

LYS

GEOMETRİ

KONU ANLATIMLI SORU BANKASI



Bu kitabın her hakkı saklıdır ve Ekstrem Yayıncılık'a aittir. Kitaba ait metin ve sorular, kaynak gösterilerek de olsa kullanılamaz. Kitabın hazırlanış yöntemi taklit edilemez.

ISBN : 978 – 605 – 5403 – 81 – 2

İsteme Adresi

Ekstrem Yayıncılık

Tlf: (0322) 235 64 65
Belgeç : (0322) 232 86 27

www.ekstrem.com.tr

Katkılarından dolayı
TMOZ
(Türkiye Matematik Öğretmenleri Zümresi)
öğretmenlerine teşekkür ederiz.

Grafik Tasarım – Dizgi

Ekstrem Yayıncılık

BASKI

Özkan Matbaacılık Gazetecilik San. ve Tic. Ltd. Şti.
ASO 1. Organize Sanayi Bölgesi Uygurlar Cad. No.6
Sincan / ANKARA
Tel: (312) 395 48 91 - 92

ÖN SÖZ

Sevgili Öğrenciler,

Okul derslerinizde ve üniversite giriş sınavlarında başarılı olmak, dilediğiniz fakülteyi kazanmak; bilinçli hazırlanmanıza, düzenli bir çalışma programı uygulamanıza, iyi bir yayın seçmenize ve bu yayınlar ışığında derste öğretmeninizi iyi dinlemenize bağlıdır.

"Kaliteli eğitim, kaliteli doküman" felsefesiyle yola çıkan **"Ekstrem Yayınları"** tüm branşlardaki kitaplarında ayrıntılı konu anlatımı ve hücreleme sistemi ile konu alt başlıklarında fazla sayıda, değişik türde soruya yer vererek öğrencinin konuyu kavramasını kolaylaştırmayı amaçlamıştır. Elinizdeki 9, 10, 11. sınıfları kapsayacak şekilde hazırlanan **"LYS Geometri Konu Anlatımı"**ndaki konular Talim Terbiye Kurulunun açıkladığı müfredat çerçevesinde hazırlanmış, geometri dersinin sevilen ve kolay kavranılan bir ders haline getirilmesi amaçlanmıştır. Kitapta fazla sayıda çözümlü soruya yer verilerek konuların pekiştirilerek öğretilmesi amaçlanmıştır. Konu testleri ile kendinizi test edebilir, eksik kalan ve anlamadığınız yerleri tekrar çalışabilirsiniz.

LYS Geometri Konu Anlatımlı soru bankasının başarılarınıza katkısının büyük olacağı kanaatiyle, tüm üniversite adaylarına YGS ve LYS sınavında başarılar diliyor, kitabımızın hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen geometri öğretmenleri arkadaşlarımıza teşekkür ederiz.

Hepinizin yolu açık, kalemî güçlü olsun!

Celal İŞBİLİR

celal.isbilir@gmail.com



**ÜNİTE-1****DÜZLEM GEOMETRİDE TEMEL ELEMANLAR ve İSPAT BİÇİMLERİ** 7 - 16

- ⇒ Postulat
- ⇒ İspat

ÜNİTE-2**DÜZLEMDE NOKTA, DOĞRU ve VEKTÖRLER** 17 - 40

- ⇒ Nokta, Doğru, Düzlem Arasındaki İlişkiler
- ⇒ Kapalı Yarı Doğru, Açık Yarı Doğru
- ⇒ Kapalı Yarı Düzlem, Açık Yarı Düzlem
- ⇒ Desen Oluşturma
- ⇒ Yönlü Doğru Parçası
- ⇒ Vektörler
- ⇒ Vektörlerde Toplama
- ⇒ Bir Vektörü Bir Reel Sayı İle Çarpma
- ⇒ Vektörlerin Lineer Bağımlılığı
- ⇒ Lineer Birleşim

ÜNİTE-3**KOORDİNAT SİSTEMİ** 41 - 70

- ⇒ Dik Koordinat Sistemi
- ⇒ Yer Vektörü
- ⇒ Skaler Çarpım
- ⇒ Bir Vektörün Uzunluğu
- ⇒ Birim Vektör
- ⇒ Bir Vektör İle Aynı Doğrultulu Birim Vektör
- ⇒ Bir Vektör İle Aynı Yönlü Birim Vektör
- ⇒ Bir Vektör İle Zıt Yönlü Birim Vektör
- ⇒ İki Vektör Arasındaki Açık
- ⇒ Kosinüs Teoremi
- ⇒ Dik İzdüşüm

ÜNİTE-4**DOĞRULAR** 71 - 92

- ⇒ Bir Doğrunun Vektörel, Parametrik ve Kapalı Denklemi
- ⇒ Bir Doğrunun Doğrultman ve Normal Vektörleri
- ⇒ Bir Doğrunun Bir Düzlemde Ayırdığı Açık ve Kapalı Düzlemler
- ⇒ İki Doğrunun Birbirine Göre Durumu
- ⇒ İki Doğru Arasındaki Açık
- ⇒ Bir Doğrunun Eğimi
- ⇒ Bir Doğrunun Grafiği
- ⇒ Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı
- ⇒ Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

ÜNİTE-5**ÜÇGENLER** 93- 148

- ⇒ Üçgen Çeşitleri
- ⇒ Üçgenin Yardımcı Elemanları
- ⇒ Üçgende Açık Bağlantıları
- ⇒ Üçgende Açılar ve Kenarları Arasındaki İlişkiler
- ⇒ Sinüs Teoremi
- ⇒ Bir Üçgenin Bir Kenarını Belli Bir Oranda Bölen Noktayı Bulma
- ⇒ İç Açortay Teoremi
- ⇒ Dış Açortay Teoremi
- ⇒ Üçgende Kenarortay ve Açortayların Kesim Noktaları
- ⇒ Bir Üçgensel Bölgenin Alanı
- ⇒ Carnot Teoremi

ÜNİTE-6**DÖRTGENLER 149 - 168**

- Dörtgenin Temel Elemanları
- Bir Dörtgenin Orta Tabanı
- Dış Bükey Dörtgen, İç Bükey Dörtgen
- Dörtgensel Bölgenin Alan Hesabı
- Bir Dörtgensel Bölgenin Alanının Vektörel İfadesi
- PICK Teoremi

ÜNİTE-7**ÖZEL DÖRTGENLER 169 - 240**

- Yamuk
- Paralelkenar
- Dikdörtgen
- Eşkenar Dörtgen
- Kare
- Deltoid

ÜNİTE-8**ÇOKGENLER 241 - 262**

- Düzgün Beşgen
- Düzgün Altıgen

ÜNİTE-9**DÖNÜŞÜMLERLE GEOMETRİ 263 - 338**

- Öteleme
- Dönme
- Yansıma
- Şerit süsleme
- Düzlemde Kaplamalar
- Tangram
- Altın Üçgen
- Eşlik
- Homoteti
- Fraktal
- Üçgende Benzerlik ve Tales
- Dik Üçgende Metrik Bağlıntılar (Öklid Teoremi)
- Özel Teoremler (Menelaus, Seva)

ÜNİTE-10**ÇEMBER 339 - 412**

- Çemberin Temel Elemanları
- Çemberin Vektörel Denklemi
- Çemberin Genel Denklemi
- Çemberin Parametrik Denklemi
- Bir Çember İle Bir Doğrunun Birbirine Göre Durumu
- Çemberde Aç
- Denklemi Verilen İki Çemberin Birbirine Göre Durumları
- Çemberde Aç
- Denklemi Verilen İki Çemberin Birbirine Göre Konumları
- Çemberde Kiriş ve Kesenler İle İlgili Özellikler
- Bir Çemberin Kuvvet Fonksiyonu
- Kuvvet Eksen
- Teğetler Dörtgeni, Kirişler Dörtgeni
- Batlamyüs (Ptolemy) Teoremi
- Çemberin Çevre Uzunluğu ve Dairenin Alan Bağlıntıları

ÜNİTE-11**ÜÇGENİN MERKELERİ 413 - 422**

- Diklik Merkezi
- İç Teğet Çemberin Merkezi (İç Merkez)
- Dış Teğet Çemberin Merkezi (Dış Merkez)
- Bir Üçgensel Bölgenin Ağırlık Merkezi
- Bir Üçgenin Ağırlık Merkezi

ÜNİTE-12**UZAYDA VEKTÖRLER ve DOĞRU - DÜZLEM 423 - 476**

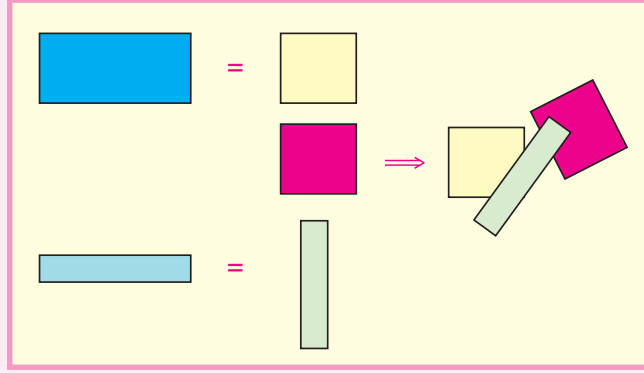
- Uzay
- Uzayda Dik Koordinat Sistemi
- Uzayda Vektörler
- Uzayda İki Vektörün Skaler (İç) Çarpımı
- Uzayda İki Vektörün Vektörel (Dış) Çarpımı
- Uzayda Doğru Düzlem Vektörleri

ÜNİTE-13**KONİKLER 477 - 520**

- Bir Koniğin Denklemi
- Koniğin Ekseni ve Tepe Noktaları
- Koniklerin Sınıflandırılması
- Elips
- Elipsin Eksen Uzunlukları
- Elipsin Dış Merkezliği ve Doğrultmanları
- Elipsin Parametrik Denklemi
- Merkezci Olmayan Elipsler
- Hiperbol
- Hiperbolün Eksen Uzunlukları
- Hiperbolün Dış Merkezliği ve Doğrultmanları
- Hiperbolün Asimptotları
- Parabol
- Parabolün Doğrultmanı ve Denklemi

ÜNİTE-14**TEK ve ÇOK YÜZEYLİ KAPALI YÜZEYLER ve KATI CİSİMLER 521 - 560**

- Platonik, Arşimed, Kepler
- Prizma
- Piramit
- Silindir
- Koni
- Küre
- Uzayda Süslemeler
- Yapıların Döndürülmesi
- Perspektif Çizim



DÜZLEM GEOMETRİDE TEMEL ELEMANLAR VE İSPAT BİÇİMLERİ



1. ÜNİTE

- Postulat
- İspat

MATEMATİĞE EMEĞİ GEÇEN BİLİM ADAMLARINDAN BAZILARI



ABEL 1802 – 1829



FERMAT 1601 – 1665



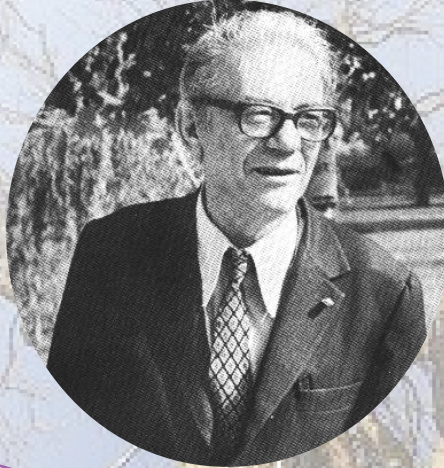
BOOLE 1815 – 1864



CANTOR 1845 – 1918
(Sonsuzu zapteden adam)



CAUCHY 1789 – 1857



CAHİT ARF 1910 – 1997



GAUSS 1777 – 1855



CRAMER 1704 – 1752



LAPLACE 1749 – 1827



FOURIER 1768 – 1830



EULER 1707 – 1783



GALOIS 1811 – 1832

Mert ile ispat yapmayı seven Ali arasında şöyle bir diyalog geçiyor:

Mert : Sevgili Ali, üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı kaç derecedir?

Ali : Bundan kolay ne var ki, elbette 180° dir.

Mert : Peki bunu ispatlayabilir misin?

Ali : Tabi ki; bak şimdi A köşesinden [BC] kenarına paralel olacak şekilde bir doğru çiziyorum . . . ve şu iç ters açılardan . . . gördüğün gibi iç açılardan toplamı 180° çıkıyor.

