekilde seçilebilir.

Cevap: A

8. ***1. yol:***
7 dersten üçünün seçilebildiği bütün durumların sayısından, A ve F ile birlikte üçüncü bir dersin seçildiği bütün durumların (istenmeyen durumlar) sayısı çıkarılırsa, istenen durumların sayısı,

$$\binom{7}{3} - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{A ve F} \\ \text{seçildi}}}{\binom{2}{2}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{kalan beş} \\ \text{dersten biri}}}{\binom{5}{1}} = 35 - 5 = 30 \text{ dur.}$$

2. yol:
A ile birlikte F dışında diğer 5 dersten 2 si veya F ile birlikte A dışında diğer 5 dersten 2 si veya A ve F dışında diğer 5 dersten 3 ü seçilebilir. Buna göre,

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{A}}}{\binom{1}{1}}\cdot\binom{5}{2} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{F}}}{\binom{1}{1}}\cdot\binom{5}{2} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{A ve F yok}}}{\binom{5}{3}} = 2.10 + 10 = 30 \text{ dur.}$$

Cevap: D

9. 10 kişiden 3 kişinin durumu belli olduğuna göre, kalan 7 kişinin başarı durumu; hiçbiri (0 kişi) başarılı olmayabilir, 1 kişi başarılı olabilir, ... , 7 kişi başarılı olabilir.
Buna göre, bu sınav başarı yönünden,

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \dots + \binom{7}{7} = 2^7 = 128$$

farklı şekilde sonuçlanabilir.

Cevap: E

10. 12 kişiden 8 i İzmir'e, kalan 4 ü Samsun'a gideceğine göre, bu iki grup,

$$\binom{12}{8}\cdot\binom{4}{4} = \binom{12}{4} = 495$$

farklı şekilde oluşturulabilir.

Cevap: E

11. 7 oyuncaktan 5 i küçük çocuğa $\binom{7}{5}$ farklı şekilde, kalan 2 oyuncak da büyük çocuğa $\binom{2}{2}$ farklı şekilde verilebilir. O halde bu 7 oyuncak, bu iki kardeşe,

$$\binom{7}{5}\cdot\binom{2}{2} = \binom{7}{2} = 21$$

farklı şekide paylaştırılabilir.

Cevap: C

12. 12 kişiden oluşturulabilecek 5 kişilik grupların sayısından hiç doktorun olmadığı (5 inin de hemşirelerden oluştuğu) 5 kişilik grupların sayısı ve 5 inin de doktor olduğu 5 kişilik grupların sayısı çıkarılırsa, istenen durumların sayısı,

$$\binom{12}{5} - \binom{5}{0}\cdot\binom{7}{5} - \binom{5}{5} = 770$$

olarak bulunur.

Cevap: D

13. A kümesinden 2 sessiz harf $\binom{3}{2}$ farklı sayıda (birinci iş), B kümesinden 2 sesli harf $\binom{4}{2}$ farklı sayıda (ikinci iş) seçilebilir. Seçilen bu 4 harf 4! farklı sayıda (üçüncü iş) sıralanarak, 2 si sesli, 2 si sessiz 4 harfli, harfleri tekrarsız

$$\binom{3}{2}.\binom{4}{2}.4! = 3.6.24 = 432$$

farklı kelime oluşturulabilir.

Cevap: E

14. Ayşe ve Ali grupta olacağına göre, kalan 4 kızdan biri ve kalan 7 erkekten ikisi seçilerek, Ayşe ve Ali'nin de aralarında olduğu 2 si kız, 3 ü erkek 5 kişilik gruplar,

$$\binom{4}{1}.\binom{7}{2} = 4.21 = 84$$

farklı şekilde oluşturulabilir.

Cevap: E

15. 3 kişilik odada Hasan kalırsa bu odada kalacak diğer 2 kişi, Okan dışında diğer 5 kişiden 2 si olur ve diğer 4 kişi 4 kişilik odada kalır (1. durum). Veya, 3 kişilik odada Okan kalırsa, bu odada kalacak diğer 2 kişi, Hasan dışında diğer 5 kişiden 2 si ve diğer 4 kişi de 4 kişilik odada kalır (2. durum). Buna göre, istenen tüm durumların sayısı,

H	•	•		O	•	•	•	1.durum
O	•	•		H	•	•	•	2.durum

$$\binom{5}{2}.\binom{4}{4}+\binom{5}{2}.\binom{4}{4} = 20 \text{ dir.}$$

Cevap: A

16. 2 evli çift grupta olmadığı zaman kalan 6 kişiden 5 i veya evli çiftler grupta olduğu zaman, diğer 6 kişiden biri seçilecektir.
O halde, istenen tüm durumların sayısı,

$$\binom{6}{5}+\binom{6}{1} = 6+6 = 12 \text{ dir.}$$

Cevap: A

17. 1 2 3 4 / 5 6 7 8 9 10

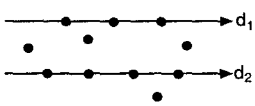
İlk 4 sorudan 3 ü ve kalan 6 sorudan 5 i seçilebilir. Veya ilk 4 sorunun 4 ü ve kalan 6 sorudan 4 ü seçilebilir.
O halde, bu şekilde, cevaplanacak tüm sorular,

$$\binom{4}{3}.\binom{6}{5}+\binom{4}{4}.\binom{6}{4} = 4.6+\frac{6.5}{2}$$
$$= 39$$

farklı şekilde seçilebilir.

Cevap: D

18.



11 noktanın herhangi üçü doğrusal olmasaydı $\binom{11}{2} = 55$ kadar farklı doğru çizilebilirdi. Ancak doğrusal 3 noktadan (şekilde d_1 doğrusu üzerindeki) ve başka bir doğru (şekildeki d_2 doğrusu) üzerindeki 4 noktadan dolayı toplam,

$$\binom{3}{2}+\binom{4}{2} = 3+6 = 9$$

doğru daha az olur. Ancak bu 9 doğrudan 2 si d_1 ve d_2 doğrusudur. Bu iki doğru da hesaba katılırsa, bu 11 nokta ile $55-9+2 = 48$ doğru çizilebilir.

Cevap: B

19. *1. yol:*

9 noktadan herhangi 3 ü doğrusal olmasaydı

$\binom{9}{3} = 84$ farklı üçgen çizilebilirdi.

Ancak d_1 doğrusu üzerindeki 5 nokta ve d_2 doğrusu üzerindeki 4 noktadan dolayı toplam,

$\binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 14$ tane daha az üçgen çizilebilir.

O halde, bu 9 nokta ile, $84 - 14 = 70$ farklı üçgen çizilebilir.

2. yol:

d_1 doğrusu üzerindeki 5 noktadan 2 si ve d_2 doğrusu üzerindeki 4 noktadan 1 i seçilerek üçgenler oluşturulabilir. Veya d_1 doğrusu üzerindeki noktalardan 1 i ve d_2 doğrusu üzerindeki noktalardan 2 si seçilerek üçgenler oluşturulabilir. Buna göre, bu noktalarla toplam,

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2} = 10.4 + 5.6$$

$$= 70$$

farklı üçgen çizilebilir.

Cevap: C

20. d_1, d_2, d_3 ve d_4 doğrularından herhangi ikisi seçilerek paralelkenarın iki kenarı, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 doğrularından herhangi ikisi seçilerek de paralelkenarın diğer iki kenarı elde edilmiş olur. O halde bu doğrular toplam,

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} = 6.10 = 60$$

farklı paralelkenar oluşturur.

Cevap: C

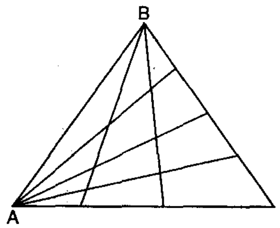
21. *1. yol:*

Herhangi üçü birden bir noktadan geçmeyen ve herhangi ikisi paralel olmayan n tane doğru $\binom{n}{3}$ farklı sayıda üçgen oluşturubalilir. O halde, şekildeki 8 doğrudan herhangi üçü bir noktadan geçmeseydi $\binom{8}{3} = 56$ farklı üçgen olurdu. Ancak bir köşeden 4, diğer bir köşeden de 5 doğru geçtiğinden üçgenlerin sayısı toplam,

$\binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 14$ tane daha azdır.

Buna göre, şekilde $56 - 14 = 42$ üçgen vardır.

2. yol:



Şekilde, bir ucu A noktası olan 5 doğru parçasından 2 si ve [AB] dışında, bir ucu B noktası olan 3 doğru parçasından 1 inin oluşturduğu veya [AB] dışında bir ucu B noktası olan 3 doğru parçasından 2 si ve [AB] dışında bir ucu A noktası olan 4 doğru parçasından 1 inin oluşturduğu toplam,

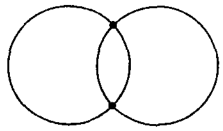
$$\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{1} = 10.3 + 3.4$$

$$= 42$$

üçgen vardır.

Cevap: A

22. Farklı iki çemberin 2 kesişme noktası olduğundan 7 farklı çember içinden seçilen her iki çember farklı iki kesim noktası meydana getirirse, 7 çember,



$$\binom{7}{2} \cdot 2 = 42$$

farklı kesim noktası oluşturur.

Cevap: E

23. $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$ olduğundan,

$$\underbrace{\binom{n}{4}+\binom{n}{5}}+\underbrace{\binom{n}{5}+\binom{n}{6}}=28$$

$$\Rightarrow \binom{n+1}{5}+\binom{n+1}{6}=28$$

$$\Rightarrow \binom{n+2}{6}=28=\binom{8}{6}$$

eşitliğini sağlayan n değeri seçeneklerden yerine yazılarak $n=6$ bulunur.

Cevap: A

24. $$(x-y+2z)^7=((x-y)+2z)^7$$

şeklinde yazılır ve terim sayısını bulacağımız için katsayıları yazmadan açılım düşünülürse,

$$(x-y)^7(2z)^0+(x-y)^6(2z)^1+...+(x-y)^0.(2z)^7$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

8 terim + 7 terim + ... + 1 terim

O halde toplam terim sayısı,

$$8+7+6+...+1=\frac{8.9}{2}=36 \text{ olur.}$$

veya $n=7$ olduğundan,

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{8.9}{2}=36 \text{ olur.}$$

Cevap: D

25. $(x-2y+az)^5$ in açılımında katsayılar toplamı -32 olduğundan, x, y ve z yerine 1 yazılırsa,

$$(1-2.1+a.1)^5=-32$$

$$\Rightarrow (-1+a)^5=(-2)^5$$

$$\Rightarrow -1+a=-2 \Rightarrow a=-1 \text{ dir.}$$

Cevap: C

26. $n \in Z^+$ ve $(x^2-2y)^n$ ifadesinin açılımında terimlerden biri x^6y^3 ise, $k \in R$ olmak üzere,

$k.x^6y^3=(x^2)^3.(-2y)^3.\binom{n}{3}$ ve x^2 ile $(-2y)$ nin üsleri toplamından, $n=3+3 \Rightarrow n=6$ olur.

Buna göre,

$$k.x^6y^3=x^6.y^3.(-2)^3.\binom{6}{3}$$

$$\Rightarrow k=-8.\frac{6.5.4}{3!} \Rightarrow k=-160 \text{ tır.}$$

Cevap: B

27. $\left(\frac{2}{x}-\sqrt[3]{x}\right)^{12}$ ifadesinin açılımında sabit terim,

$k.x^0=\binom{12}{r}.\left(\frac{2}{x}\right)^{12-r}.\left(-\sqrt[3]{x}\right)^r$ olursa,

$$k.x^0=\binom{12}{r}.2^{12-r}.(x^{-1})^{12-r}.(-1)^r.x^{\frac{r}{3}}$$

$$\Rightarrow x^0=2^{r-12+\frac{r}{3}}$$

$$\Rightarrow 0=r+\frac{r}{3}-12 \Rightarrow r=9 \text{ ve}$$

$$\Rightarrow k=\binom{12}{9}.2^{12-9}.(-1)^9$$

$$=\frac{12.11.10}{3!}.2^3.(-1)$$

$$=-1760 \text{ tır.}$$

Cevap: A

28. $\left(\frac{1}{x} - x^2\right)^7$ ifadesinin açılımında terimlerden biri,

$$\binom{7}{r}\left(\frac{1}{x}\right)^{7-r} . (-x^2)^r = k . x^8$$

$$\Rightarrow \binom{7}{r}(x^{-1})^{7-r} . x^{2r} . (-1)^r = k . x^8$$

$$\Rightarrow x^{r-7+2r} = x^8$$

$\Rightarrow 3r - 7 = 8 \Rightarrow r = 5$ tir.