Mert : Dur bakalım Ali, peki A köşesinden [BC] ye paralel olacak şekilde başka bir paralel doğru çizilemez mi ?

Ali bu soruya doğru cevap verecekse geometri-deki temel kabulleri (Aksiyo-m ya da postulatları) iyi bilmelidir.

POSTULAT (Aksiyo-m)

Geometride doğruluğu açık olan ve ispata gerek duyulmadan kabul edilen önermelere "postulat" denir.

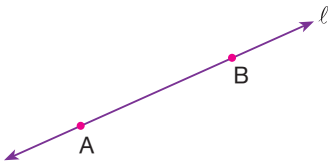
Postulat belirlemede temel amaç başlangıç noktasını belirlemek ve onun üzerine temel kurabilmektir.

Postulatlar, teoremlerin ispatlarında ya da geometrik problemlerin çözümünde kullanılır.

Geometrinin Temelini Oluşturan Öklid'in Beş Postulati

1. Postulat

- Farklı iki noktadan yalnız bir doğru geçer.



Yukarıda A ve B noktalarından ℓ doğrusu geçer.

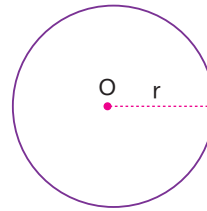
2. Postulat

- Bir doğru parçası sınırsız bir şekilde uzatılabilir.



3. Postulat

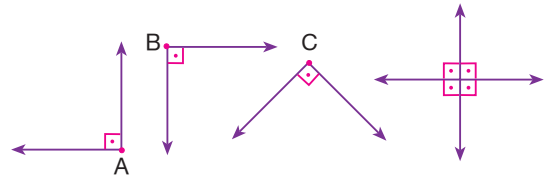
- Merkezi ve yarıçapı verilen bir çember çizilebilir.



Merkezi O noktası ve yarıçapı r olan çember

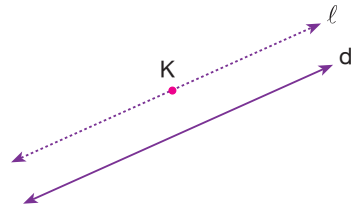
4. Postulat

- Bütün dik açılar eşittir.



5. Postulat

- Bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir paralel doğru çizilebilir.



d doğrusuna paralel ve K noktasından geçen tek doğru ℓ doğrusudur.



NOT :

5. Postulat birçok matematikçi tarafından ilk 4 postulatın bir sonucu olup olmadığı yönünde sorgulanmış ve bu sorgulamalar sonucunda postulat değiştirilerek, başka geometri sistemlerini ortaya çıkarmıştır.

Örneğin : Lobaçevski Geometrisi
Riemann Geometrisi

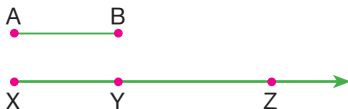
Günümüzde ise 50 den fazla geometriden bahsedildiğini görebiliriz. (Malkovich / 1991)

- Aksiyomlar kolay anlaşılır önermelerdir.
- Aksiyomlar arasında bir bağ yoktur, biri diğerinden elde edilemez.
- Aksiyomlar birbirleri ile uyum içindedir.
- Aksiyomlardan iki ya da daha fazlası kullanılarak bir önerme oluşturulursa bu önermeye **teorem** denir.

Aşağıda sık kullanılan bazı postulat örnekleri verilmiştir, inceleyiniz.

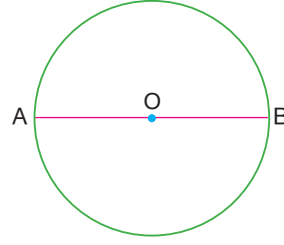
Postulat

- Bir $[AB]$ doğru parçası ve bir $[XZ]$ ışını verilsin. $|AB| = |XY|$ olacak şekilde $[XZ]$ ışını üzerinde sadece bir tane Y noktası vardır.



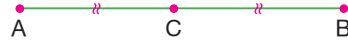
Postulat

- Bir çemberin çapı çemberi iki yarım çembere böler.



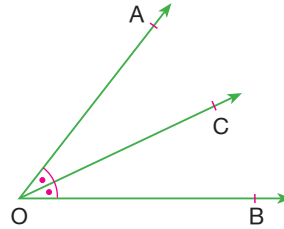
Postulat

- Her doğru parçasının yalnız bir orta noktası vardır.



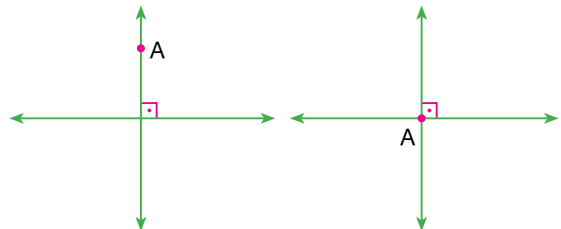
Postulat

- Her açının yalnız bir açıortayı vardır.



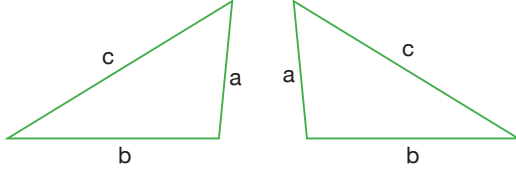
Postulat

- Düzlemde bir doğru ve bir nokta verilsin, bu noktanın üzerinde bulunduğu doğruya dik olan yalnız bir doğru vardır.



Postulat

- İki üçgenin kenarlarının uzunlukları birbirine eşitse bu üçgenler eşittir.



Euclid (Öklid) (M.Ö. 325 – 265)

Egeli matematikçi Öklid'in kişisel yaşamı, aile çevresi, matematik dışı uğraş veya meraklarına ilişkin hemen hiçbir şey bilinmemektedir. Bilinen tek şey; İskenderiye Kraliyet Enstitüsü'nde dönemin en saygın öğretmeni; alanında yüzyıllar boyu eşsiz kalan bir ders kitabının yazarı olmasıdır.



Eğitimi Atina'da Platon'un ünlü akademisinde tamamladığı sanılmaktadır. O akademi ki giriş kapısında, "Geometriyi bilmeyen hiç kimse bu kapıdan içeri alınmaz!" levhası asılıydı. Öklid çağlar boyu yalnız matematik dünyasının değil, matematikle yakından ilgilenen herkesin gözünde özenilen, yetkin bir örnekti. Öklid, M.Ö. 300 sıralarında yazdığı 13 ciltlik yapıtıyla ünlüdür. Bu yapıt, geometriyi (dolayısıyla matematiği) ispat bağlamında aksiyomatik bir dizge olarak işleyen, ilk kapsamlı çalışmadır. 19. yüzyıl sonlarına gelinceye kadar alanında tek ders kitabı olarak akademik çevrelerde okunan, okutulan Elementler'in, kimi yetersizliklerine karşın, değerini bugün de sürdürdüğü söylenebilir.

Öklid haklı olarak "geometrinin babası" diye bilinir; ama geometri onunla başlamış değildir. Tarihçi Herodotus (M.Ö. 500) geometrinin başlangıcını, Nil vadisinde yıllık su taşmalarından sonra arazi sınırlarını belirlemekle görevli kadastrocuların çalışmalarında bulmuştu. Geometri "yer" ve "ölçme" anlamına gelen "geo" ve "metrein" sözcüklerinden oluşan bir terimdir.

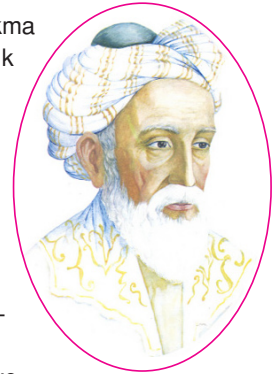
Kaleme aldığı Elementler, kendisini önceleyen Thales, Pythagoras, Eudoxus gibi, bilgin-matematikçilerin çalışmaları üstüne kurulmuştu. Geometri bir önermeler koleksiyonu olmaktan çıkmış, sıkı mantıksal çıkarım ve bağıntılara dayanan bir dizgeye dönüşmüştü.

Öklid oluşturduğu dizgede birtakım tanımların yanı sıra, beşi "aksiyom" dediği genel ilkeden, beşi de "postulat" dediği geometriye özgü ilkeden oluşan, on öncüle yer vermiştir (Öncüller, teoremlerin tersine ispatlanmaksızın doğru sayılan önermelerdir). Dizge tüm yetkin görünümüne karşın, aslında çeşitli yönlerden birtakım yetersizlikler içermektedir.

Elementler'e bugüne değin yazılmış en büyük kitap gözüyle bakılsa yeridir. Bu kitap gerçekten Grek zekasının en yetkin anıtlarından biridir. Kitabın Greklere özgü kimi yetersizlikleri yok değildir, kuşkusuz: Dayandığı yöntem salt dedüktif niteliktedir; üstelik, öncüllerini oluşturan varsayımları yoklama olanağı yoktur.

Ömer Hayyam (1048 – 1131)

Hayyam ("Çadircı") takma adını, atalarının çadircılık yapımları yüzünden aldığı söylenir. Ömer Hayyam, zamanında daha çok, bilgin olarak ün kazandı.



Elde bulunan eserlerinden, hayatıyla ilgili olayları anlatan bazı kitaplardan, mantık, felsefe, matematik ve astronomi konularında çalıştığı, bu alanlarda düzenli bir öğrenim gördüğü anlaşılmaktadır.

Hayyam'ın fizik, metafizik, matematik, astronomi ve şiir konularında değişik eserleri vardır.



Nasuriddin Tusi (1201 – 1274)

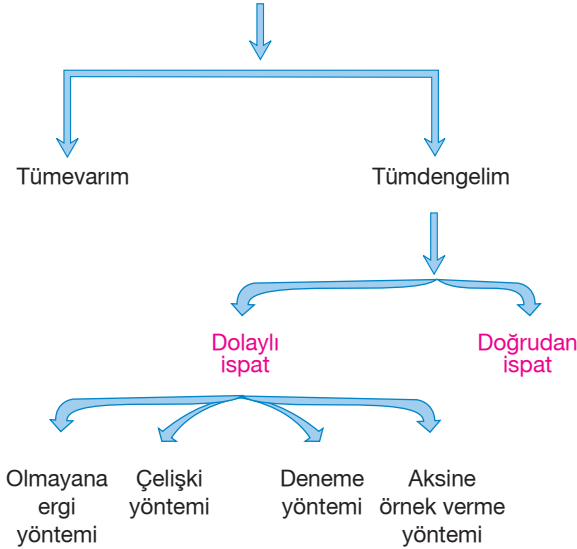
Şubat 1201'de Horasan'ın Tus şehrinde doğdu. Hem din bilimleri hem de fen bilimleri dallarında eğitim gördü. Matematik, logaritma, mantık, hikmet ve idrak nazariyeleri derslerini okudu. Tusî'nin yaptığı ilmi faaliyetlerden önemli bir tanesi, trigonometriyi ayrı bir ilim dalı haline getirmesidir. O zamana kadar bu ilim dalı astronominin bir dalı olarak görülmekteydi.



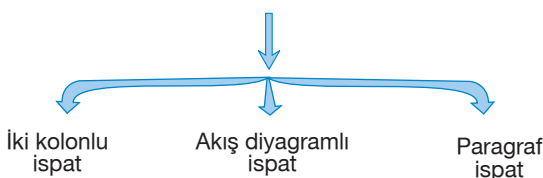
Ayrıca, bu ilim dalıyla ilgili eser de yazdı. Geometride önemli bir otorite haline geldi ve kendisinden sonra gelen bilim adamları, ileri sürmüş bulunduğu tezlerin üzerine herhangi bir ilâve yapamadılar.

GEOMETRİDE İSPAT

İspat Yöntemleri



İspat Biçimleri



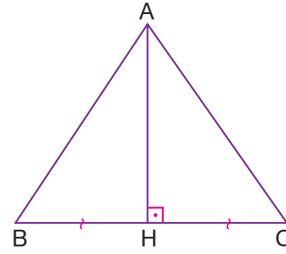
UYARI

İspat yöntemleri ve ispat biçimleri farklı iki kavramdır.

İki Kolonlu İspat

Bir önermenin ya da teoremin ispatı yapılırken ifadeler birinci kolona, gerekçeler de ikinci kolona yazılır.

Teorem :



ABC üçgen
[AH] $\perp$ [BC]
[AH] kenarortay

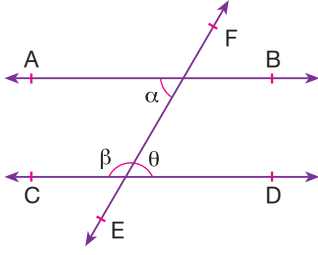
Yukarıdaki verilere göre, $|BA| = |CA|$ dır.

Yukarıdaki teoremi iki kolonlu ispat biçimini kullanarak ispatlayalım.

İspat :

İfadeler	Gerekçeler
1. [AH] kenarortay	1. Verilen
2. $ BH = HC $	2. Bir köşesinden çıkan kenarortay gittiği kenarı iki eşit parçaya böler.
3. [AH] $\perp$ [BC]	3. Verilen
4. $m(\widehat{AHB}) = m(\widehat{AHC})$	4. İki doğru dik ise eş komşu açı oluşturur.
5. $ AH = AH $	5. Yansıma
6. $\widehat{BHA} \sim \widehat{CHA}$	6. 2., 4., ve 5. gerekçelerden dolayı K.A.K benzerliği vardır.
7. $ BA = CA $	7. Eş üçgenlerin aynı açılı gören kenarları eşit.

Teorem :



AB, CD ve EF doğruları kesismektedir.

$$\alpha + \beta = 180^\circ \text{ ise } \alpha = \theta \text{ dir.}$$

Yukarıdaki teoremi iki kolonlu ispat biçimini kullanarak ispatlayalım.

İspat :

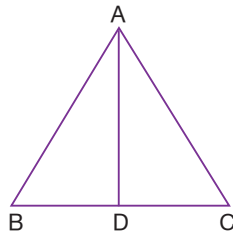
İfadeler	Gerekçeler
1. $\alpha + \beta = 180^\circ$	1. Verilen
2. EF ve CD kesismektedir.	2. Verilen
3. $\beta + \theta = 180^\circ$	3. İki doğru kesişirse bütünler açılar oluşur.
4. $\alpha = \theta$	4. Bütünleri aynı olan iki açının ölçüleri eşittir.

Teorem :

Bir üçgende iki kenar uzunluğu eşit ise bu kenarların karşısındaki açılar ölçüleri eşittir.

Hipotez : $|AB| = |AC|$

Sonuç : $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB})$



Yukarıdaki teoremi iki kolonlu ispat biçimini kullanarak ispatlayalım.

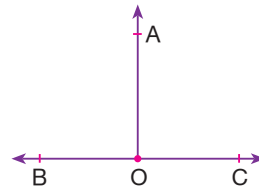
İspat :

İfadeler	Gerekçeler
1. [AD], A açısının açıortayı olsun	1. Her açının yalnız bir açıortayı vardır. (postulat)
2. $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC})$	2. 1. gerekçeden dolayı açıortaya çıktığı açığı iki eş parçaya böler.
3. $ AB = AC $	3. Verilen
4. $ AD = AD $	4. Eş doğru parçaları
5. $\widehat{BAD} \sim \widehat{CAD}$	5. 2, 3 ve 4. gerekçelerden dolayı kenar açı kenar benzerliği vardır.
6. $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB})$	6. 5. gerekçeden dolayı benzer iki üçgende benzer kenarların karşısında bulunan açılar eşittir.

Akış Diyagramlı İspat

Kutular içine yazılan açıklamalar ve kutu dışındaki oklarla yönlendirilmiş ispat biçimidir.

Teorem :



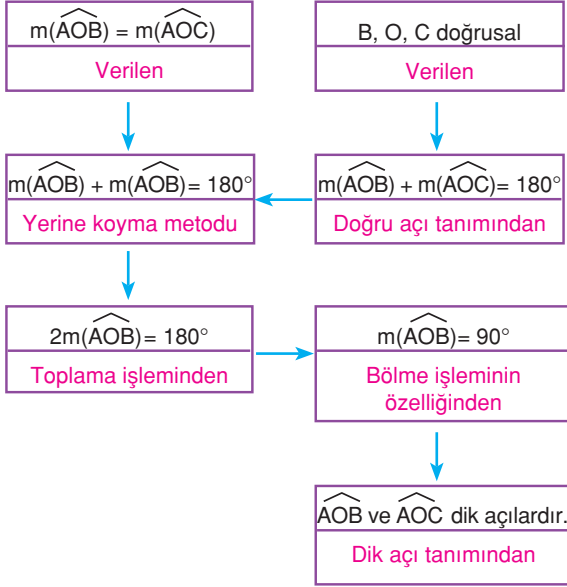
Verilen : $\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$ ve B, O, C doğrusal

İstenen : $\widehat{AOB}$ ve $\widehat{AOC}$ dik açılardır.

Yukarıdaki teoremi akış diyagramlı ispat biçimini kullanarak ispatlayalım.



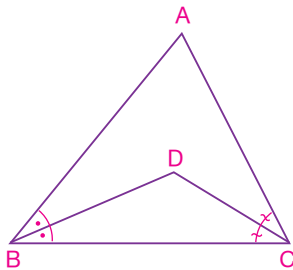
İspat :



Paragraf İspat Biçimi

İspat detaylı açıklamalarla düz metin halinde yapılır.

Teorem :



Bir üçgende iki iç açıortayın kesişmesi ile oluşan açının ölçüsü 90° den açıortayı alınmayan açının ölçüsünün yarısı kadar fazladır.

Yukarıdaki teoremi paragraf ispat biçimini kullanarak ispatlayalım.

İspat :

ABC üçgeninde iç açıları toplamı

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ \text{ dir.}$$

[BD] ve [CD] açıortay olduğundan

$$\text{BDC üçgeninde } \frac{m(\hat{B})}{2} + \frac{m(\hat{C})}{2} + m(\hat{D}) = 180^\circ$$

yazılabilir.

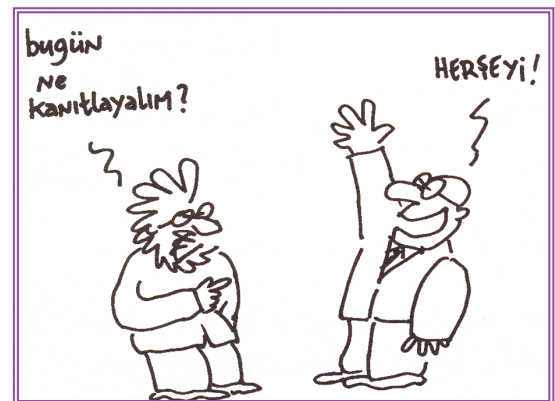
O halde eşitliklerin ortak çözümünden

$$\begin{aligned} m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) &= 180^\circ \\ -2 \cdot \frac{m(\hat{B})}{2} + \frac{m(\hat{C})}{2} + m(\hat{D}) &= 180^\circ \\ \hline m(\hat{A}) - 2m(\hat{D}) &= -180^\circ \text{ olup} \\ m(\hat{D}) &= 90^\circ + \frac{m(\hat{A})}{2} \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$



NOT :

Paragraf ispat biçimi en çok kullanılan ispat biçimidir.



(Matematik Dünyası Sayı : 86)



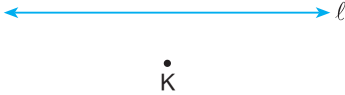
1. "Düzlemde doğrusal olmayan 5 noktadan en fazla 10 tane doğru geçer." önermesi Öklid'in kaçınıcı postulatı göz önüne alınarak söylenebilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. Aşağıdakilerden hangisi Öklid'in ilk beş postulatından biridir?

- A) Üçgenin iç açıları toplamı 180° dir.
 B) Yarıçap uzunluğu verilen bir tek çember vardır.
 C) Doğrusal olmayan üç nokta düzlemseldir.
 D) Paralelkenarın karşılıklı açıları eşittir.
 E) Bir doğru parçası her iki yönde sınırsızca uzatılabilir.

3.



Öklidin 5. postulatına göre, K noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan kaç tane doğru çizilebilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

4. Düzlemde dört farklı noktadan en fazla kaç doğru geçer?

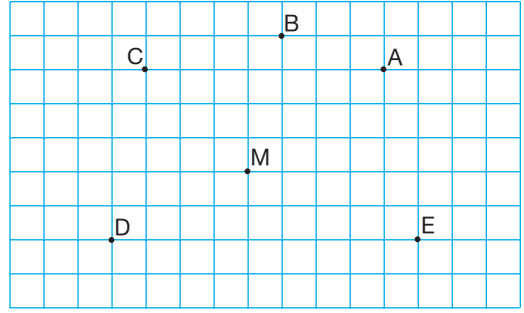
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

5. – Dolaylı ispat
 – Doğrudan ispat
 – İki kolonlu ispat
 – Akış diyagramlı ispat
 – Paragraf ispat

Yukarıdakilerden kaç tanesi geometride ispat biçimidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.



M merkezli ve yarıçap uzunluğu 5 birim olan çember yayı üzerindeki noktalardan biri aşağıdakilerden hangisidir?

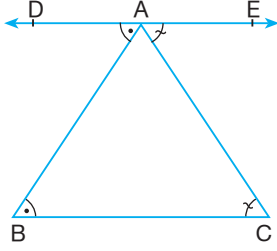
A) A B) B C) C D) D E) E

7. Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm bildiren ifadelere denir.

Yukarıdaki ifadede boş olan yere aşağıdakilerden hangisi getirilmelidir?

- A) Postulat
 B) Önerme
 C) Teorem
 D) İspat Yöntemi
 E) İspat Biçimi

8. Aşağıda bir üçgenin iç açıları toplamının 180° olduğunun iki kolonlu ispatı yapılmıştır.



	İfadeler	Gerekçeler
1.	ABC üçgen	Verilen
2.	$[DE] \parallel [BC]$	
3.	$m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{ABC})$ $m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{ACB})$	İç ters açıların eşitliğinden
4.	$m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{CAE}) = 180^\circ$	Doğru açı tanımından
5.	$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ACB}) = 180^\circ$	3. ifadedeki eşitlikler 4. ifadede yazılması ile

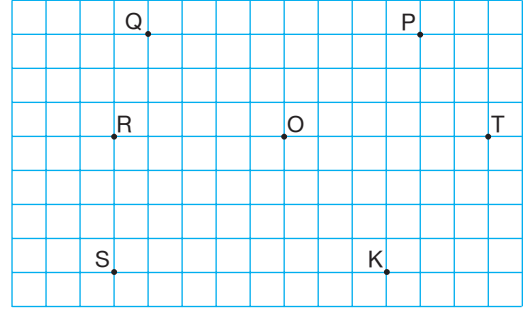
Buna göre, boş bırakılan yere aşağıdakilerden hangisi gelmelidir?

- A) Bütünler açı tanımından
B) $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DAB})$
C) Yardımcı ek çizim ile
D) A noktasından sonsuz sayıda doğru geçer.
E) D, A, E doğrusal

9. Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

- A) Postulatlar kolay anlaşılır basit önermelerdir.
B) Aksiyomlar arasında bir bağ yoktur, biri diğerinden elde edilemez.
C) Aksiyomlar birbiri ile çelişmez.
D) Birden fazla aksiyom kullanılarak oluşturulan önermelere teorem denir.
E) Bir teorem ispatlanırken başka bir teorem kullanılamaz.

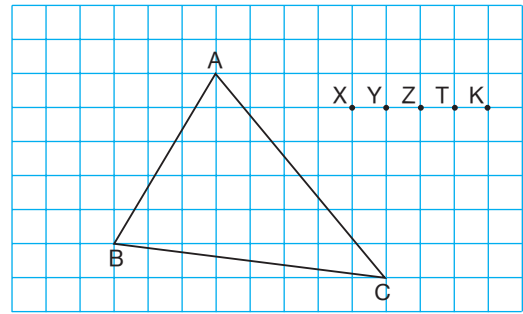
- 10.



Yukarıdaki terimde O merkezli ve P noktasından geçen çember başka hangi noktalardan geçer?

- A) Q - R - S B) R - S C) S - T
D) R - T E) Q - K - R

- 11.