O halde,

$$k = \binom{7}{r} . (-1)^r \Rightarrow k = \binom{7}{5} . (-1)^5$$

$$= -21 \text{ dir.}$$

Cevap: E

29. $(x^2 + y^3 - 2z^4)^n$ ifadesinin açılımında, n değeri;

x^2, y^3 ve $(-2z^4)$ ün üsleri toplamına eşit olduğundan,

$$x^6 y^{12} z^{20} = (x^2)^3 . (y^3)^4 . (z^4)^5$$

eşitliğinden, $n = 3 + 4 + 5 = 12$ dir.

Cevap: D

30. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$ ifadesinin açılımında rasyonel terimler,

$$\binom{4}{0} . (\sqrt{3})^4 . (-\sqrt{2})^0 = 9 ,$$

$$\binom{4}{2} . (\sqrt{3})^2 . (-\sqrt{2})^2 = 6.3.2 = 36 ,$$

$$\binom{4}{4} . (\sqrt{3})^0 . (-\sqrt{2})^4 = 4$$

olduğundan bu terimlerin toplamı,

$9 + 36 + 4 = 49$ dur.

Cevap: D

CEVAPLI TEST - 1

1. Bir lokanta müşterilerine, 2 çeşit çorba, 5 çeşit ızgara, 4 çeşit sebze yemeği ve 3 çeşit tatlı sunmaktadır.

Bir müşteri; 1 çorba, 1 ızgara, 1 sebze yemeği ve 1 tatlıdan oluşan menüyü kaç türlü seçebilir?

A) 60 B) 90 C) 120 D) 180 E) 240

2. A kentinden B kentine 5 farklı yol vardır.

Gidişte kullanılan yol, dönüşte kullanılmamak şartıyla, A dan B ye kaç farklı yoldan gidilip dönülebilir?

A) 25 B) 24 C) 21 D) 20 E) 16

3. 3 farklı hikâye kitabı, 2 farklı roman ve 3 farklı şiir kitabı, hikâye kitapları birbirinden ve şiir kitapları birbirinden ayrılmamak şartıyla bir rafa kaç farklı şekilde dizelebilirler?

A) 720 B) 864 C) 1024 D) 1200 E) 1440

4. Öğrenci sayısının öğretmen sayısından 1 fazla olduğu bir grup, öğrenciler yan yana olmak şartıyla bir sıraya 576 farklı şekilde dizilebildiklerine göre, bu grupta kaç öğretmen vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5. Aralarında Aslı ile Zeynep'in de bulunduğu 8 kişilik bir grup, Aslı ile Zepnep yan yana gelmemek üzere 8 boş koltuğa kaç farklı şekilde oturabilirler?

A) 8! – 6! B) 8! – 2.6! C) 8! – 7!

D) 8! – 2.7! E) 6! + 2.7!

6. Bir zar art arda 3 kez atıldığında ikinci atışın çift sayı olduğu kaç farklı durum vardır?

A) 24 B) 60 C) 72 D) 108 E) 144

7. 4 farklı top, her biri 4 er top alabilen 5 kutuya kaç farklı şekilde atılabilir?

A) 1024 B) 840 C) 625 D) 336 E) 120

8. Aralarında 2 evli çiftin bulunduğu 7 kişi, her evli çift eşiyle yan yana durmak şartıyla, kaç farklı şekilde fotoğraf çektirirler?

A) 96 B) 192 C) 360 D) 480 E) 720

9. Kemal ve Ayşe'nin de aralarında bulunduğu 6 kişi, kenarlarında Kemal ve Ayşe'nin oturduğu 6 kişilik bir sıraya kaç farklı şekilde oturabilirler?

A) 24 B) 36 C) 48 D) 60 E) 72

10. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

kümesinin elemanları ile üç basamaklı kaç farklı tek sayı yazılabilir?

A) 144 B) 108 C) 94 D) 90 E) 72

11. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

kümesinin elemanları ile dört basamaklı, rakamları farklı, rakamlarından biri 5 olan kaç farklı sayı yazılabilir?

A) 480 B) 570 C) 680 D) 750 E) 900

12. A = { 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 }

kümesinin elemanları ile rakamları farklı, 600 den büyük üç basamaklı kaç tane çift sayı yazılabilir?

A) 90 B) 72 C) 60 D) 50 E) 48

13. A = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7, 8 }

kümesinin elemanları ile rakamları farklı, üç basamaklı, 5 ile tam bölünemeyen kaç farklı sayı yazılabilir?

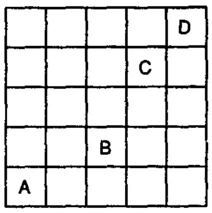
A) 294 B) 336 C) 343 D) 396 E) 448

14. A = { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }

kümesinin elemanları kullanılarak rakamları tekrarsız, üç basamaklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?

A) 55 B) 75 C) 90 D) 105 E) 120

15. Şekilde, A karesinde bulunan bir çekirge, sağa ve yukarı doğru, birer birer zıplayarak (sola ve aşağı hamle yapmadan) B ve C karelerine mutlaka uğrayarak, D karesine kaç farklı yoldan ulaşabilir?



A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) 36

16. Bir grupta, 4 anne ve her annenin 2 şer çocuğu olmak üzere toplam 12 kişi vardır.

Her anne kendi çocukları arasında kalmak şartıyla, bu grup yuvarlak bir masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilir?

A) 96 B) 144 C) 192 D) 288 E) 384

17. $(n-2)!\,.\,P(n+1\,,3) = P(6\,,2)\,.\,P(4\,,4)$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

18. 1022333

sayısının rakamları kullanılarak yedi basamaklı kaç farklı tek sayı yazılabilir?

A) 300 B) 240 C) 200 D) 180 E) 120

19. "K A P K A C A K"

kelimesinin harfleri kullanılarak 8 harfli, anlamlı ya da anlamsız, sessiz harf ile başlayıp sesli harf ile biten kaç kelime yazılabilir?

A) 40 B) 90 C) 120 D) 240 E) 300

20. "A N K A R A"

kelimesinin harflerinin 6 lı permütasyonlarının kaç tanesinde A harflerinin üçü de yan yana olur?

A) 96 B) 64 C) 48 D) 36 E) 24

21. "P A S P A S"

kelimesinin harfleri ile 6 harfli, anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

A) 72 B) 90 C) 108 D) 120 E) 144

22. İki tane 2 ve n tane 3 kullanılarak yazılabilecek (n + 2) basamaklı sayıların tamamı 45 tane olduğuna göre, n kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

CEVAP ANAHTARI

1-C	2-D	3-B	4-B	5-D	6-D	7-C	8-D	9-C	10-B	11-D
12-D	13-A	14-D	15-C	16-A	17-B	18-C	19-E	20-E	21-B	22-B

CEVAPLI TEST - 2

1. $$\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=4\cdot\binom{n}{n-1}$$

olduğuna göre, n kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2. 23 kişilik bir sınıfta; erkek öğrencilerden oluşturulan 2 şerli grupların sayısı, bu sınıftaki kız öğrencilerin sayısının 6 katına eşittir.

Buna göre, bu sınıfta kaç tane erkek öğrenci vardır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

3. A = {a, b, c, d, e, f, g}

kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a ve b elemanlarından en az biri bulunur?

A) 15 B) 21 C) 28 D) 30 E) 32

4. 7 kişi arasından, en çok 5, en az 3 kişinin bulunduğu kaç farklı gezi grubu seçilebilir?

A) 70 B) 75 C) 81 D) 87 E) 91

5. Bir torbada; aynı özellikte 3 ü mavi, diğerlerinin hepsi farklı renkte olmak üzere beş farklı renkten toplam 7 bilye vardır.

Bu bilyelerden 3 ü kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

6. 4 bay, 7 bayan arasından ikisi bay olmak şartıyla 5 kişilik bir heyet seçilecektir.

Seçilecek bayanlardan birisi belli olduğuna göre, bu heyet kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 60 B) 90 C) 120 D) 150 E) 180

7. Bir öğrenciden 10 soruluk bir sınavda 8 soruyu cevaplaması istenmektedir.

İlk 5 sorudan en az 3 ünü cevaplaması mecburi olduğuna göre, bu öğrenci, seçimini kaç farklı şekilde yapabilir?

A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

8. 5 Matematikçi, 3 Fizikçi arasından en az 2 si Matematikçi olan 4 kişilik bir ekip kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 70 B) 68 C) 65 D) 50 E) 35

9. 11 kişilik bir topluluk, biri 5 diğeri 6 kişi alabilen iki deniz motoru ile geziye çıkacaktır.

Belli iki kişi farklı guruplarda olmak üzere, 11 kişi bu iki motora kaç farklı şekilde binebilir?

A) 324 B) 288 C) 256 D) 252 E) 216

10. Bir kursta 8 dersten 3 ü aynı saatte veriliyor.

Bu derslerden dört tanesini seçecek olan bir öğrenci, seçimini kaç türlü yapabilir?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

11. A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

kümesinin elemanlarıyla rakamlarından 3 ü tek biri çift sayı olan dört basamaklı kaç sayı yazılabilir?

A) 36 B) 72 C) 96 D) 112 E) 120

12. 8 çocuklu 10 kişilik bir aileden anne ve babanın da bulunduğu 4 kişilik bir grup seçiliyor.

Seçilen bu 4 kişilik grup yuvarlak bir masa etrafına kaç farklı şekilde oturabilir?

A) 72 B) 90 C) 126 D) 168 E) 240

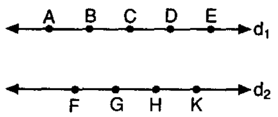
13. **Birinde 4 farklı gül, diğerinde 4 farklı papatya olan iki sepetin her birinden en az bir çiçek alınmak şartıyla 3 çiçek kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 64 B) 56 C) 48 D) 42 E) 36

$\binom{5}{2}.6$ **14.** **Aynı düzlemde, birbirinden farklı 5 üçgen en fazla kaç noktada kesişirler?**

A) 72 B) 65 C) 60 D) 54 E) 45

15.



d_1 // d_2 olmak üzere, şekildeki 9 nokta ile oluşturulabilecek üçgenlerin sayısı, dörtgenlerin sayısından kaç fazladır?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

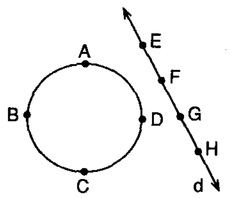
16. **4 tanesi birbirine paralel, 3 tanesi belli bir A noktasından geçen ve diğerlerine paralel olmayan farklı 10 doğru en çok kaç noktada kesişir?**

$\binom{10}{2} - \binom{4}{2} - \binom{3}{2} + 1$

A) 35 B) 36 C) 37 D) 38 E) 39

45 − 3 + 1 = 37

17. **Şekildeki çember ve d doğrusu üzerinde bulunan A, B, C, D, E, F, G, H noktaları ile çizilebilecek üçgenlerden kaç tanesinin en az bir köşesi d doğrusunun üstündedir?**



A) 33 B) 36 C) 40 D) 45 E) 48

18. $$\binom{7}{3} + 2.\binom{7}{4} + \binom{7}{5}$$

toplamının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\binom{8}{4}$ B) $\binom{8}{5}$ C) $\binom{9}{4}$ D) $\binom{9}{6}$ E) $\binom{10}{5}$

19. $$(2x - ay^3)^5$$

ifadesinin açılımında baştan 4. terimin katsayısı 1080 olduğuna göre, a kaçtır?