Yukarıdaki zeminde ABC üçgeninin A köşesinden $[BC]$ na çizilen paralel doğru hangi noktalardan geçer?

- A) K B) T C) Z D) Y E) X

12. Aşağıdakilerden hangisi bir ispat yöntemi değildir?

- A) Doğrudan ispat
B) Tümdengelim
C) Akış diyagramı
D) Dolaylı ispat
E) Tümevarım



DÜZLEMDE NOKTA, DOĞRU ve VEKTÖRLER



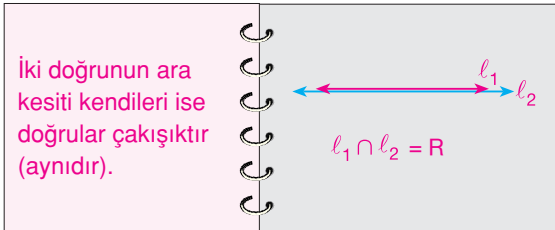
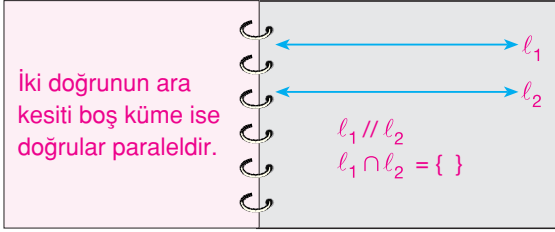
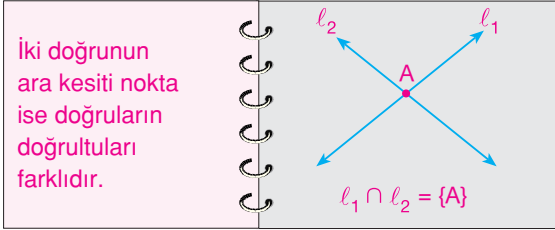
2. ÜNİTE

- **Nokta, Doğru, Düzlem Arasındaki İlişkiler**
- **Kapalı Yarı Doğru, Açık Yarı Doğru**
- **Kapalı Yarı Düzlem, Açık Yarı Düzlem**
- **Desen Oluşturma**
- **Yönlü Doğru Parçası**
- **Vektörler**
- **Vektörlerde Toplama**
- **Bir Vektörü Bir Reel Sayı İle Çarpma**
- **Vektörlerin Lineer Bağımlılığı**
- **Lineer Birleşim**

*Matematik sözcüğünün, Antik Yunancadaki "**matesis**" sözcüğünden geldiğini ve anlamının "**ben bilirim**" demek olduğunu biliyor muydunuz?*

NOKTA, DOĞRU VE DÜZLEM ARASINDAKİ İLİŞKİLER

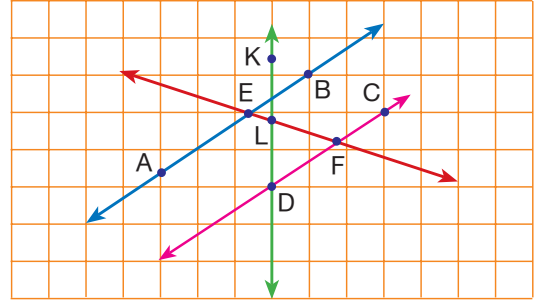
İki Doğru Arasındaki İlişki



NOT :

Tüm paralel doğrular aynı denklik sınıfındadır.

ÖRNEK - 1



- I. $AB \cap DC = \{ \}$
- II. $AB \parallel DC$
- III. $KD \cap EF = \{L\}$
- IV. KL ve KD doğruları çakışık.
- V. KD ile EF nin doğrultuları aynıdır.

Yukarıdaki zeminde verilen ifadelerden kaç tanesi **yanlıştır**?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

Zemindeki doğrular dikkatlice incelenirse,

KD ve **KL** çakışık iki doğrudur.

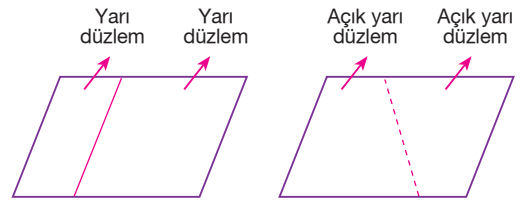
Ayrıca,

AB $\parallel$ **DC** ve dolayısıyla $AB \cap DC = \{ \}$ dir.

Cevap: A

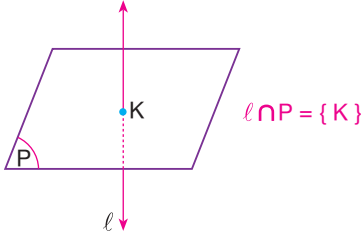
Doğru ile Düzlem Arasındaki İlişki

- Bir doğru içinde bulunduğu düzlemi iki parçaya ayırır. Bu parçalardan her biri yarı düzlemdir.

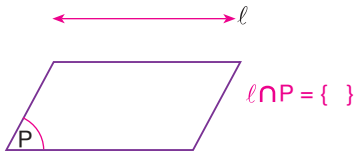




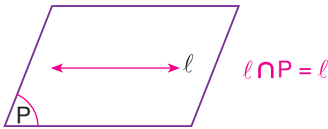
- Bir düzlem ile bir doğrunun ara kesiti bir nokta ise düzlem ile doğru kesişir.



- Bir düzlem ile bir doğrunun ara kesiti boş küme ise doğru düzleme paraleldir.

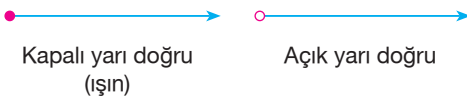


- Bir düzlem ve bir doğrunun ara kesiti doğru ise doğru düzlemin içindedir.



Kapalı Yarı Doğru ve Açık Yarı Doğru

Sabit bir nokta ile başlayıp sonsuz sayıda noktalar ile düz olarak sürekli tek yöne uzatılabilen, uzunluğu sınırsız, kalınlığı bulunmayan geometrik yapıya **kapalı yarı doğru (ışın)**, başlangıç noktası dahil edilmediğinde ise **açık yarı doğru** denir.



Doğru Parçası

Farlı iki nokta ile bu noktalar arasında bulunan ve doğrudaki olan noktaların kümesine **doğru parçası** denir.



Bir Doğru Parçasının Doğrultusu (Taşıyıcısı)

Bir doğru parçasının doğrultusu yani taşıyıcısı üzerinde bulunduğu doğrunun doğrultusu ile aynıdır.



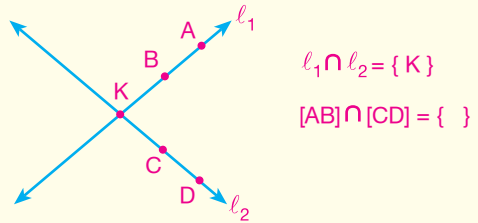
Yukarıdaki [AB] doğru parçasının doğrultusu AB doğrusunun doğrultusu ile aynıdır.



NOT :

Aynı düzlemde bulunan iki doğrunun doğrultuları farklı ise kesişirler. Fakat, iki doğru parçasının doğrultuları farklı ise kesişmeyebilirler.

Örneğin :



NOT :

Bir doğru parçasının başlangıç ve bitim noktaları aynı ise buna **nokta** denir.

Noktanın uzunluğu olmadığı için doğrultusu da yoktur.

SONUÇ

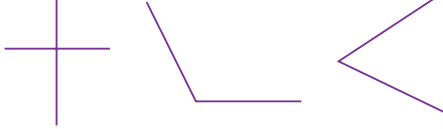
Tüm noktalar aynı denklik sınıfındadır.



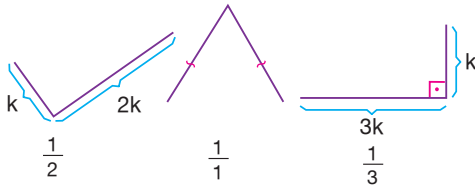
Düzlemde Doğru Parçaları ile Desen Oluşturma

Doğru parçaları ile desen oluşturmada aşağıdaki yollar izlenir.

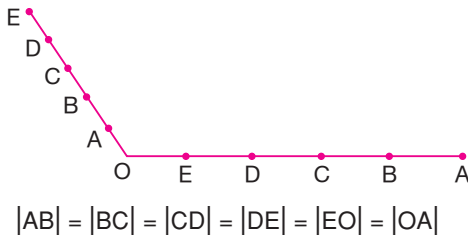
- İki doğru parçası herhangi bir açı ile kesiştirilerek eksen oluşturulur.



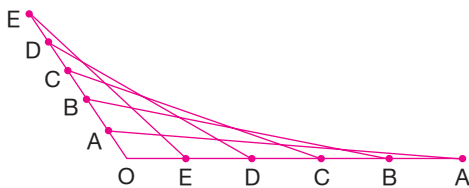
- Doğru parçalarının uzunlukları eşit ya da farklı olabilir. Şeklin altına doğru parçalarının uzunlukları oranı yazılır.



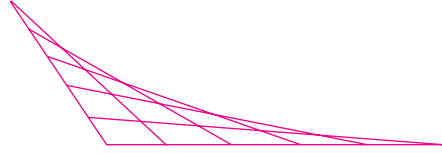
- Eksenler üzerinde eşit sayıda noktalar alınarak harflendirilir. Ardışık harfler arasındaki uzaklık her doğru için kendi arasında sabittir.



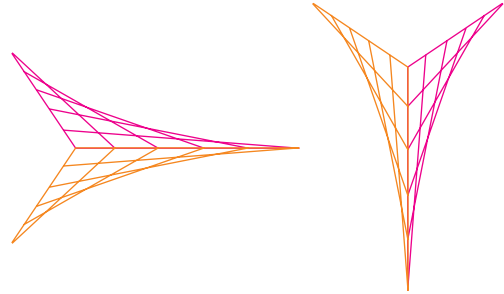
- Aynı harflerin temsil ettiği noktalar doğru parçası oluşturacak biçimde birleştirilerek desenler oluşturulur.



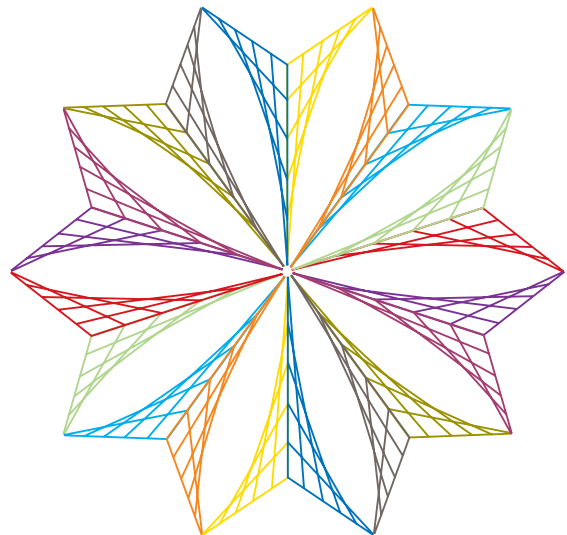
- Desen oluştuktan sonra harfler silinir. Elde edilen desenlerin bazı kısımları boyanarak farklı tasarımlar oluşturulabilir.



- Elde edilen deseni önce yatay yansıtıp sonra döndürerek aşağıdaki desenler elde edilir.

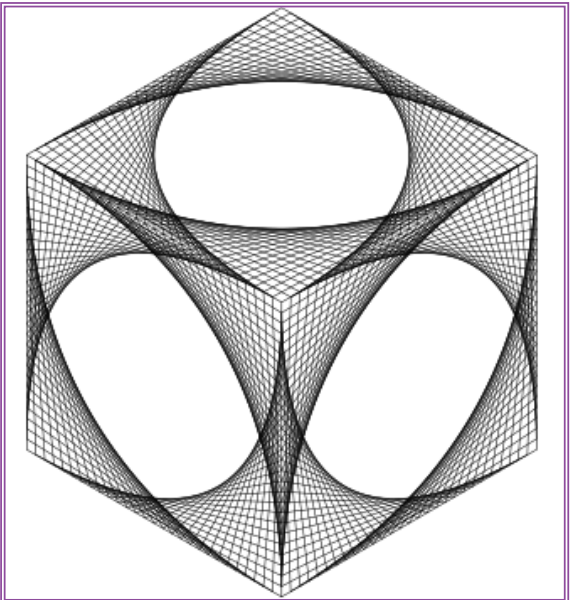
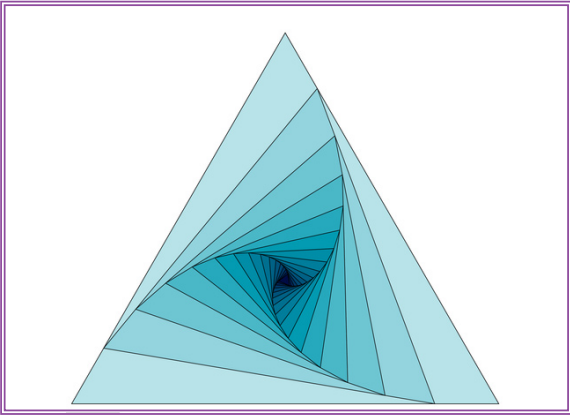


- Oluşan şekil ile aşağıdaki motif ortaya çıkmıştır.



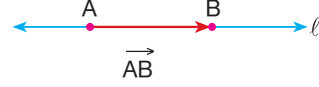


İçeride Aşağıda bazı motif örneklerini inceleyip nasıl çizildiklerini anlamaya çalışınız.

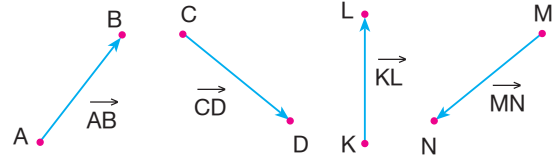


Yönlü Doğru Parçası

Uzunluğu, doğrultusu ve yönü olan doğru parçasına **yönlü doğru parçası** denir.

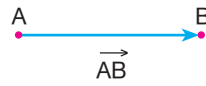


Yukarıda A dan B ye yönlendirilen yönlü doğru parçası çizilmiştir.



UYARI

Işın ve yönlü doğru parçası farklı kavramlardır.



Başlangıç noktası A ve bitiş noktası B olan yönlü doğru parçası



Başlangıç noktası A olan ve B noktasından geçen ışın

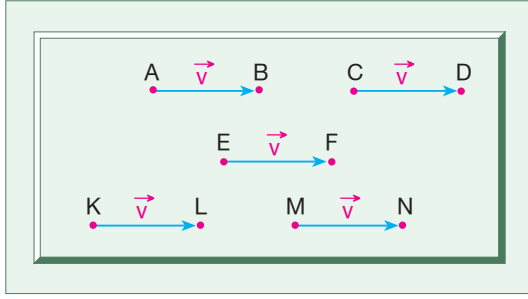
VEKTÖRLER



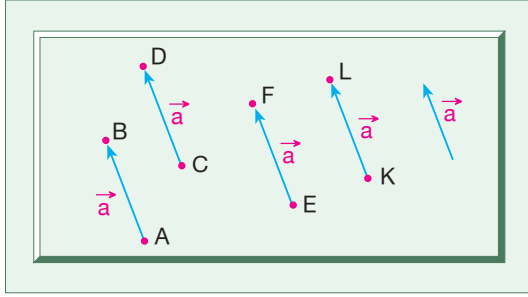
$\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ eş yönlü doğru parçaları, $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ biçiminde gösterilir.

Yönlü doğru parçaları üzerinde tanımlanan " $\sim$ " bağıntısı, yansıyan, simetrik ve geçişken olduğundan bir denklik bağıntısıdır.

Bu denklik sınıfının her denklik sınıfı bir vektördür. Vektörler $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ şeklinde gösterilir.



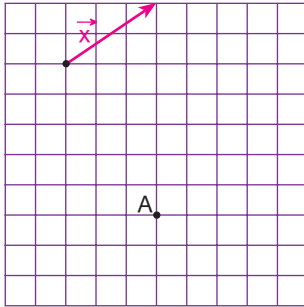
$$\vec{AB} \sim \vec{CD} \sim \vec{EF} \sim \dots \vec{v}$$



$$\vec{AB} \sim \vec{CD} \sim \vec{EF} \sim \dots \vec{a}$$

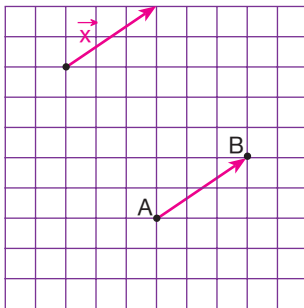
Bir vektör yön, doğrultu, uzunluk değişmemek üzere düzlemde yer değiştirebilir.

ÖRNEK - 1



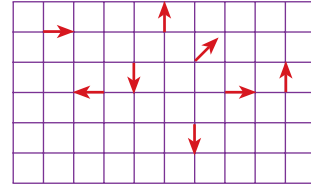
Yukarıda başlangıç noktası A ve $\vec{x}$ vektörüne eş olan kaç farklı vektör çizilebilir?

ÇÖZÜM :



$\vec{x}$ vektörüne eş olan bir tane vektör çizilebilir : $\vec{AB}$

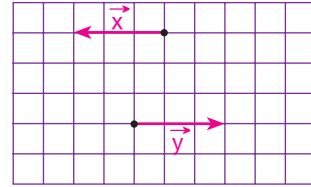
➤ Uzunluğu 1 birim olan vektöre **birim vektör** denir.



➤ Başlangıç ve bitim noktaları aynı olan yönlü doğru parçalarının denklik sınıfına **sıfır vektör** denir. $\vec{0}$ ya da $\vec{AA}, \vec{BB}, \dots$ şeklinde gösterilir.



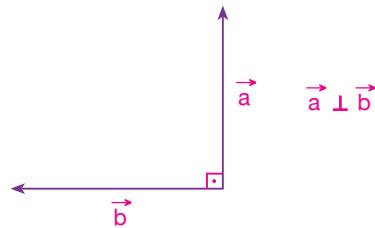
➤ Uzunlukları ve doğrultuları aynı, yönleri farklı olan vektörlere **ters vektörler** denir.



$\vec{x}$ ve $\vec{y}$ zıt (ters) vektörlerdir.

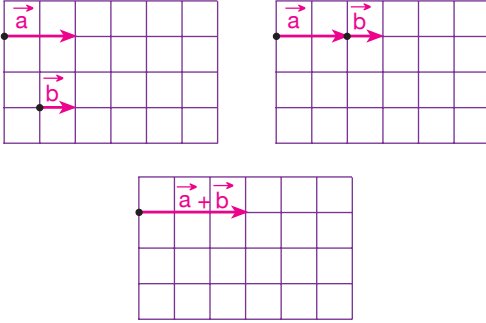
$\vec{x} = -\vec{y}$ şeklinde gösterilir.

➤ Başlangıçları aynı noktaya taşındığında aralarındaki açısı 90° olan vektörlere **dik vektörler** denir.

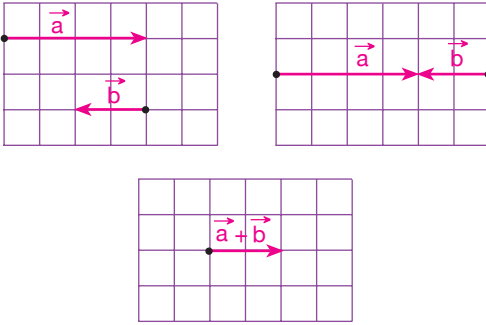


Vektörlerde Toplama

- Doğrultusu ve yönü aynı olan iki vektör toplanırken uzunluklar toplanır. Doğrultu ve yön değişmez.

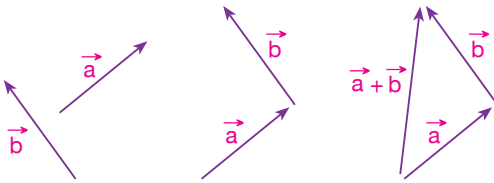


- Doğrultusu aynı, yönü farklı iki vektör toplanırken uzunluklar çıkarılır. Bulunan vektörün yönü büyük olan vektörle aynı olur ve doğrultusu değişmez.

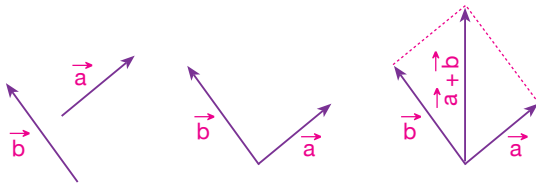


Doğrultuları farklı iki vektör toplanırken ;

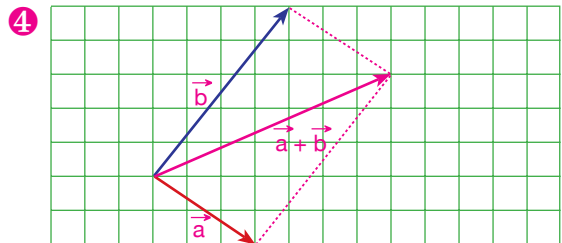
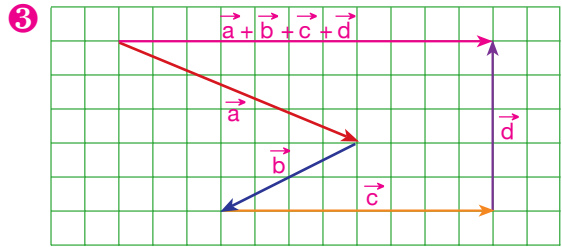
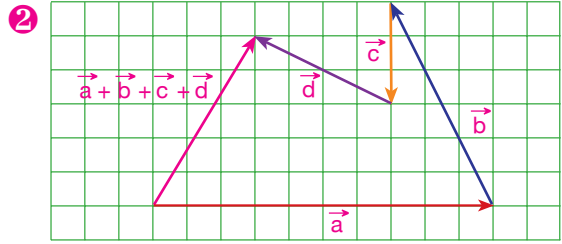
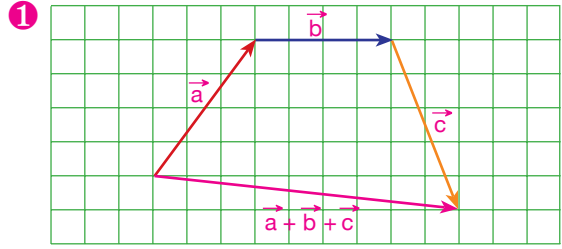
- Çokgen (uç uca ekleme) yöntemi :



- Paralelkenara tamamlama yöntemi :



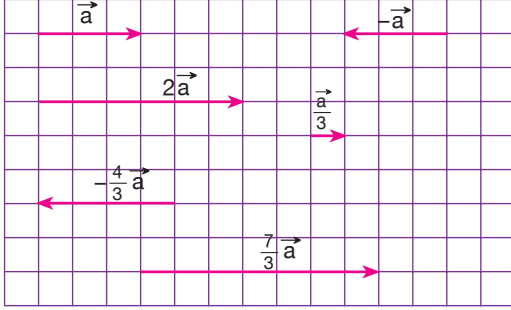
👉 Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.



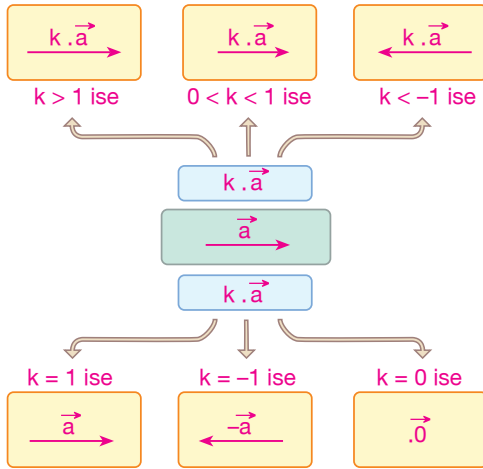
Bir Vektörü Bir Reel Sayı ile Çarpma

Bir $\vec{a}$ vektörü ve k reel sayısı verilsin.

$k \cdot \vec{a}$ nın alabileceği bazı değerler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.



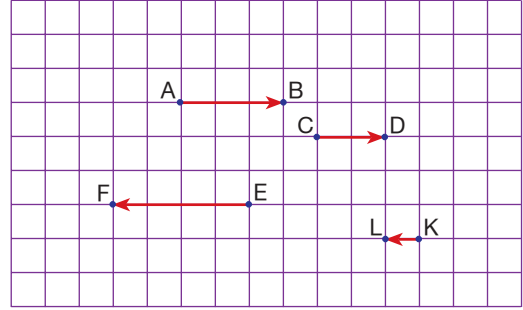
Yukarıdaki vektörler dikkatlice incelenirse aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.