A) −3 B) −2 C) −1 D) 0 E) 3

20. $$\left(x^2 + \frac{3}{\sqrt{x^3}}\right)^6$$

ifadesinin açılımında, $\frac{1}{x^2}$ li terimin katsayısı kaçtır?

A) 605 B) 890 C) 1024 D) 1100 E) 1215

21. $$(2a^2 - 3b^2 + c)^n$$

ifadesinin açılımında, bir terim $A.a^4.(b.c)^6$ olduğuna göre, n kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

22. $$(x - 2.y + 1)^5$$

açılımında x^3y^2 li terimin katsayısı kaçtır?

A) 35 B) 40 C) 45 D) 50 E) 55

23. $$(m^2n - mn^3)^9$$

ifadesi m nin azalan kuvvetlerine göre açıldığında, baştan kaçıncı terimde m ile n nin kuvvetleri birbirine eşit olur?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

24. $$\left(\frac{\sqrt{3}}{x^4} - x\right)^{10}$$

ifadesinin açılımında sabit terim kaçtır?

A) 375 B) 225 C) 180 D) 150 E) 135

CEVAP ANAHTARI

1-B	2-C	3-D	4-E	5-C	6-B	7-D	8-C	9-D	10-D	11-B	12-D
13-C	14-C	15-A	16-C	17-E	18-C	19-A	20-E	21-E	22-B	23-B	24-E

30. BÖLÜM OLASILIK (İHTİMAL)

Olasılık hesabı, hem günlük hayatta, hem de temel bilimler, ekonomi, siyaset, milli savunma, meteoroloji, ticaret, ... gibi birçok bilim dalında sıkça kullanılır. Olasılık hesabının yapılma metodlarını ve kuralları, deneyinin yapılması mümkün olabilen veya kolaylıkla zihinde canlandırılabilen örneklerle vereceğiz.

A. OLASILIK TERİMLERİ

1) Deney ve Çıktı

Bir elektrik prizine akım gelip gelmediğini, kontrol kalemi yardımıyla tespit edebiliriz. Kontrol kalemini prizin faz hattına dokundurduğumuzda kalemin lambası yanarsa prize akım geliyor, yanmazsa prize akım gelmiyor sonucunu çıkarırız.

Prize akım gelip gelmediğini tespit etmek için yaptığımız işlem bir **deney**dir. Bu deneyin; prize akım gelmesi ve gelmemesi gibi iki sonucu vardır. Bu iki sonuçtan birinin olacağı deney yapılmadan bilinmektedir. Bunun gibi yapılan bir deneyde elde edilebilecek sonuçlara deneyin **çıktı**ları denir.

Bir madeni paranın atılması, iki madeni paranın birlikte atılması (veya bir madeni paranın art arda iki kez atılması), bir zarın atılması, iki zarın birlikte atılması (veya bir zarın art arda iki kez atılması), bir madeni para ve bir zarın birlikte atılması (veya bir madeni para atıldıktan sonra ardından bir zar atılması), içinde numaralandırılmış kartların bulunduğu bir torbadan kart çekilmesi, içinde renkli bilyelerin bulunduğu bir torbadan bilye çekilmesi, ... v.b birer deneydir.

Örnek:

Bir futbol maçının yapılması bir deneydir. Maçın berabere bitmesi, birinci takımın kazanması veya ikinci takımın kazanması gibi sonuçlar da bu deneyin çıktılarıdır. Bu deneyin üç tane çıktısı vardır.

2) Örnek Uzay ve Örnek Nokta

Bir deneyde elde edilebilecek tüm çıktıların kümesine **örnek uzay** denir ve **E** sembolü ile gösterilir. Örnek uzayın bir elemanına ise **örnek nokta** adı verilir.

Örnek:

1) Bir madeni paranın atılması deneyinde; Y : yazı, T : tura olma üzere,
deneyin çıktıları : Y ve T,
örnek uzay : $E = \{ Y, T \}$ ve $s(E) = 2$ dir.

2) İki madeni paranın birlikte atılması (veya bir madeni paranın arka arkaya iki kez atılması) deneyinin örnek uzayı:

$E = \{ (Y, Y), (Y, T), (T, T), (T, Y) \}$ ve
$s(E) = 2.2 = 4$ tür. (çarpma kuralı)

3) Üç madeni paranın birlikte atılması deneyinde,

$E = \{ (Y, Y, Y), (Y, Y, T), (Y, T, Y), (T, Y, Y),$
$(Y, T, T), (T, Y, T), (T, T, Y), (T, T, T) \}$ ve
$s(E) = 2.2.2 = 8$ dir. (çarpma kuralı)

4) Bir madeni paranın art arda n defa atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı,

$$s(E) = \underbrace{2.2.2. \ldots .2}_{n \text{ tane}} = 2^n \text{ dir.}$$

5) Bir zarın atılması deneyinin örnek uzayı,
$E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ ve $s(E) = 6$ dır.

6) İki zarın birlikte (veya bir zarın arka arkaya iki kez) atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı,

$s(E) = 6.6 = 36$ dır. (çarpma kuralı)

7) Bir madeni para atıldıktan sonra ardından bir zar atılması (veya bir zar atıldıktan sonra ardından bir madeni paranın atılması ya da bir madeni para ile bir zarın birlikte atılması) deneyinin örnek uzayı,

$E = \{ (Y, 1), (Y, 2), \ldots, (Y, 6), (T, 1), \ldots, (T, 6) \}$ ve
$s(E) = 2.6 = 12$ dir. (çarpma kuralı)

Örnek:

İçinde 3 mavi, 4 kırmızı bilye bulunan bir torbadan,

a) Aynı anda iki bilye (veya çekilen bilye geri atılmadan art arda iki bilye) çekme deneyinde örnek uzayın eleman sayısını,

b) Çekilen bilye tekrar torbaya atılmak şartıyla art arda iki kez bilye çekme deneyinde örnek uzayın eleman sayısını bulalım.

Çözüm:

a) Torbadan toplam, $3 + 4 = 7$ bilye olduğundan, torbadan aynı anda iki bilye çekilmesi deneyinde,

$$s(E) = \binom{7}{2} = \frac{7.6}{2!} = 21 \text{ dir.}$$

b) Çekilen bilye torbaya geri atıldığından, hem birinci çekilişte hem de ikinci çekilişte 7 durum vardır. O halde, çarpma kuralına göre,

$s(E) = 7.7 = 49$ dur.

3) Olay, İmkansız Olay ve Kesin Olay

Örnek uzayın her bir alt kümesine bir **olay** denir. Boş kümeye **imkansız olay**, E örnek uzayına ise **kesin olay** denir.

Örnek:

1) Bir madeni paranın arka arkaya iki defa atılması deneyinde, en az bir kez yazı gelme olayı A, en çok bir kez yazı gelme olayı B olsun.

$E = \{ (Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T) \}$

$A = \{ (Y, T), (T, Y), (Y, Y) \}$

$B = \{ (T, T), (Y, T), (T, Y) \}$

$A \cap B = \{ (Y, T), (T, Y) \}$ dir.

2) İçinde iki kırmızı (K_1, K_2), üç beyaz (B_1, B_2, B_3) bilye bulunan bir torbadan çekilen bir bilyenin kırmızı gelme olayı A, çekilen bir bilyenin beyaz gelme olayı B olsun.

$E = \{ K_1 , K_2 , B_1 , B_2 , B_3 \}$ ve

$A = \{ K_1 , K_2 \}$, $B = \{ B_1 , B_2 , B_3 \}$, $A \cap B = \varnothing$ dir.

3) İçinde üç kırmızı (k_1 , k_2 , k_3), iki mavi (m_1 , m_2) kalem bulunan bir kalem kutusundan aynı anda (veya çekilen kalem kutuya geri konmadan art arda) iki kalem çekilmesinde, kalemlerden birincinin kırmızı, ikincinin mavi gelmesi olayı A, birinin mavi diğerinin kırmızı gelmesi olayı B olsun.

A kümesini yazalım ve s(A) ve s(B) yi hesapla bulalım.

$A = \{(k_1, m_1), (k_1, m_2), (k_2, m_1), (k_2, m_2), (k_3, m_1), (k_3, m_2)\}$

$s(A) = 6$ dır.

Çarpma kuralından,

$(k, m) \rightarrow s(A) = 3.2 = 6$ dır.

B olayında sıranın önemi olmadığından kombinasyonla hesap yapabiliriz. O halde, birinin kırmızı, diğerinin mavi gelme olayında,

$$s(B) = \binom{3}{1}.\binom{2}{1} = 6 \text{ dır.}$$

(Burada (k_1 , m_1) varken (m_1 , k_1) hesaba katılmaz.)

4) Bir zar atılması olayında,

$E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ örnek uzayı kesin olay,

$A = \{$ zarın 7 gelmesi $\} = \varnothing$ imkansız olay,

$B = \{$ zarın asal sayı gelmesi $\} = \{ 2, 3, 5 \}$

$Ç = \{$ zarın çift sayı gelmesi $\} = \{ 2, 4, 6 \}$

$T = \{$ zarın tek sayı gelmesi $\} = \{ 1, 3, 5 \}$ ve

$B \cap Ç = \{ 2 \}$, $B \cap T = \{ 3, 5 \}$, $Ç \cap T = \varnothing$ dir.

Örnek:

8 kız, 12 erkek öğrenci bulunan 20 kişilik bir sınıftan 5 kişilik bir yarışma ekibinin seçilmesinde E örnek uzayın eleman sayısını ve

A = { seçilen 5 öğrenciden 2 sinin kız, 3 ünün erkek olması } olayının eleman sayısını bulalım.

Çözüm:

$s(E) = \binom{20}{5}$: 20 kişiden 5 kişinin seçimi

$s(A) = \binom{8}{2}.\binom{12}{3}$: 8 kızdan 2 kız öğrenci ve 12 erkekten 3 erkek öğrenci seçimi

4) Ayrık Olay

Bir örnek uzaya ait iki olayın kesişimi boş küme ise bu iki olaya ayrık olaylar denir.

Örneğin bir zar atılması deneyinde üst yüze gelen sayının hem tek hem de çift sayı olması,

$Ç \cap T = \varnothing$ dir.

Örnek:

Bir kutuda bulunan 15 tane ampulden 4 ü bozuk 11 tanesi sağlamdır. Bu kutadan aynı anda iki ampul alınması deneyinde,

A = { seçilen iki ampulden en az birinin sağlam olması } ve

B = { seçilen iki ampülün de bozuk olması } olaylarının ortak elemanları yoktur.

$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow$ A ve B ayrık olaylardır.

B. OLASILIK FONKSİYONU

Bir E örnek uzayının tüm alt kümelerinin kümesini **(kuvvet kümesi)** K ile gösterelim.

Tanım kümesi K, değer kümesi $\{ x \mid 0 \le x \le 1 \text{ ve } x \in R \}$ olan ve aşağıdaki üç aksiyomu (şartı) sağlayan her P fonksiyonuna K üzerinde bir **olasılık fonksiyonu** denir.

1. Aksiyom : $A \subset K$ için $0 \le P(A) \le 1$ dir.

2. Aksiyom : $P(E) = 1$ dir.

3. Aksiyom : $A \subset K$ ve $B \subset K$ için,

$A \cap B = \varnothing$ ise; $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dir.

Burada, **P(A)** reel sayısına **A olayının olasılığı** denir.