SONUÇ :

- $k > 1$ ise vektörün yönü **değişmez**, boyu **artar**.
- $0 < k < 1$ ise vektörün yönü **değişmez**, boyu **azalır**.
- $k < -1$ ise vektörün yönü **değişir**, boyu **artar**.
- $k = 1$ ise vektörün yönü ve boyu **değişmez**.
- $k = -1$ ise vektörün yönü **değişir**, boyu **değişmez**.
- $k = 0$ ise vektörün yönü **belirsiz**, boyu **sıfır olur**.

ÖRNEK - 1



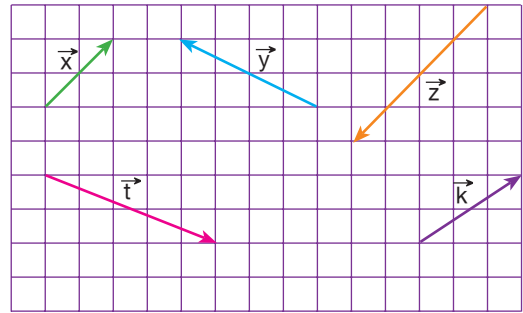
- I. $2\vec{AB} = 3\vec{CD}$
- II. $\vec{CD} = -2\vec{KL}$
- III. $\vec{EF} = 2\vec{CD}$
- IV. $\vec{CD} - \vec{KL} = \vec{AB}$
- V. $\vec{EF} = 2\vec{KL} - \vec{CD}$

Birim karelere ayrılmış yukarıdaki zeminde verilenlerden hangisinin yanlış olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

Şekil dikkatli incelenirse $\vec{EF} = 2\vec{CD}$ ifadesi yanlıştır.

ÖRNEK - 2



Yukarıdaki zeminde verilen vektörlerden birinin bir reel sayı ile çarpımı diğerini vermektedir.

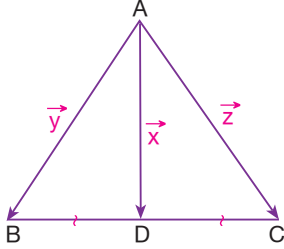
Bu vektör ikilisini bulalım.

ÇÖZÜM :

$\vec{x}$ ve $\vec{z}$ vektörleri doğrultuları aynı, yönleri farklı iki vektördür. $\vec{z} = -2\vec{x}$

ÖRNEK - 3

ABC üçgeninde $\vec{x}$ vektörünün $\vec{y}$ ve $\vec{z}$ vektörleri cinsinden eşiti nedir?



ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \vec{z} + \vec{CD} &= \vec{x} \\ + \vec{y} + \vec{BD} &= \vec{x} \end{aligned}$$

eşitlikleri toplanır;

$$\vec{z} + \vec{y} + \vec{BD} + \vec{CD} = 2\vec{x} \text{ elde edilir.}$$

$\vec{BD}$ ile $\vec{CD}$ zıt yönlü olduğundan,

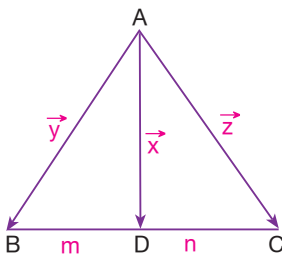
$$\vec{BD} = -\vec{CD} \text{ yazılabilir.}$$

$$\vec{z} + \vec{y} - \vec{CD} + \vec{CD} = 2\vec{x}$$

$$\vec{z} + \vec{y} = 2\vec{x}$$

$$\vec{x} = \frac{\vec{y} + \vec{z}}{2} \text{ bulunur.}$$

✓ Pratik Bilgi



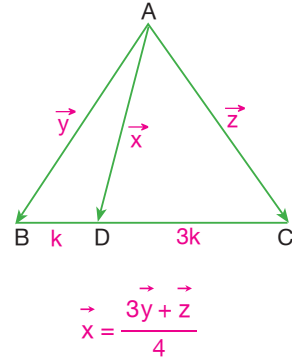
$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ arasında

$$\vec{x} = \frac{m \cdot \vec{z} + n \cdot \vec{y}}{m + n}$$

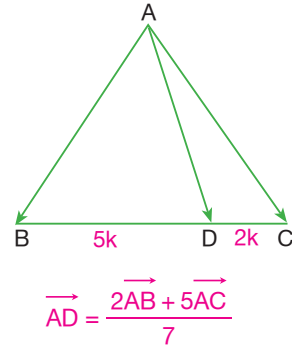
eşitliği yazılabilir.

Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

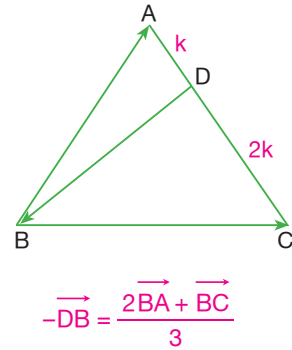
1



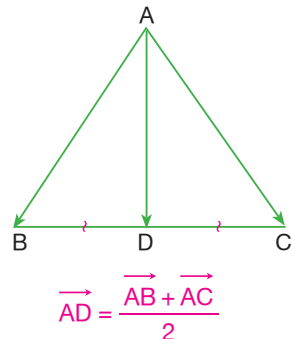
2



3

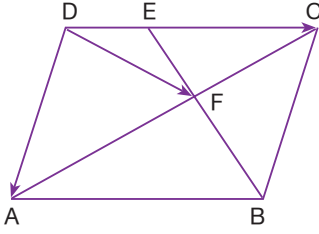


4





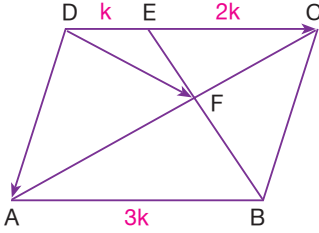
ÖRNEK - 4



ABCD paralelkenarında,
 $|CE| = 2|DE|$ ve $[BE] \cap [AC] = \{F\}$ veriliyor.

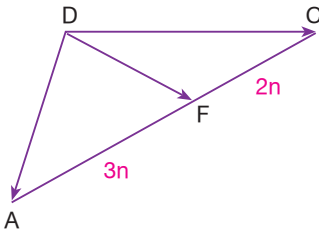
$\vec{DF}$ nin $\vec{DA}$ ve $\vec{DC}$ cinsinden eşiti nedir?

ÇÖZÜM :



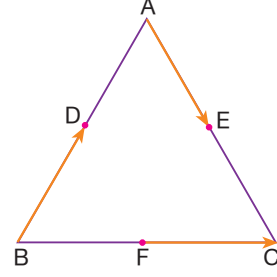
$\triangle BFA$ ile $\triangle EFC$ benzer iki üçgen olduğundan,

Benzerlik oranı, $\frac{3}{2}$ olup $\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{3}{2}$ yazılabilir.



Böylece; $\vec{DF} = \frac{3\vec{DC} + 2\vec{DA}}{5}$ yazılabilir.

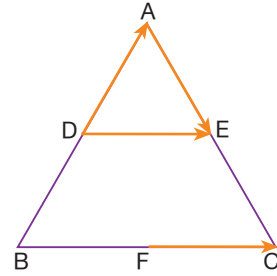
ÖRNEK - 5



ABC üçgen, D, E ve F orta noktalar.

Verilenlere göre, $\vec{BD} + \vec{AE} + \vec{FC}$ toplamını bulalım.

ÇÖZÜM :



D, E, F orta noktalar olduğundan,

$\vec{BD}$ ile $\vec{DA}$ eş iki vektördür.

$\vec{FC}$ ile $\vec{DE}$ eş iki vektördür.

O halde,

$\vec{BD} + \vec{AE} + \vec{FC} = \vec{DA} + \vec{AE} + \vec{DE}$ olup

$\vec{DA} + \vec{AE} = \vec{DE}$ olduğundan

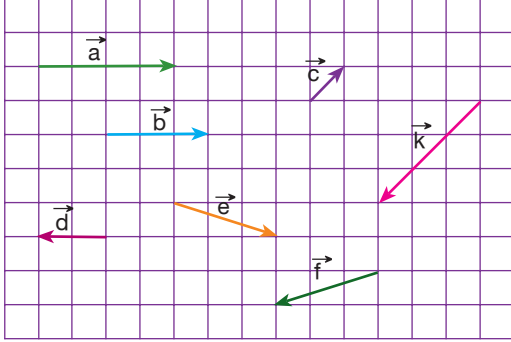
$\underbrace{\vec{DA} + \vec{AE}}_{\vec{DE}} + \vec{DE} = 2\vec{DE} = \vec{BC}$ bulunur.

Vektörlerin Lineer Bağımlılığı

Düzlemde biri diğerinin herhangi bir katı olarak yazılabilen iki vektöre **lineer bağımlı** vektörler denir.

- Doğrultuları aynı olan iki vektör lineer bağımlıdır.
- Doğrultuları farklı olan iki vektör lineer bağımsızdır.
- Yönleri zıt olan iki vektör lineer bağımlıdır.

Örneğin ;



Yukarıdaki zeminde aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir;

- ⇒ $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ lineer bağımlıdır.
- ⇒ $\vec{e}$ ile $\vec{f}$ lineer bağımsızdır.
- ⇒ $\vec{e}$ ile $\vec{d}$ lineer bağımsızdır.
- ⇒ $\vec{c}$ ile $\vec{k}$ lineer bağımlıdır.
- ⇒ $\vec{a}$ ile $\vec{d}$ lineer bağımlıdır.
- ⇒ $\vec{a}$ ile $\vec{k}$ lineer bağımsızdır.
- ⇒ $\vec{a}$ ile $\vec{c}$ lineer bağımsızdır.
- ⇒ $\vec{b}$ ile $\vec{d}$ lineer bağımlıdır.
- ⇒ $\vec{f}$ ile $\vec{k}$ lineer bağımsızdır.
- ⇒ $\vec{k} + \vec{e}$ ile $\vec{b} + \vec{f}$ lineer bağımlıdır.

- Aynı düzlemde olan ikiden fazla vektör doğrultularına bakılmaksızın lineer bağımlıdır.

İki Vektörün lineer bileşimi;

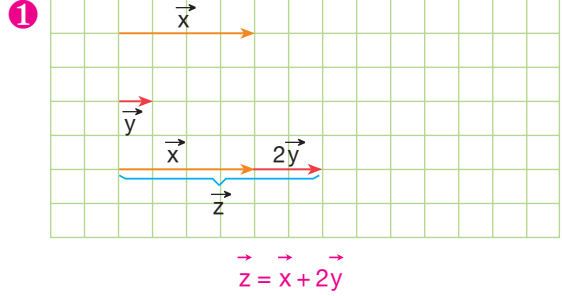
k_1 ile $k_2 \in \mathbb{R}$ ve $\vec{u}, \vec{v}$ birer vektör olmak üzere,

$$k_1 \cdot \vec{u} + k_2 \cdot \vec{v}$$

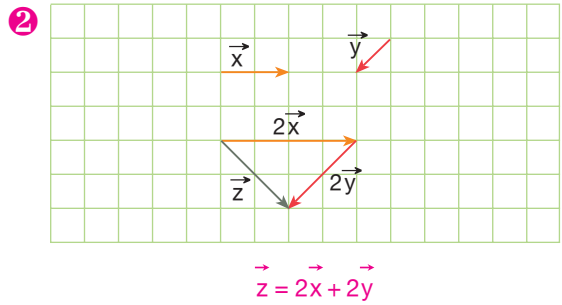
vektörüne $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin lineer bileşimi denir.

- Bir vektör aynı doğrultuda olan ya da olmayan herhangi iki veya daha fazla vektörün lineer bileşimi olarak yazılabilir.

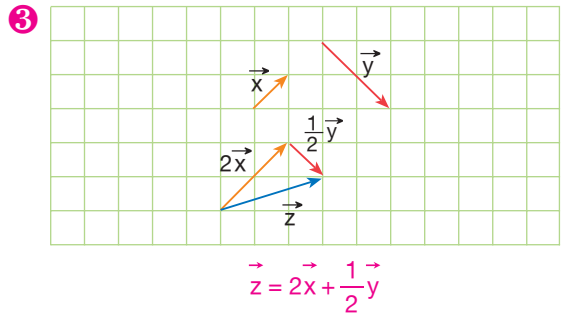
🔍 Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.