Örnek:

$E = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ örnek uzayının tüm alt kümelerinin kümesi K olmak üzere,

$P_i : K \to [0, 1]$ fonksiyonu için; $(i = 1, 2)$

a) $P_1(e_1) = \frac{1}{6}$, $P_1(e_2) = \frac{1}{2}$, $P_1(e_3) = \frac{1}{3}$ ise

$$P_1(e_1) + P_1(e_2) + P_1(e_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 = P(E)$$

olduğundan P_1 olasılık fonksiyonu belirtir.

b) $P_2(e_1) = \frac{1}{5}$, $P_2(e_2) = \frac{1}{10}$, $P_2(e_3) = \frac{3}{4}$ ise

$$P_2(e_1) + P_2(e_2) + P_2(e_3) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{3}{4} = \frac{21}{20} \ne 1$$

olduğundan P_2 olasılık fonksiyonu belirtmez.

Özellikler:

1) $P(\varnothing) = 0$ dır.
2) $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$ dir.
3) A', A nın tümleyeni olmak üzere,
A olayının gerçekleşme olasılığı P(A), gerçekleşmeme olasılığı P(A') ise,
$$P(E) = P(A) + P(A') = 1 \text{ dir.}$$
4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.
5) $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ikişer ikişer ayrık olaylar ve $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = E$ ise,
$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$ dir.

Örnek:

A ve B, E örnek uzayında iki olay olsun.

$P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{8}$ ve $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ ise,

a) $P(A \cap B)$ yi **b)** $P(A' \cap B)$ yi bulalım.

Çözüm:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\underset{(4)}{\frac{1}{2}} = \underset{(2)}{\frac{1}{4}} + \frac{3}{8} - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2 + 3 - 4}{8} = \frac{1}{8} \text{ dir.}$$

b) $P(A' \cap B) = P(B - A) = P(A \cup B) - P(A)$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

Örnek:

Yapılan bir deneydeki tüm çıktıların (sonuçların) kümesi, $E = \{ a, b, c \}$ dir.

Sonucun a olma olasılığı b olma olasılığının iki katı, b olma olasılığı ise c olma olasılığının üçte biri olduğuna göre, P(a) değerini bulalım.

Çözüm:

$P(a) = 2.P(b)$, $P(b) = \frac{1}{3} . P(c)$ veriliyor.

$P(a) + P(b) + P(c) = P(E)$

$P(a) + \underbrace{P(b) + 3P(b)}_{4P(b) = 2P(a)} = 1 \Rightarrow 3P(a) = 1$

$\Rightarrow P(a) = \frac{1}{3}$ tür.

C. OLASILIK HESABI

Sonlu bir örnek uzayın (E) örnek noktalarının oluşturduğu olaylar ayrıktır. Eğer bu olayların olasılıkları belirli ise, E deki her bir olayın olasılığı bulunabilir.

1) Eş Olumlu Örnek Uzay

$E = \{ e_1, e_2, e_3, \dots, e_n \}$ sonlu bir örnek uzay olsun. P olasılık fonksiyonu altında

$$P(e_1) = P(e_2) = P(e_3) = \dots = P(e_n)$$

ise, E örnek uzayına **eş olumlu (veya eş olasılı) örnek uzay** denir. Yani bir deneyde tüm çıktıların olasılıkları birbirine eşit ise, bu şekildeki örnek uzaya eş olumlu örnek uzay denir.

2) Olasılık Hesabı

n ve r pozitif tamsayı, $E = \{ e_1, e_2, e_3, \dots, e_n \}$ eş olumlu bir örnek uzay olmak üzere, E de bir olay $A = \{ e_1, e_2, e_3, \dots e_r \}$ ise, A olayının olasılığı,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{r}{n} = \frac{\text{A nın eleman sayısı}}{\text{E nin eleman sayısı}} \text{ veya}$$

pratik olarak,

$$\boxed{P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{\text{istenen durumların sayısı}}{\text{olası tüm durumların sayısı}}} \text{ dır.}$$

Örnek:

Bir zar atıldığında üst yüze;

a) Asal sayı gelme olasılığını,

b) Tek sayı gelme olasılığını,

c) Asal veya tek sayı gelme olasılığını bulalım.

Çözüm:

Örnek uzay, $E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

asal sayı gelmesi olayı, $A = \{ 2, 3, 5 \}$

tek sayı gelmesi olayı, $T = \{ 1, 3, 5 \}$

asal veya tek sayı gelme olayı, $A \cup T = \{ 1, 2, 3, 5 \}$

olmak üzere,

a) $P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$,

b) $P(T) = \dfrac{s(T)}{s(E)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$,

c) ***1. yol:***

$$P(A \cup T) = \frac{s(A \cup T)}{s(E)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

2. yol:

$A \cap T = \{ 3, 5 \}$ olmak üzere,

$$P(A \cup T) = P(A) + P(T) - P(A \cap T)$$
$$= \frac{s(A)}{s(E)} + \frac{s(T)}{s(E)} - \frac{s(A \cap T)}{s(E)}$$
$$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$

Örnek:

Bir kolideki 12 gömlekten 3 ü defoludur. Bu gömleklerden 2 tane alan birinin aldığı gömleklerden <u>en az</u> birinin sağlam olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

12 gömlekten ikisi alınacağına göre, bütün durumların sayısı,

$$s(E) = \binom{12}{2} = \frac{12.11}{2} = 66,$$

<u>en az</u> birinin defolu, yani birinin sağlam birinin defolu veya ikisinin de sağlam olduğu durumların sayısı ise,

$$s(A) = \binom{3}{1}.\binom{9}{1} + \binom{9}{2}$$
$$= 3.9 + \frac{9.8}{2} = 63$$

olduğundan,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{63}{66}$$
$$= \frac{21}{22} \text{ dir.}$$

Örnek:

Üç madeni para birlikte atıldığında,

a) Birincinin yazı, ikincinin tura, üçüncünün yazı gelmesi olasılığını,

b) İkisinin yazı, birinin tura gelmesi olasılığını,

c) En az birinin tura gelmesi olasılığını bulalım.

Çözüm:

Üç madeni paranın atılması deneyinde, örnek uzayın eleman sayısı,

$s(E) = 2.2.2 = 8$ dir.

Buna göre,

a) $A = \{ (Y, T, Y) \} \rightarrow P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{1}{8}$,

b) $\{ (Y, Y, T), (Y, T, Y), (T, Y, Y) \} \rightarrow P(B) = \dfrac{s(B)}{s(E)}$

$$= \frac{3}{8},$$

c) En az birinin tura gelmesi olayı C olmak üzere, hiçbirinin tura gelmemesi yani üçünün de yazı gelmesi olayı C' olur. Buna göre,
C' = { (Y, Y, Y) } olduğundan,

$$P(C) = 1 - P(C') \Rightarrow P(C) = 1 - \frac{s(C')}{s(E)}$$
$$= 1 - \frac{1}{8}$$
$$= \frac{7}{8} \text{ dir.}$$

Örnek:

Bir çift zar birlikte atıldığında,

a) Üst yüze gelen sayıların toplamının 5 ten küçük olma olasılığını,

b) Üst yüze gelen sayıların aynı sayı olma olasılığını,

c) Üst yüze gelen sayıların farklı olma olasılığını,

d) Üst yüze gelen sayıların çarpımının çift sayı olma olasılığını,

e) Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 7 veya çarpımlarının tek sayı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

İki zar birlikte atıldığında örnek uzayın eleman sayısı, s(E) = 6.6 = 36 olur. Buna göre,

a) A = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1) } olduğundan,

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ dır.}$$

b) ***1. yol:***

B = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) } olduğundan,

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ dır.}$$

2. yol:

B olayının elemanları ikililer olduğundan, ilk seçilen bileşen altı rakamdan herhangi biri $\binom{6}{1}$ ikinci seçilen rakam ise öncekinin aynısı yani sadece belli bir rakam $\binom{1}{1}$ olmalıdır.

Buna göre,

$$P(B) = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{1}{1}}{36} = \frac{1}{6} \text{ dır.}$$

c) ***1. yol:***

Üst yüze gelen sayıların aynı olma olayı B ise farklı olma olayı B' olur. O halde,

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \text{ dır.}$$

2. yol:

B' olayının elemanı olan ikililerin ilk seçilen bileşeni altı rakamdan herhangi biri $\binom{6}{1}$, ikinci seçilen bileşeni ise ilk seçilenin dışında diğer beş rakamdan herhangi biri $\binom{5}{1}$ olur. Buna göre,

$$P(B') = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{1}}{36} = \frac{6.5}{36} = \frac{5}{6} \text{ dır.}$$

d) Çarpımlarının çift sayı olması için ikisinin birden tek sayı olmaması gerekir.O halde, bütün durumlardan ikisinin de tek sayı olduğu durumları çıkaralım. İkisinin de tek sayı olması için ikililerin birinci bileşeni üç tek sayıdan biri ve ikinci bileşeni de üç tek sayıdan biri olmalıdır. Buna göre, çarpımlarının çift sayı olma olasılığı, $1 - \frac{3.3}{36} = \frac{3}{4}$ tür.

e) Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 7 olma olayı (M)
M = { (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) } ise
s(M) = 6,
çarpımlarının tek sayı ve toplamlarının 7 olduğu herhangi bir durum olmadığından,
$M \cap T = \varnothing$ ve s(T) = 9 olduğuna göre,

$$P(M \cup T) = P(M) + P(T) - P(M \cap T)$$

$$P(M \cup T) = \frac{6}{36} + \frac{9}{36} - 0 \Rightarrow P(M \cup T) = \frac{5}{12} \text{ dir.}$$

Sonuç:

1) Bir çift zar atıldığında, zarlardan birinin altı yüzünden üçünde tek sayı (T), üçünde de çift sayı (Ç) olduğundan, zarların her ikisinin de üst yüzüne tek sayının geldiği,

$s(T \times T) = s(T).s(T) = 3.3 = 9$ *durum,*

zarların her ikisinin de üst yüzüne çift sayının geldiği,

$s(Ç \times Ç) = s(Ç).s(Ç) = 3.3 = 9$ *durum,*

zarlardan birinin üst yüzüne tek, diğerinin üst yüzüne çift sayının geldiği,

$s(Ç \times T) + s(T \times Ç) = s(Ç).s(T) + s(T).s(Ç)$

$= 3.3 + 3.3 = 18$ *durum*

vardır.

2) İki zar atıldığında üst yüze gelen sayıların toplamının,

Toplamlar:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Adet:	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

durum vardır.

Örnek:

İki zar birlikte atıldığında üst yüze gelen sayıların toplamının

a) 8 olma olasılığını,

b) En çok 5 olma olasılığını,

c) En az 4, en çok 8 olma olasılığını

bulalım.

Çözüm:

a) Yukarıdaki tablodan A = { üst yüze gelen sayılar toplamı 8 } olan 5 durum vardır.

12	11	10	9	8
↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5

Buna göre, $P(A) = \frac{5}{36}$ dır.

b) B = { üst yüze gelen sayılar toplamı en çok 5 } olan durumlar;

2	3	4	5
↓	↓	↓	↓
1	2	3	4

olduğundan, $P(B) = \frac{1+2+3+4}{36} = \frac{\frac{4.5}{2}}{36} = \frac{5}{18}$

dir.

c) C = { üst yüze gelen sayılar toplamı en az 4, en çok 8 } olan

2	3	4	5	6	7	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	6	5

olduğundan, $P(C) = \frac{3+4+5+6+5}{36} = \frac{23}{36}$ dır.

Örnek:

Bir zar ve bir madeni para art arda atılıyor.

a) Zarın üst yüzüne gelen sayının asal sayı ve paranın tura gelmesi olasılığını,

b) Zarın üst yüzüne gelen sayının asal sayı veya paranın tura gelmesi olasılığını bulalım.

Çözüm:

Bir zar atıldığında tüm çıktıların sayısı 6, bir madeni para atıldığında tüm çıktıların sayısı 2 olduğundan bir zar ve bir madeni paranın art arda atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı, çarpma kuralına göre, s(E) = 6.2 = 12 dir.

Zarın üst yüzüne gelen sayının asal sayı olma olayı A, paranın tura gelmesi olayı T olsun.

A = { (2, Y), (2, T), (3, Y), (3, T), (5, Y), (5, T) }

T = { (1, T), (2, T), (3, T), (4, T), (5, T), (6, T) } olduğundan,

a) Zarın üst yüzüne gelen sayının asal sayı ve paranın tura gelmesi olayı $A \cap B$ = { (2, T), (3, T), (5, T) } ve

$$P(A \cap T) = \frac{s(A \cap T)}{s(E)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

b) $P(A \cup T) = P(A) + P(T) - P(A \cap T)$

$$= \frac{s(A)}{s(E)} + \frac{s(T)}{s(E)} - \frac{s(A \cap T)}{s(E)}$$

$$= \frac{6}{12} + \frac{6}{12} - \frac{3}{12} = \frac{3}{4} \text{ tür.}$$

3) Ardışık Denemeler

a) Bir deney art arda sonlu sayıda tekrar edilmiş olsun.
1 inci deneyde A_1 olayının,
2 inci deneyde A_2 olayının,
....
....
....
n yinci deneyde A_n olayının
gerçekleşme olasılığı bu olayların olasılıkları çarpımına eşittir.

$\boxed{P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_1).P(A_2). ... . P(A_n)}$ dir.

b) Belli olayların art arda gerçekleştirilmesiyle oluşan bir olayın olasılığı, bu belli olayların olasılıkları çarpımına eşit olur. Buna göre,
A, B, C art arda sırasıyla gerçekleşmiş olaylar olsun.
Birinci denemede A olayının,
İkinci denemede B olayının,
Üçüncü denemede C olayının
gerçekleşme olasılığı,

$\boxed{P(A, B, C) = P(A). P(B). P(C)}$ dir.

Örnek:
Bir zar art arda üç kez atıldığında üçünün de farklı gelme olasılığını bulalım.

Çözüm:
1. yol:
Birincide 6 sayıdan herhangi biri, ikincide birinci de gelenden farklı bir sayı (dolayısıyla 6 sayıdan 5 i), üçüncüde de ilk iki atışta gelenden farklı bir sayı (yani 6 sayıdan 4 ü) gelmelidir. Buna göre,
P(I, II, III) = P(I).P(II).P(III)

$$= \frac{6}{6}.\frac{5}{6}.\frac{4}{6} = \frac{5}{9} \text{ dur.}$$

2. yol:
İstenen olaya A diyelim. Çarpma kuralını kullanarak A olayının ve örnek uzayın eleman sayısını bularak A olayının olasılığını hesaplayalım.

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{\binom{6}{1}.\binom{5}{1}.\binom{4}{1}}{6.6.6} = \frac{5}{9} \text{ dur.}$$

Örnek:
Bir madeni para beş defa arka arkaya atılıyor.
a) İlk iki atışta yazı, diğer atışlarda tura gelme olasılığını,
b) Herhangi iki atışta yazı, diğerlerinde tura gelme olasılığını bulalım.

Çözüm:
a) P(Y, Y, T, T, T) = P(Y).P(Y).P(T).P(T).P(T)

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{32} \text{ dir.}$$

b) Herhangi iki atışta yazı, diğerlerinde tura geldiği tüm durumların sayısı,

$YYTTT \rightarrow \frac{5!}{2!.3!}$ olduğundan,

herhangi iki atışta yazı, diğerlerinin tura gelmesi olayına A denilirse, A olayının olasılığı,

$$P(A) = P(Y, Y, T, T, T) \cdot \frac{5!}{2!.3!}$$

$$= \frac{1}{32} \cdot \frac{5.4.3!}{2!.3!} = \frac{5}{16} \text{ dır.}$$

Örnek:
Bir para ve bir zar art arda atılıyor. Paranın tura, zarın asal sayı gelme olasılığını bulalım.

Çözüm:
Paranın tura gelmesi olayı T, zarın asal sayı gelmesi olayı A olsun. Buna göre,

$$P(T, A) = P(T).P(A)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

Sonuç:

Bir madeni paranın art arda n defa atılması deneyinin sonuçları ile, n tane madeni paranın aynı anda atılması deneyinin sonuçları,
Bir zarın art arda n defa atılması deneyinin sonuçları ile, n tane zarın aynı anda atılması deneyinin sonuçları,
Bir para atıldıktan sonra, ardından bir zar atılması deneyinin sonuçları ile, bir para ile bir zarın birlikte atılması deneyinin sonuçları,
Bir torbadan aynı anda n tane bilye çekilmesi deneyinin sonuçları ile, çekilen bilye torbaya geri atılmadan art arda n kez bilye çekilmesi deneyinin sonuçları, birbirleriyle aynıdır.

Örnek:

Bir torbada bulunan 9 tane bilyeden üçü kırmızı, altısı beyaz renklidir.

a) Çekilen bilye tekrar torbaya atılmak şartıyla, arka arkaya üç bilye çekildiğinde ikisinin beyaz, birinin kırmızı renkli olma olasılığını,

b) Aynı anda üç bilye çekildiğinde ikisinin beyaz, birinin kırmızı renkli olma olasılığını,

c) Çekilen bilye torbaya geri atılmadan arka arkaya üç bilye çekildiğinde birincinin kırmızı, ikinci ile üçüncünün birbirinden farklı renkte olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Üç bilyenin ikisinin beyaz, birinin kırmızı renkli olduğu durumların sayısı,

$BBK \to \dfrac{3!}{2!}$ olduğundan,

a) $P(B, B, K) = P(B).P(B).P(K).\dfrac{3!}{2!}$

$$= \frac{6}{9}.\frac{6}{9}.\frac{3}{9}.3 = \frac{4}{9}$$

b) ***1. yol:***

Üç bilye aynı anda çekildiğine ve herhangi bir sıralama söz konusu olmadığına göre, istenen olayın (B) eleman sayısı ve örnek uzayın eleman sayısı kombinasyonla hesaplanabilir. Buna göre,

$$P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{\binom{6}{2}\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{6.5}{2!}.3}{\frac{9.8.7}{3!}}$$

$$= \frac{15}{28} \text{ dir.}$$

2. yol:

Çekilen bilye torbaya geri atılmadan art arda üç çekiliş yapıldığına göre, birinci çekilişten sonra torbada 8 bilye, ikinci çekilişten sonra torbada 7 bilye kalacağından, ardışık denemeler şeklinde düşünürsek,

$$P(B, B, K) = \frac{6}{9}.\frac{5}{8}.\frac{3}{7}.\frac{3!}{2!} \qquad \left(BBK \to \frac{3!}{2!} \right)$$

$$= \frac{15}{28} \text{ dir.}$$

c) Çekilen bilye geri atılmadan, art arda 3 bilye çekildiğinde birincinin kırmızı, ikinci ile üçüncünün farklı olduğu durumlar (C olayı); KBK, KKB olduğundan,

$$K[BK] \to P(C) = \frac{3}{9}.\left[\left(\frac{6}{8}.\frac{2}{7}\right).2!\right] = \frac{1}{7} \text{ dir.}$$

(Burada, çekilen bilye geri atılmıyor ancak belli bir sıralama olduğundan kombinasyonla hesap yapılmalıdır.)

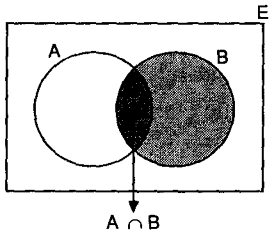
D. KOŞULLU (ŞARTLI) OLASILIK

Bir E örnek uzayının herhangi iki olayı A ve B olsun. B olayının gerçekleşmiş olması halinde A olayının gerçekleşmesi olasılığına, **A olayının B ye bağlı koşullu (şartlı) olasılığı** veya kısaca **A nın B koşulu (şartlı) olasılığı** denir ve **P(A|B)** biçiminde gösterilir.

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0} \text{ dır.}$$

Burada, E örnek uzayı eş olumlu ise, bu olayı Venn şemasıyla gösterelim.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{s(A \cap B)}{s(E)}}{\frac{s(B)}{s(E)}}$$



$$= \frac{s(A \cap B)}{s(B)} \text{ olduğundan,}$$

$$\boxed{P(A|B) = \frac{s(A \cap B)}{s(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0} \text{ dır.}$$

(Burada, B olayı gerçekleştiğine göre, örnek uzay B ye indirgenmiştir.)

Örnek:

Bir zar atıldığında üst yüze asal sayı geldiği bilindiğine göre, bu sayının tek sayı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Asal sayı gelme A, tek sayı gelme T olsun.

A = { 2, 3, 5 } ve T = { 1, 3, 5 } olduğundan,

T ∩ A = { 3, 5 }

$$P(T|A) = \frac{s(T \cap A)}{s(A)} = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$

$$\text{Veya, } P(T|A) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)} = \frac{2}{6} : \frac{3}{6} = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$

Örnek:

Bir çift zar atıldığında üst yüze aynı sayıların geldiği bilindiğine göre, toplamlarının 6 dan küçük olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Üst yüze aynı sayıların gelme olasılığı A, toplamlarının 6 dan küçük olma olasılığı B olsun.

A = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) }

B = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1) }

olduğundan, $B \cap A = \{ (1, 1), (2, 2) \}$

$$P(B|A) = \frac{s(B \cap A)}{s(A)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{veya}$$

$$= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3} \quad \text{tür.}$$

Sonuç:

A nın B koşullu olasılığı hesaplanırken B olayı örnek uzay gibi düşünülerek hesap yapılabilir.

Örnek:

1, 6, 9 rakamları birer defa 2 ve 5 rakamları ikişer defa kullanılarak yazılabilecek yedi basamaklı sayılardan bir tanesi seçiliyor.

Bu sayının tek sayı olduğu bilindiğine göre, 5 ile bölünebilen bir sayı olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

1. yol:

Seçilen sayının tek sayı olma olayı T, 5 ile bölünebilen bir tek sayı olma olayı A olsun. Buna göre,

2.iş	1.iş
· · · · · ·	birler b.
6!	4
{2,2,5,5,6,9}	{1,5,5,9} ↓ örneğin {1} yazılsın

$$s(T) = \frac{4.6!}{2!.2!}$$

2.iş	1.iş
· · · · · ·	birler b.
6!	2
{1,2,2,5,6,9}	{5,5}

$$s(A) = s(A \cap T) = \frac{2.6!}{2!.2!}$$

$$\text{Buna göre, } P(A|T) = \frac{s(A)}{s(T)} = \frac{2.6!}{4.6!} = \frac{1}{2} \quad \text{dir.}$$

2. yol:

Her bir sayının birler basamağına gelme şansı eşit ve dört tane tek sayıdan ikisi 5 olduğundan bu sayının 5 ile bölebilen bir tek sayı olma olasılığı,

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{dir.}$$

Bağımsız ve Bağımlı Olay

İki olaydan birinin gerçekleşmesi veya gerçekleşmemesi diğerinin gerçekleşme olasılığını değiştirmiyorsa bu iki olaya **bağımsız olaylar** denir.

A ve B bağımsız olaylar ise,

P(A) = P(A|B) şeklinde gösterilir.

Eğer iki olay bağımsız değilse bu iki olaya **bağımlı olaylar** denir.

A ve B olayları bağımsız olaylar ise,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

eşitliğinde içler-dışlar çarpımı yapılırsa,

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)} \quad \text{olur.}$$

O halde, $P(A \cap B) = P(A).P(B) \Leftrightarrow$ A ve B bağımsız olaylardır.

Örnek:

Bir madeni para ile bir zarın birlikte atılması deneyinde,

A = { madeni paranın yazı gelmesi } olayı ile

B = { zarın 4 ten büyük gelmesi } olayını inceleyelim.

Çözüm:

Bir madeni para ile bir zarın birlikte atılması deneyinin sonuçları (çıktıları) ile bir madeni para atıldıktan sonra ardından bir zarın atılması deneyinin sonuçları (çıktıları) aynı olduğundan, olayları ifade etme kolaylığı olması için, deneyi ikinci şekliyle düşünelim. Buna göre,

E = { (Y, 1), (Y, 2), ... , (Y, 6), (T, 1), ... , (T, 6) },

A = { (Y, 1), (Y, 2), (Y, 3), (Y, 4), (Y, 5), (Y, 6) },

B = { (Y, 5), (Y, 6), (T, 5), (T, 6) }

$A \cap B$ = { (Y, 5), (Y, 6) } dır.