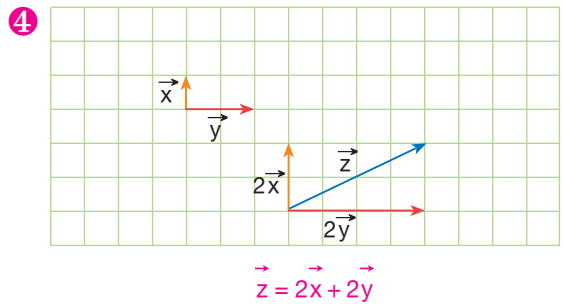
olduğundan $\vec{z}$ vektörü $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin lineer bileşimidir.



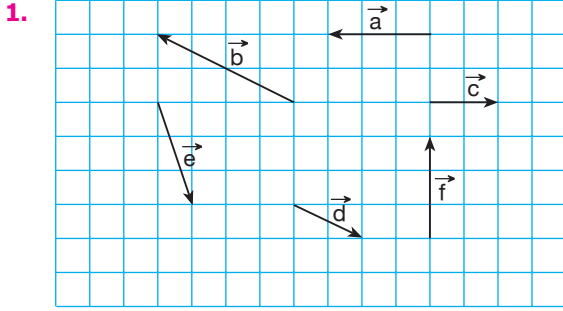
olduğundan $\vec{z}$ vektörü $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin lineer bileşimidir.



olduğundan $\vec{z}$ vektörü $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin lineer bileşimidir.

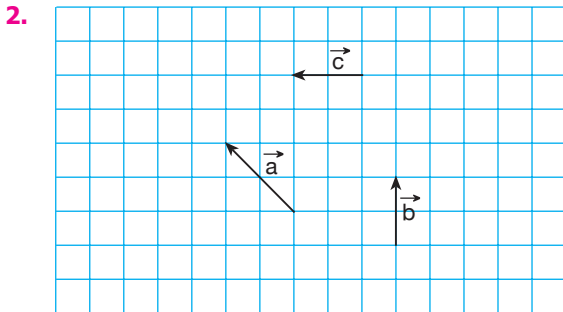


olduğundan $\vec{z}$ vektörü $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin lineer bileşimidir.



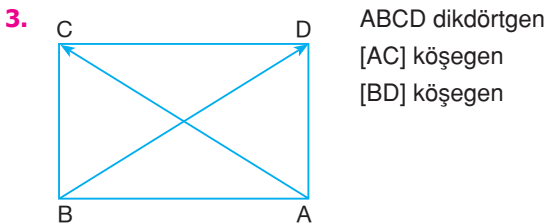
Yukarıdaki zeminde verilen vektör ikililerinden kaç tanesi lineer bağımlıdır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



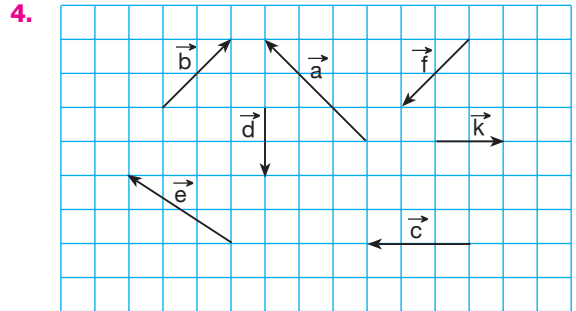
Yukarıdaki zemine çizilmiş $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $\vec{c} - \vec{b} = \vec{a}$ B) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$ C) $\vec{a} - \vec{c} = \vec{b}$
D) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ E) $\vec{b} + \vec{c} = 2\vec{a}$



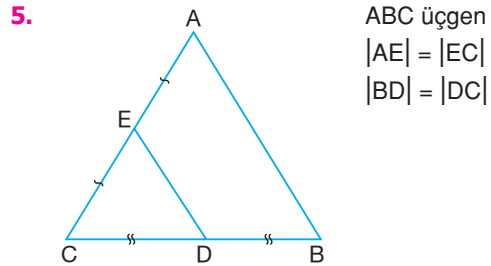
Yukarıdaki verilere göre, $\vec{AC} + \vec{BD}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\vec{AB}$ B) $2\vec{DC}$ C) $2\vec{AD}$
D) $\vec{CD}$ E) $\vec{0}$



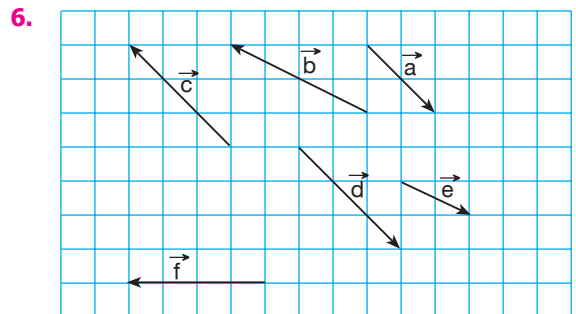
Yukarıdaki zeminde verilen vektör ikililerinden kaç tanesi dik kesikir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



Yukarıdaki şekilde $\vec{ED} + \vec{EC}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

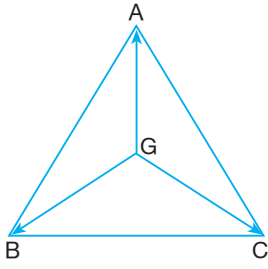
- A) $\vec{AB} + \vec{BC}$ B) $\vec{CE} + \vec{CB}$ C) $\vec{AB} + \vec{BD}$
D) $\frac{1}{2} \vec{AB} + \vec{BD}$ E) $2\vec{DE}$



Yukarıdaki yönlü doğru parçaları paralellik bağıntısına göre denklik sınıfına ayrıldığında kaç tane denklik sınıfı oluşur?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

7.

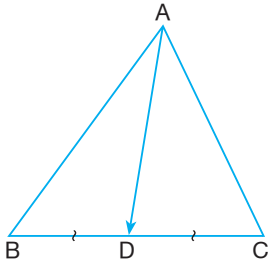


ABC üçgen
G : ağırlık merkezi

Yukarıdaki verilere göre, $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\vec{0}$ B) $\vec{BC}$ C) $2\vec{GA}$
D) $2\vec{GB}$ E) $2\vec{GC}$

8.

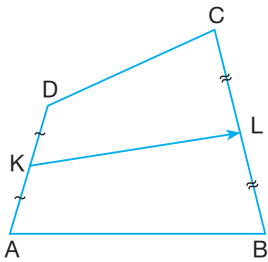


ABC üçgen
 $|BD| = |DC|$

Yukarıdaki verilere göre, $\vec{AD}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$ B) $\frac{\vec{AC} + \vec{CB}}{2}$ C) $\vec{CA} + \vec{CD}$
D) $\vec{AB} - \vec{BC}$ E) $\vec{AB} + \vec{BC}$

9.



ABCD dörtgen
 $|AK| = |KD|$
 $|BL| = |LC|$

Yukarıdaki verilere göre, $\vec{KL}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{\vec{AD} + \vec{BC}}{2}$ B) $\vec{BL} + \vec{AK}$ C) $\vec{AB} - \vec{DC}$
D) $\frac{\vec{DC} + \vec{AB}}{2}$ E) $\vec{AB} + \vec{DC}$

10.

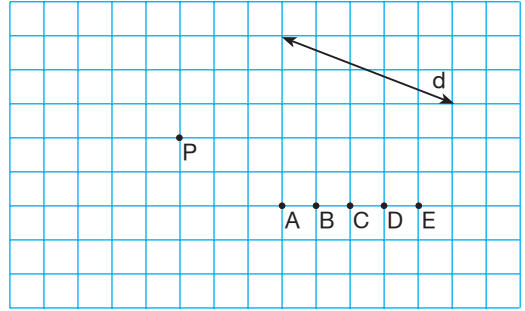


A, B, C, D, E eşit aralıklı doğrusal beş noktadır.

$\vec{EC} = k \cdot \vec{AB}$ olduğuna göre, k kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) -1 E) -2

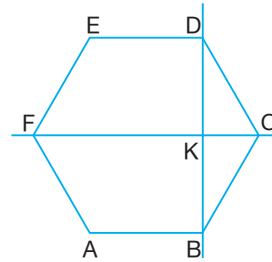
11.



Yukarıdaki zeminde d doğrusuna paralel olup P noktasından geçen doğrunun üzerindeki diğer nokta aşağıdakilerden hangisidir?

- A) A B) B C) C D) D E) E

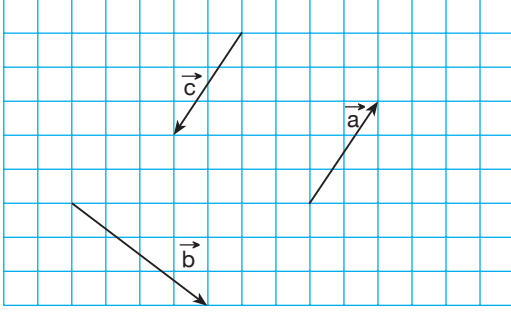
12.



Yukarıdaki ABCDEF düzgün altıgenine göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) FE ile BC nin doğrultuları aynıdır.
B) FK ile KC çakışıktır.
C) BD ile FC kesişmektedir.
D) [DC] ile [AB] kesişmektedir.
E) DE ile EF kesişmektedir.

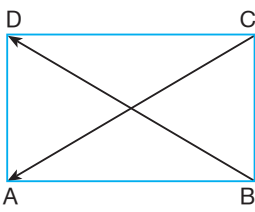
1.



Yukarıdaki zeminde verilen vektörlere göre, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $2\vec{a}$ B) $\vec{b}$ C) $2\vec{c}$ D) $\vec{b} - \vec{a}$ E) $2\vec{b}$

2.

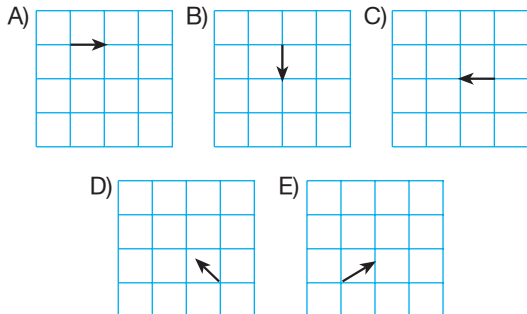


ABCD dikdörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen

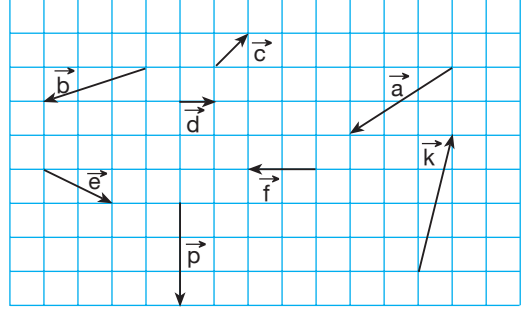
Buna göre, $\vec{CA} + \vec{BD}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{3}{2}\vec{AB}$ B) $2\vec{AB}$ C) $2\vec{BA}$
D) $3\vec{BC}$ E) $2\vec{BD}$

3. Aşağıdaki zeminlerde verilen vektörlerden hangisi birim vektör olamaz?



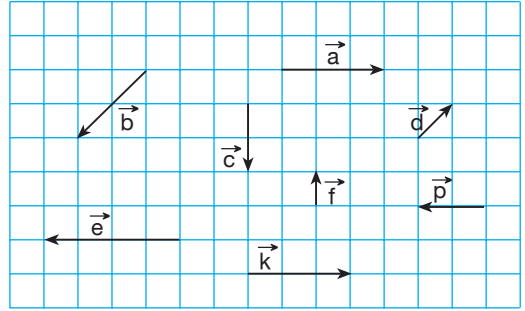
4.



Yukarıdaki zeminde verilen vektörlere göre aşağıdakilerden hangisi birim vektördür?