Burada, hesap yapmadan önce de paranın yazı gelmesinin ya da yazı gelmemesinin, zarın 4 ten büyük bir sayı gelmesi olayını değiştirmeyeceğini kolaylıkla söyleyebiliriz.

Şimdi de hesap yaparak A olayı ile B olayının bağımsız olaylar olduğunu gösterelim.

$P(A \cap B) = P(A).P(B) \Leftrightarrow$ A ile B bağımsız olaylardır.

$$P(A \cap B) = \frac{s(A \cap B)}{s(E)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

(Bir madeni para ve bir zar atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı, $s(E) = 2.6 = 12$ dir.)

$$P(A).P(B) = \frac{6}{12}.\frac{4}{12} = \frac{1}{6} \text{ ve}$$

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ olduğu görülmektedir.

Ayrıca burada,
paranın yazı ve zarın 4 ten büyük bir sayı gelme olasılığını, bir deneyin art arda iki deney yapılarak gerçekleştirilmesi şeklinde de düşünerek,
paranın yazı gelmesi : Y ve zarın 4 ten büyük gelmesi : D olmak üzere,

$$P(A \cap B) = P(Y \cap D) = P(Y).P(D)$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

şeklinde de hesaplayabiliriz.

Örnek:

Murat'ın üniversite sınavını kazanma olasılığı $\frac{3}{5}$, Serdar'ın ise $\frac{1}{3}$ tür. Bu iki olay birbirinden bağımsız olduğuna göre,

a) Yalnız Murat'ın bu sınavı kazanma olasılığını,
b) İkisinin de bu sınavı kazanamama olasılığını,
c) Murat veya Serdar'dan en az birinin bu sınavı kazanma olasılığını bulalım.

Çözüm:

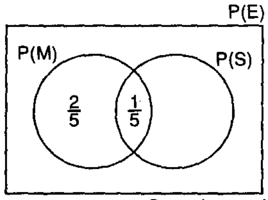
Murat'ın kazanması M, Serdar'ın kazanması S olsun.

a) Yalnız Murat'ın kazanması, Murat'ın kazanması ve Serdar'ın kazanamaması demektir.

M olayı S den bağımsız ise S' olayından da bağımsızdır. O halde,

1. yol:

$$P(M \cap S') = P(M).P(S') = \frac{3}{5}.\frac{2}{3} = \frac{2}{5} \text{ tir.}$$



$$P(M \cap S) = \frac{3}{5}.\frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

2. yol:

Venn Şeması'ndan

$$P(M \cap S') = P(M) - P(M \cap S)$$
$$= \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \text{ tir.}$$

b) $P(M' \cap S') = P(M').P(S') = \frac{2}{5}.\frac{2}{3} = \frac{4}{15}$ veya

şemadan,

$$P(S) + P(M - S) + P(M' \cap S') = 1$$
$$\Rightarrow P(M' \cap S') = 1 - (P(S) + P(M - S))$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{15} \text{ tir.}$$

c) $P(M \cup S) = P(M) + P(S) - P(M \cap S)$

$$= \frac{3}{5} + \frac{1}{3} - \frac{3}{5}.\frac{1}{3} = \frac{11}{15} \text{ veya}$$

$$P(M \cup S) = P(E) - P(M' \cap S')$$
$$= 1 - P(M').P(S')$$
$$= 1 - \frac{2}{5}.\frac{2}{3} = \frac{11}{15} \text{ tir.}$$

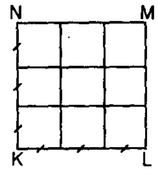
E. SONSUZ ÖRNEK UZAY

Burada sayılamayan örnek noktalardan meydana gelen E örnek uzayı; uzunluk, alan veya hacim gibi bazı sonlu geometrik ölçümlerdir.

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{\text{A nın ölçüsü}}{\text{E nin ölçüsü}}} \text{ dür.}$$

Örnek:

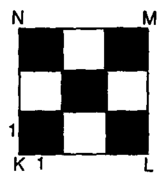
KLMN karesi, kenar uzunlukları birbirine eşit 9 küçük kareden meydana gelmiştir.



Bu kare üzerinde rastgele işaretlenen bir noktanın bulunduğu küçük karenin (9 kareden biri olan küçük karenin) köşegenleri ile KLMN karesinin köşegenlerinin çakışması (A olayı) olasılığını bulalım.

Çözüm:

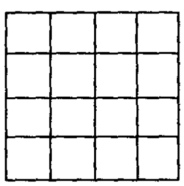
İstenen şartlara uyan kareler şekildeki taralı küçük karelerdir.



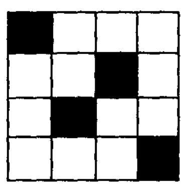
Küçük karelerden birinin alanı 1 cm^2 olarak seçilirse,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{5.1}{9.1} = \frac{5}{9} \text{ dur.}$$

Örnek:



I. Şekil



II. Şekil

Sinan, 16 küçük kareden oluşan I. şeklin <u>her satır ve her sütununda bir ve yalnız bir küçük kare</u> karalamak suretiyle II. şekildeki gibi desenler elde ediyor. Sinan bu şekilde elde edebileceği bütün desenleri öğretmenine veriyor. Sinan'ın öğretmeni de bu desenlerden birini sınıfın panosuna asıyor.

Buna göre, panoda asılı desendeki karalı tüm küçük karelerin, büyük karenin köşegenleri üzerinde olma olasılığını bulalım.

Çözüm:

Bu şekilde elde edebilecek tüm desenler;

birinci satırda, 4 küçük kareden herhangi biri,

ikinci satırda, birinci satırda karalanan kare ile aynı sütunda olmayan 3 küçük kareden biri,

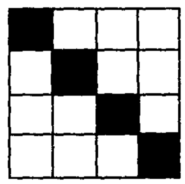
üçüncü satırda, birinci ve ikinci satırda karalanan karelerle aynı sütunda olmayan 2 küçük kareden biri ve

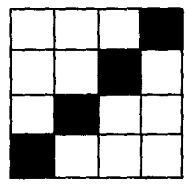
dördüncü satırda, diğer 3 satırda karalanan karelerle aynı sütunda olmayan 1 küçük kare karalanarak elde edilebilir.

O halde, elde edilebilecek tüm desenlerin sayısı (örnek uzayın eleman sayısı)

$$s(E) = 4.3.2.1 = 24 \text{ ve}$$

panoya asılı olan desen aşağıdaki iki desenden biridir. (A olayı)





Buna göre,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \text{ dir.}$$

ÇÖZÜMLÜ TEST

1. Bir kutudaki 20 yumurtanın 5 i bozuktur.

Bu kutudan aynı anda alınan 2 yumurtanın birinin bozuk diğerinin sağlam olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{19}{40}$ B) $\frac{9}{20}$ C) $\frac{16}{39}$ D) $\frac{15}{38}$ E) $\frac{7}{19}$

2. 4 erkek, 3 kız öğrenci arasından 3 öğrenci seçilecektir.

Seçilen öğrencilerden <u>en az</u> birinin erkek öğrenci olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{34}{35}$ B) $\frac{11}{12}$ C) $\frac{8}{9}$ D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{3}{4}$

3. Bir çift zar atıldığında, üst yüze gelen rakamların toplamının asal sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{11}{24}$ B) $\frac{7}{18}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{1}{3}$

4. Bir deneyde a, b ve c olmak üzere, 3 ayrı sonuç (çıktı) olasıdır.

Sonucun a veya c olma olasılığı $\frac{5}{8}$, b veya c olma olasılığı $\frac{3}{4}$ olduğuna göre, a veya b olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{8}$

5. Beş evli çift (karı-koca) arasından seçilen iki kişinin bir eş (karı-koca) olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{10}$

6. Bir annenin iki çocuğundan birisi erkek olduğuna göre, diğerinin kız olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

7. Bir düzgün dörtyüzlünün (bütün yüzleri eşkenar üçgen olan üçgen piramit) herhangi iki yüzünde A, diğer iki yüzünde de S ve T harfleri yazılıdır.

Bu düzgün dört yüzlü bir kez atıldığında yan yüzlerinde, sırasına ve yönüne bakılmaksızın A, S, T harflerinin görülme olasılığı kaçtır?

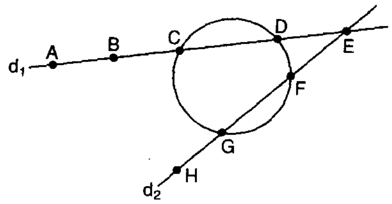
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

8. Bir kutunun içinde 2 kırmızı, 2 mavi ve 2 sarı top vardır.

Çekilen top <u>geri konulmamak</u> şartıyla art arda 2 top rastgele çekildiğinde, bu 2 topun ikisinin de farklı renk olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

9.



Yukarıdaki şekilde; A, B, C, D, E noktaları d_1 doğrusu; E, F, G, H noktaları d_2 doğrusu; C, D, F, G noktaları da çember üzerindedir.

Bu 8 noktadan seçilen 2 noktanın sadece birinin çember üzerinde olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{5}{8}$

10. Bir kutuda (x – 3) tane beyaz, 3 tane kırmızı top vardır.

Bu torbadan geri konulmadan art arda çekilen 2 toptan birincisinin beyaz, ikincisinin kırmızı olma olasılığı $\frac{3}{2x-2}$ olduğuna göre, x kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

11. Kırmızı ve mavi topların bulunduğu bir torbadan seçilen bir topun mavi olma olasıığı $\frac{2}{5}$ tir.

Torbadaki topların sayısı 25 den fazla olduğuna göre, torbada en az kaç kırmızı top vardır?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

12. Bir torbada 1 den 5 e kadar numaralandırılmış 5 kırmızı ve 1 den 5 e kadar numaralanmış 5 yeşil top vardır.

Çekilen bir topun kırmızı veya üzerinde 3 yazan bir top olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

13. 500 den küçük bütün doğal sayılar birer karta yazılarak kartlar bir torbaya konuluyor.

Torbadan rastgele çekilen bir kartın üzerindeki sayının 2 ile bölünebildiği halde 3 ile bölünemeyen bir sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{21}{50}$ B) $\frac{33}{100}$ C) $\frac{83}{125}$ D) $\frac{83}{250}$ E) $\frac{167}{500}$

14. "ÇİĞDEM"

kelimesinin harfleri ile oluşturulacak anlamlı ya da anlamsız, harfleri tekrarsız, 5 harfli kelimelerin içinden seçilen bir kelimede 2 sesli harf bulunma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

15. 50 kişilik bir sınıfta 30 kişi Türkçe'den, 25 kişi de Matematik'ten başarılı, 10 kişi ise her ikisinden de başarısız olmuştur.

Bu sınıftan seçilen iki kişinin ikisinin de bu iki dersin sadece birinden başarılı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{12}{49}$ B) $\frac{13}{50}$ C) $\frac{6}{25}$ D) $\frac{7}{26}$ E) $\frac{7}{25}$

16. İçerisinde 4 mavi, 6 sarı bilye bulunan bir torbadan aynı anda iki bilye rastgele alınıyor.

Bilyelerin ikisinin de aynı renk olduğu bilindiğine göre, mavi renkli olmaları olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{21}$ B) $\frac{2}{21}$ C) $\frac{1}{14}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{2}{7}$

17. Aylâ'nın bir işe girme olasılığı $\frac{2}{5}$, Leylâ'nın aynı işe girme olasılığı $\frac{4}{5}$ tir.

En çok birinin bu işe girme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{25}$ B) $\frac{6}{25}$ C) $\frac{17}{25}$ D) $\frac{22}{25}$ E) $\frac{24}{25}$

18. Bir atıcının bir hedefi vurulabilme olasılığı $\frac{2}{3}$ tür.

Buna göre, bu atıcının en çok 3 atışta hedefi vurabilme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{26}{27}$ B) $\frac{23}{24}$ C) $\frac{17}{18}$ D) $\frac{11}{12}$ E) $\frac{8}{9}$

19. Bir soruyu, Ali'nin çözebilme olasılığı $\frac{1}{2}$, Tuna'nın çözebilme olasılığı $\frac{2}{3}$ ve Sezer'in çözebilme olasılığı ise $\frac{3}{5}$ tir.

Buna göre, bu sorunun bu üç kişiden en az biri tarafından çözülebilme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{9}{10}$ B) $\frac{11}{12}$ C) $\frac{13}{14}$ D) $\frac{14}{15}$ E) $\frac{15}{16}$

20. Piyano veya gitar derslerinden en az birini alanların bulunduğu 30 kişilik bir kursta 15 kişi piyano, 20 kişi gitar dersi almaktadır.

Bu kurstan seçilen bir kişinin gitar dersi aldığı bilindiğine göre, bu kişinin piyano dersi de alıyor olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{3}{20}$

21. A ve B kutularının her ikisinde de 3 mavi ve 5 kırmızı top vardır. A kutusundan bir top rastgele çekilip B kutusuna atılıyor.

Bundan sonra, B kutusundan rastgele çekilen bir topun kırmızı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{13}{24}$ B) $\frac{9}{16}$ C) $\frac{5}{16}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{3}{8}$

22. Bir A torbasında 3 kırmızı, 5 mavi bilye, B torbasında ise 3 beyaz, 3 kırmızı bilye vardır. Her iki torbadan aynı anda birer bilye çekiliyor ve A torbasından çekilen bilye B torbasına , B torbasından çekilen bilye de A torbasına atılıyor.

Bu işlem sonucunda torbalardaki kırmızı, mavi ve beyaz bilye sayılarının başlangıçtaki ile aynı olma olasılığı kaçtır?

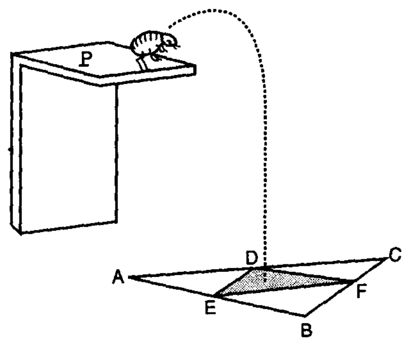
A) $\frac{11}{24}$ B) $\frac{7}{24}$ C) $\frac{5}{24}$ D) $\frac{5}{16}$ E) $\frac{3}{16}$

23. Hileli bir zarın değişik yüzlerinin gelme olasılığı yüzler üzerindeki sayılarla doğru orantılıdır.

Bu zar bir kez atıldığında üst yüze çift sayı gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{11}{14}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{4}{7}$

24.



Şekildeki P düzleminin ucundan zıplayan bir pire, her seferinde yerde üçgen biçimindeki ABC karosu üzerine düşmektedir. ABC üçgeninin kenarlarının orta noktaları D, E, F dir.

Buna göre, pirenin bir zıplayışta şekildeki taralı bölge (DEF) üzerine düşme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

TESTİN ÇÖZÜMLERİ

1. *1. yol:*

İstenen olay A olsun. 15 sağlam yumurtadan 1 sağlam ve 5 bozuk yumurtadan 1 bozuk yumurta kutudan, $\binom{15}{1}.\binom{5}{1}$ farklı sayıda alınabilir. Olabilecek tüm durumlar ise (E) 20 yumurtadan 2 yumurtanın alınmasıdır.

Buna göre,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{\binom{15}{1}.\binom{5}{1}}{\binom{20}{2}}$$

$$= \frac{15.5}{\frac{20.19}{2!}} = \frac{15}{38} \text{ dir.}$$

2. yol:

20 yumurtanın 15 i sağlam (S), 5 i bozuk (B) olduğundan, alınan yumurta kutuya geri konmadan art arda 2 yumurta alındığında birinin sağlam, birinin bozuk olma olasılığı,

$$BS \rightarrow 2!.\frac{5}{20}.\frac{15}{19} = \frac{15}{38} \text{ dir.}$$

Cevap: D

2. Seçilen üç kişiden en az birinin erkek olması (e) olayına A denilirse, hiçbirinin erkek olmaması (e'), yani üçünün de kız olması olayı A' olur.

O halde, 7 öğrenciden ilk olarak seçilen öğrencinin kız öğrenci olma olasalığı $\frac{3}{7}$, kalan 6 öğrenciden seçilen öğrencinin kız öğrenci olma olasılığı $\frac{2}{6}$, kalan 5 öğrenciden seçilen bir öğrenci nin kız öğrenci olma olasıgı $\frac{1}{5}$ olduğundan,

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - P(e', e', e')$$

$$= 1 - \frac{3}{7}.\frac{2}{6}.\frac{1}{5}$$

$$= \frac{34}{35} \text{ tir.}$$

Cevap: A

3. Bir çift zar atıldığında örnek uzayın eleman sayısı s(E) = 36 dır.

Üst yüze gelen sayıların toplamının asal sayı olması olayı A olmak üzere, bu toplamlar,

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

$2 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 2$, $5 \rightarrow 4$, $7 \rightarrow 6$, $11 \rightarrow 2$

olduğundan,

$$P(A) = \frac{1+2+4+6+2}{36} = \frac{5}{12} \text{ dir.}$$

Cevap: C

4. Bir deneyin çıktıları ikişer ikişer ayrık olaylardır. O halde, problemde verilenlere göre,

$$P(a) + P(c) = \frac{5}{8}$$

$$+\quad P(b) + P(c) = \frac{3}{4}.\frac{2}{2}$$

$$\underbrace{P(a) + P(b) + P(c)}_{1} + P(c) = \frac{11}{8}$$

$$\Rightarrow P(c) = \frac{3}{8} \text{ ve}$$

$$P(a) + P(b) = \frac{11}{8} - 2.P(c)$$

$$= \frac{5}{8} \text{ dir.}$$

Cevap: E

5. Seçilen birinci kişi 10 kişiden herhangi birisi, ikinci kişi ise kalan 9 kişiden birincinin eşi olan yani 9 kişidin birisi olmalıdır. Buna göre,

$\frac{10}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ dur.

Cevap: D

6. Annenin iki çocuğundan birisi, erkek (e) olduğuna göre, örnek uzay, $E = \{ (e, k), (k, e), (e, e) \}$ ve diğerinin kız (k) olması olayı,
$A = \{ (e, k), (k, e) \}$ olur.

O halde,

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{2}{3}$ tür.

Cevap: C

7. İstenen durumun gerçekleşmesi (görünen üç yüzde A, S, T yazılı olması) için A lardan 2 sinden biri yere gelmelidir. O halde, 4 yüzden 2 sinin yere gelme olasılığı,

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ dir.

Cevap: A

8. ***1. yol:***
Kırmızı (K), mavi (M), sarı (S) olmak üzere, istenen durumlar,
$P(K, K') + P(M, M') + P(S, S')$
$= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ tir.

2. yol:
Kırmızı, mavi ve sarı topların sayısı eşit olduğundan, çekilen bir top kutuya geri konulmamak şartıyla, ilk olarak 6 toptan herhangi biri 6 değişik şekilde şeçilebilir. Bundan sonra, seçilen ikinci topun renginin birinciden farklı renkte olması, yani kalan 5 toptan 4 ü olması gerekir. O halde, seçilen iki toptan ikisinin farklı renk olma olasılığı,

$\frac{6}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ tir.

Cevap: E

9. ***1. yol:***
İstenen, çember üzerindeki 4 noktadan birinin ve çember üzerinde olmayan diğer 4 noktadan birinin seçilmesi olayıdır (A). Olabilecek tüm durumlar ise 8 noktadan 2 sinin seçilmesi olayı olduğundan,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(B)} = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{8}{2}}$$

$$= \frac{4 \cdot 4}{\frac{8 \cdot 7}{2!}} = \frac{4}{7} \text{ dir.}$$

2. yol:
C, D, F, G noktaları beyaz bilye; A, B, E, H noktaları da kırmızı bilye gibi düşünülürse, istenen sonuç seçilen 2 bilyeden birinin kırmızı, birinin beyaz olması olasılığına eşit olur. Buna göre,

$2! \cdot P(K,B) = 2! \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$ dir.

Cevap: C

10. Kutuda toplam, $x - 3 + 3 = x$ tane top olduğundan,

$$P(B,K) = \frac{x-3}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{3}{2x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{x} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2(x-1)}$$

$$\Rightarrow (x-3) \cdot 2 = x$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ dır.}$$

Cevap: D

11. Torbadan çekilen bir topun mavi olma olasılığı $\frac{2}{5}$ olduğuna göre, mavi topların sayısı 2x, tüm topların sayısı 5x ve kırmızı topların sayısı 3x olsun.
$5x > 25 \Rightarrow x > 5$ ve x en az 6 seçilirse torbadaki kırmızı topların sayısı en az $3.6 = 18$ olabilir.

Cevap: D

12. Çekilen topun kırmızı gelme olayı K, 3 gelme olayı M olsun. Torbadaki toplam 10 toptan ikisinin üzerinde 3 yazılı, 5 i kırmızı ve 5 i yeşildir. Buna göre,

$$P(K \cup M) = P(K) + P(M) - P(K \cap M)$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{2}{10} - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ tir.}$$

Cevap: C

13. 500 den küçük 2 ile bölünebilen tüm doğal sayılar 250 tane (0 dahil), 2 ve 3 ile yani 6 ile bölünebilen tüm sayılar, 498 : 6 = 83 olduğundan 83 + 1 = 84 tanedir (0 dahil). O halde, 2 ile bölünüp 3 ile bölünemeyen 250 − 84 = 166 tane doğal sayı olduğundan çekilen kartın üzerindeki sayının 2 ile bölünebilen fakat 3 ile bölünemeyen bir sayı olma olasılığı,

$$\frac{166}{500} = \frac{83}{250} \text{ dir.}$$

Cevap: D

14. "ÇİĞDEM" kelimesinin harfleri birer defa kullanılarak, 2 si sesli, 3 ü sessiz harften oluşan 5 harfli,

$$\binom{2}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot 5! = 4 \, . \, 5!$$

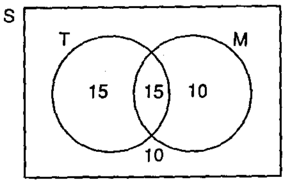
farklı kelime yazılabilir (A olayı). Harfleri tekrarsız, 5 harfli tüm kelimelerin sayısı, P(6,5) = 6! olduğundan,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{4 \, . \, 5!}{6!}$$

$$= \frac{2}{3} \text{ tür.}$$

Cevap: D

15. Türkçeden başarılı olanların kümesini T, Matematikten başarılı olanların kümesini M ile gösterelim ve verilenlere uygun Venn Şeması'nı çizelim.



$A = (T - M) \cup (M - T)$ ve $s(A) = 15 + 10 = 25$ olmak üzere, 50 kişiden seçilen 2 kişinin A kümesinden seçilecek 2 kişi olma olasılığı,

$$P(A) = \frac{\binom{25}{2}}{\binom{50}{2}} = \frac{25 \, . \, 24}{50 \, . \, 49} = \frac{12}{49} \text{ dur.}$$

Cevap: A

16. Problemde verilenlere göre örnek uzay, ikisinin de mavi $\binom{4}{2}$ veya ikisininde sarı $\binom{6}{2}$ olduğu tüm durumlardır.

Buna göre, ikisinin de mavi olma olasılığı,

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2} + \binom{6}{2}} = \frac{6}{6 + 15} = \frac{2}{7} \text{ dir.}$$

Cevap: E

17. En çok birinin işe girmesi istendiğine (N olayı) göre, her ikisinin de işe girmesi istenmeyen (N') durumdur. O halde,

$$P(N) = 1 - P(N') = 1 - P(A \, , L)$$

$$= 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{17}{25} \text{ tir.}$$

Cevap: C

18. En çok üç atışta hedefin vurulması (V) istendiğine (A olayı) göre, üç atışta da hedefin vurulamaması (V') istenmeyen olaydır (A'). Buna göre,

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - P(V', V', V')$$

$$= 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{26}{27} \text{ dir.}$$

Cevap: A

19. Bu üç kişi tarafından bu sorunun çözülmesi olayı A olursa, üçünün de bu soruyu çözememesi olayı A' olur. O halde,

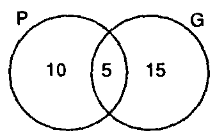
$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$$

$$= \frac{14}{15} \text{ tir.}$$

(Burada Ali'nin, Tuna'nın ve Sezer'in bu soruyu çözememe olasılıkları sırasıyla, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ve $\frac{2}{5}$ tir.)

Cevap: D

20. Piyano dersi alanların kümesi P, gitar dersi alanların kümesi G olmak üzere, verilenler uygun bir şekilde Venn Şeması'nda gösterilirse,

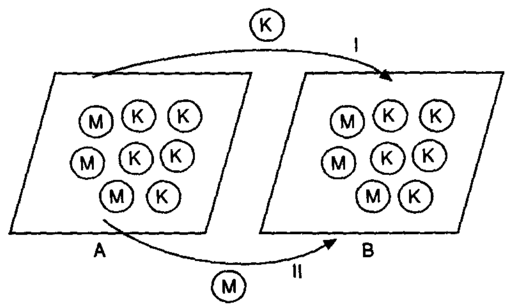


$A = P \cap G$ ve $s(A) = 5$,
$E = G$ ve $s(E) = 20$ olduğundan

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

Cevap: B

21.



A kutusundan çekilip B kutusuna atılan top, kırmızı (K) olabilir (I) veya mavi (M) olabilir (II).

Bundan sonra B kutusundan çekilen bir topun kırmızı (K) olma olasılığı,

$$P(K) = P_A(K) \cdot P_{I-B}(K) + P_A(M) \cdot P_{II-B}(K)$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{5+1}{8+1} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8+1}$$

$$= \frac{30+15}{8.9} = \frac{5}{8} \text{ dir.}$$

Cevap: D

22. Yapılan bu işlem sonunda başlangıçtaki durumun elde edilebilmesi için her iki torbadan da aynı renk (yani kırmızı) bilye çekilmelidir. O halde, her iki torbadan da kırmızı renk bilye çekilme olasılığı,

$$P_A(k) . P_B(k) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{16} \text{ dır.}$$

Cevap: E

23. ***1. yol:***

Bir sayının üst yüze gelme olasılığı bu sayı ile orantılı olduğuna göre,

bir tane 1 olan yüzü,
iki tane 2 olan yüzü,
....
....
....
altı tane 6 olan yüzü
olmak üzere, toplam;

$$1+2+3+4+6=\frac{6.7}{2}=21$$

yüzü olan bir zar düşünelim.

Bu zar bir kez atıldığında üst yüze çift sayı gelme olayı (A) olsun.

$A=\{2,2,4,4,4,4,6,6,6,6,6,6\}$

olduğundan,

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7} \text{ dir.}$$

2. yol:

Bir sayının üst yüze gelme olasılığı bu sayı ile doğru orantılı olduğundan,

$P(1)=k,\ P(2)=2k, \dots, P(6)=6k$ olur.

Buna göre,

$P(1)+P(2)+\dots+P(6)=1$

$$\Rightarrow k+2k+\dots+6k=1 \Rightarrow k.\frac{6.7}{2}=1$$

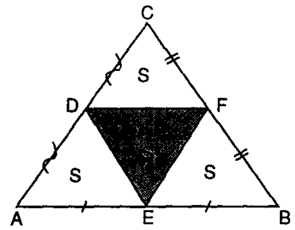
$$\Rightarrow k=\frac{1}{21} \text{ ve}$$

üst yüze çift sayı gelme olasılığı,

$$P(2)+P(4)+P(6)=2k+4k+6k$$
$$=12k$$
$$=\frac{4}{7} \text{ dir.}$$

Cevap: E

24.



ABC üçgeninin kenarlarının orta noktaları D, E, F olduğundan alanları birbirine eşit olan şekildeki gibi 4 bölge oluşur. Buna göre, pirenin DEF üçgensel bölgesi içine düşme olasılığı, P(A)

$$P(A)=\frac{A(DEF)}{A(ABC)}=\frac{S}{4S}=\frac{1}{4} \text{ tür.}$$

Cevap: C

CEVAPLI TEST

1. **Bir zar üç kez atıldığında, bir kez 1, iki kez 2 gelme olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{72}$ B) $\frac{1}{48}$ C) $\frac{1}{36}$ D) $\frac{1}{24}$ E) $\frac{1}{9}$

2. 4 öğrenci ve 3 öğretmen bir sıraya diziliyor.

Her iki öğrenci arasına bir öğretmen gelecek şekilde dizilmiş olmalarının olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{1}{21}$ D) $\frac{5}{21}$ E) $\frac{1}{35}$

3. **Bir çift zar atıldığında üst yüze gelen sayıların geometrik ortalamasının tek sayı olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

4. Bir torbada aynı büyüklükte pembe, mor ve sarı renkli toplar vardır. Bu torbadan bir pembe top çekme olasılığı, bir mor top çekme olasılığının $\frac{3}{2}$ sine; bir mor top çekme olasılığı ise bir sarı top çekme olasılığının $\frac{5}{4}$ üne eşittir.

Buna göre, torbada en az kaç top vardır?

A) 11 B) 22 C) 33 D) 44 E) 55

5. A ve B, E örnek uzayında iki olay olmak üzere,

$P((A \cap B)') = \frac{2}{3}$, $P(A') = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$

olduğuna göre, $P((A \cup B)')$ kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{12}$

6. $A = \{1, 2, 3, 4\}$

kümesinin alt kümelerinden seçilen bir kümede "1" elemanının bulunup, "3" elemanının bulunmama olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{3}{4}$

7. Bir torbada 4 ü beyaz, 6 sı lacivert olmak üzere 10 bilye vardır. Çekilen bilyeler geri konmamak şartıyla torbadaki bilyeler birer birer çekiliyor.

Buna göre, ilk kez dördüncü çekilişte lacivert gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{105}$ B) $\frac{1}{35}$ C) $\frac{24}{625}$ D) $\frac{2}{21}$ E) $\frac{2}{15}$

8. A ve B torbalarının her ikisinde de 5 kırmızı, 2 mavi top vardır.

A ve B torbalarından birer top çekildiğinde, topların farklı renk olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{11}{49}$ B) $\frac{15}{49}$ C) $\frac{18}{49}$ D) $\frac{20}{49}$ E) $\frac{23}{49}$

9. Bir kreşteki 15 çocuktan 2 si kıvırcık saçlıdır.

Rastgele seçilen üç çocuktan <u>en çok birinin</u> kıvırcık saçlı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{17}{70}$ B) $\frac{31}{70}$ C) $\frac{31}{35}$ D) $\frac{33}{35}$ E) $\frac{34}{35}$

10. Birbirine tıpatıp benzeyen dördüz kardeşler bir kafeye gidip garsona 1 çay, 1 kahve, 1 limonata ve 1 kola ısmarlıyorlar.

Buna göre, garsonun şaşırmadan, içeceklerin hepsini doğru kişilere verme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

11. Bir kutudaki naneli şekerlerin sayısı limonlu şekerlerin sayısının iki katıdır.

Bu kutudan, geri konmamak üzere art arda alınan iki şekerin naneli olma olasılığı $\frac{17}{39}$ olduğuna göre, bu kutuda kaç şeker vardır?

A) 18 B) 21 C) 27 D) 30 E) 36

12. 2 ile 13 arasındaki doğal sayılardan 2 tane seçiliyor.

Seçilen bu iki sayının ikisinin de 3 ün katı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{15}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{4}{15}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

13. Tuğba'ya 4 seçenekli 4 soru soruluyor. Tuğba bu sınavda art arda aynı seçeneğin doğru cevap olmadığını bilmektedir.

Bu sınavda, cevapları rastgele işaretleyen Tuğba'nın 4 sorunun dördünü de doğru cevaplama olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{256}$ B) $\frac{1}{192}$ C) $\frac{1}{144}$ D) $\frac{1}{108}$ E) $\frac{1}{81}$

14. Bir zar art arda iki kez atılıyor.

İlk atışta 5 ten küçük geldiği bilindiğine göre, her iki zarda gelen sayıların çarpımının tek sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

15. Düzgün bir dörtyüzlünün 2 yüzünde birer tek sayı ve diğer 2 yüzünde birer çift sayı yazılıdır.

Bu dörtyüzlü atıldığında gözüken sayıların toplamının tek sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{25}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

16. Bir sınıfın % 60 ı erkek öğrencidir. Kız öğrencilerin % 60 ı, erkek öğrencilerin ise yarısı matematik dersinden başarılıdır.

Seçilen bir öğrencinin matematik dersinden başarılı olduğu bilindiğine göre, kız öğrenci olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{2}{15}$ E) $\frac{6}{25}$

17. **Bir dairenin içinde rastgele işaretlenen bir noktanın, dairenin merkezinden çok çeperine (çevresine) yakın olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

18. Bir soruyu Suat'ın, Selin'in ve Berna'nın çözebilme olasılıkları sırasıyla $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ve $\frac{3}{5}$ tir.

Bu soruyu, bu üç kişiden sadece ikisinin çözebilme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{7}{20}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{9}{20}$ E) $\frac{1}{2}$

19. A torbasında 3 beyaz 2 kırmızı, B torbasında ise 3 beyaz 5 kırmızı bilye vardır. A torbasından bir bilye çekme olasılığı $\frac{1}{3}$, B torbasından bir bilye çekme olasılığı ise $\frac{2}{3}$ tür.

Buna göre, bu torbalardan herhangi birinden çekilen bir bilyenin beyaz renkli olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{7}{10}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{9}{20}$

20. Bir sınava katılan öğrencilerden 35 i bayan, 15 i erkektir.

Bayanların $\frac{4}{7}$ si başarısız, erkeklerin ise $\frac{2}{5}$ i başarılı olduğuna göre, rastgele seçilen bir öğrencinin erkek veya başarısız olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{22}{25}$ B) $\frac{16}{25}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{4}{5}$

21. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

kümesinin elemanları ile oluşturulabilecek iki basamaklı, rakamları tekrarsız, çift sayıların arasından seçilen bir sayının 5 in katı bir sayı olmasının olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{11}$ B) $\frac{4}{11}$ C) $\frac{5}{13}$ D) $\frac{8}{13}$ E) $\frac{10}{13}$

22. $(x-3)^4$

ifadesinin açılımındaki her terimin katsayısı birer karta yazılıyor ve kartlar bir kutuya konuyor.

Kutudan aynı anda çekilen iki kartın üzerindeki sayıların toplamının tek sayı olma olasılığı kaçtır?

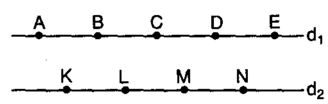
A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

23. Yazı gelme olasılığı $\frac{1}{3}$ olan hileli bir madeni para ile hilesiz bir madeni para düzgün bir zemine birlikte atılıyor.

İkisinin de tura gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

24.



Yukarıdaki şekilde; A, B, C, D, E noktaları d_1 doğrusu, K, L, M, N noktaları da d_2 doğrusu üzerinde olup $d_1 // d_2$ dir.

A, B, C, D, E, K, L, M, N noktaları kullanılarak elde edilebilecek üçgenlerden seçilen bir üçgenin sadece bir noktasının d_1 doğrusu üzerinde olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{7}$

CEVAP ANAHTARI

1-A	2-E	3-A	4-C	5-C	6-C	7-B	8-D	9-E	10-A	11-C	12-A
13-D	14-D	15-D	16-C	17-E	18-D	19-E	20-D	21-C	22-C	23-D	24-C