- A) $\vec{a} - \vec{b}$ B) $\vec{d} + \vec{c}$ C) $\vec{e} - \vec{f}$
D) $\vec{k} + \vec{p}$ E) $\vec{b} + \vec{e}$

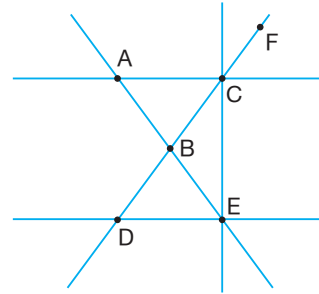
5.



Yukarıdaki zeminde verilen vektörlere göre aşağıdakilerden hangisi birim vektör değildir?

- A) $\vec{a} + \vec{p}$ B) $\vec{c} + \vec{f}$ C) $\vec{e} + \vec{k}$
D) $\vec{b} + \vec{d}$ E) $\vec{k} + \vec{p}$

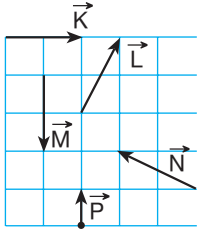
6.



Yukarıdaki düzlemsel şekle göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) [CF] ile [AB] doğru parçaları kesişir.
B) [AE] ile [DF] doğru parçaları kesişir.
C) AC ile CE doğruları dik kesişir.
D) AC ile DE doğruları paraleldir.
E) DF ile CE doğrularının doğrultuları aynıdır.

7.

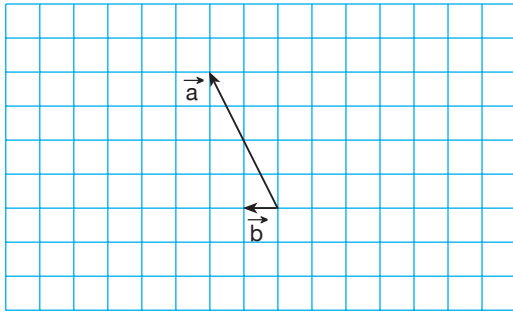


Şekilde $\vec{K}, \vec{L}, \vec{M}, \vec{N}, \vec{P}$ vektörleri verilmiştir.

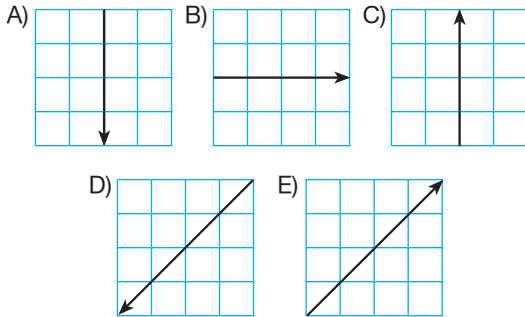
Buna göre, $\vec{K} + \vec{L} + \vec{M} + \vec{N} + \vec{P}$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\vec{K}$ B) $\vec{L}$ C) $\vec{M}$ D) $\vec{N}$ E) $\vec{P}$

8.



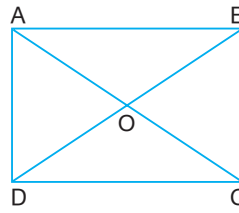
Yukarıdaki zeminde verilen vektörlere göre, $\vec{a} - 2\vec{b}$ vektörü aşağıdakilerden hangisidir?



9. Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

- A) Bir vektör herhangi iki vektörün lineer bileşimi olarak yazılabilir.
B) Zıt yönlü iki vektör lineer bağımsızdır.
C) Uzunlukları aynı olan vektörler lineer bağımlıdır.
D) Lineer bağımsız herhangi iki vektör ile istediğimiz bir vektörü ifade edebiliriz.
E) Dik koordinat sistemini oluşturan doğrular lineer bağımlıdır.

10.

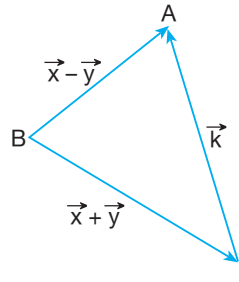


ABCD dikdörtgen O, köşegenlerin kesim noktası

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $\vec{OB} + \vec{OA} = \vec{DO} + \vec{CO}$ B) $\vec{AC} + \vec{DC} = \vec{BC}$
C) $\vec{BD} + \vec{CA} + 2\vec{DC} = \vec{0}$ D) $\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{BC}$
E) $\vec{AO} + \vec{DO} + \vec{CD} = \vec{0}$

11.

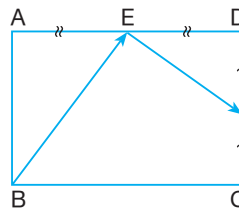


$$\begin{aligned}\vec{BA} &= \vec{x} - \vec{y} \\ \vec{BC} &= \vec{x} + \vec{y} \\ \vec{CA} &= \vec{k}\end{aligned}$$

Buna göre, $\vec{k}$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\vec{y}$ B) $-2\vec{y}$ C) $-\vec{x}$ D) $\vec{y}$ E) $2\vec{y}$

12.



ABCD dikdörtgen E ve F bulundukları kenarların orta noktaları

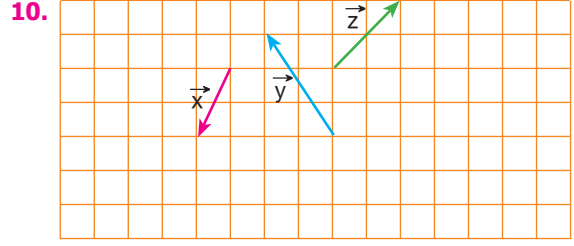
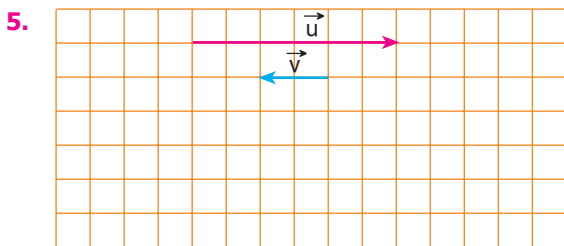
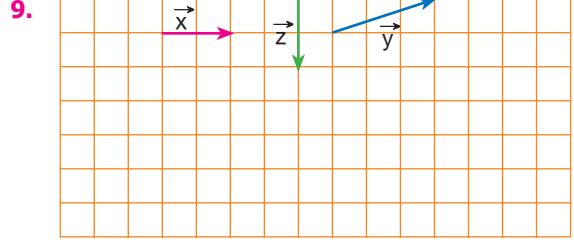
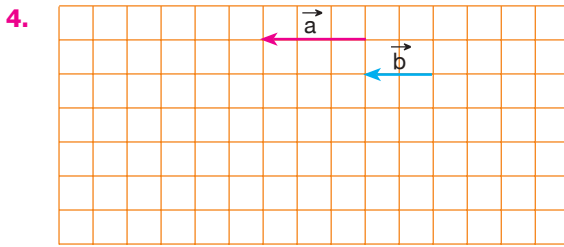
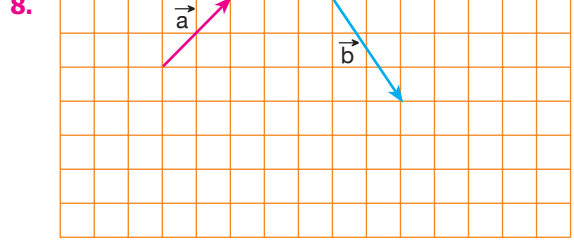
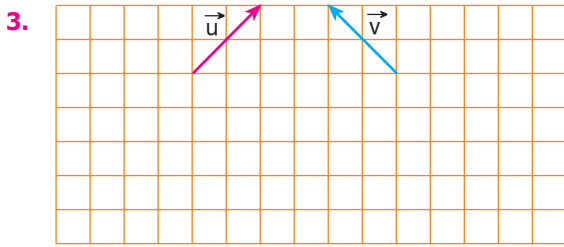
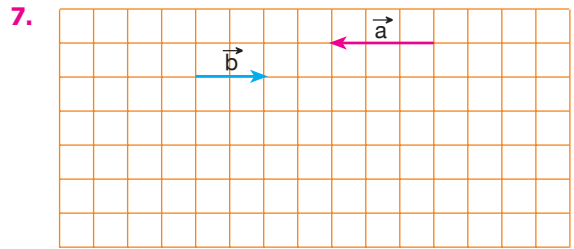
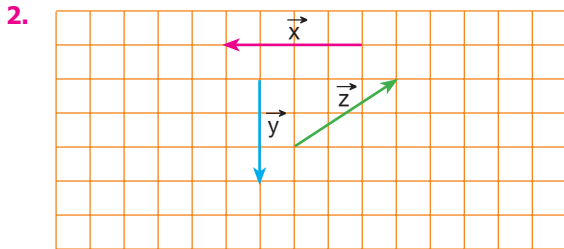
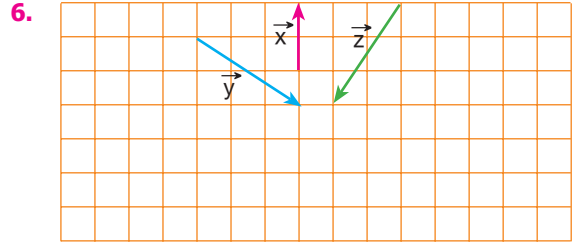
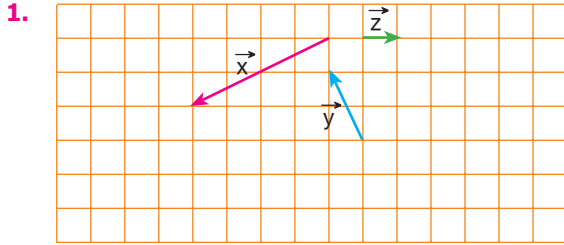
Buna göre, $\vec{BE} + 2\vec{EF}$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $3\vec{AE}$ B) $\vec{AD}$ C) $3\vec{FC}$ D) $\vec{DC}$ E) $\vec{0}$



Etkinlik Zamanı – 1

Aşağıdaki zeminlerde verilen vektörlerin toplamını gösteriniz.

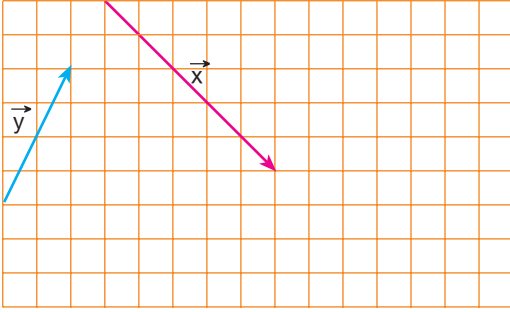




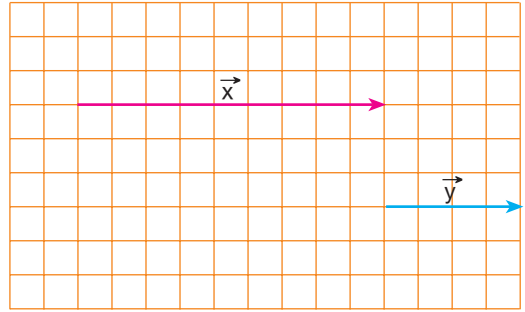
Etkinlik Zamanı – 2

Aşağıda verilen vektörleri kullanarak $\vec{x} - \vec{y}$ vektörlerini gösteriniz.

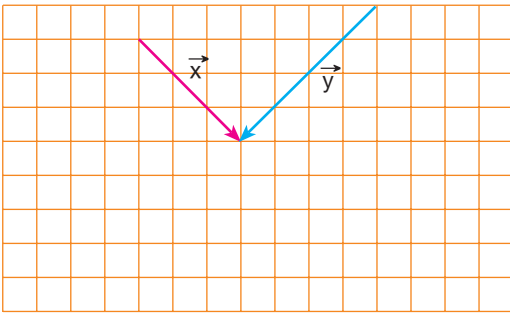
1.



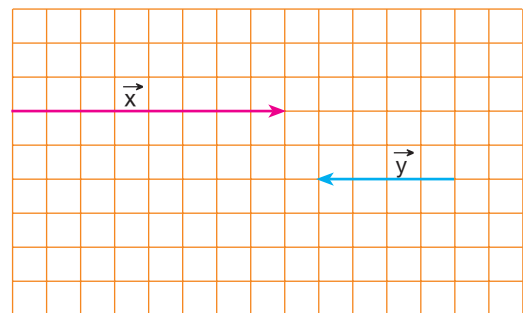
4.



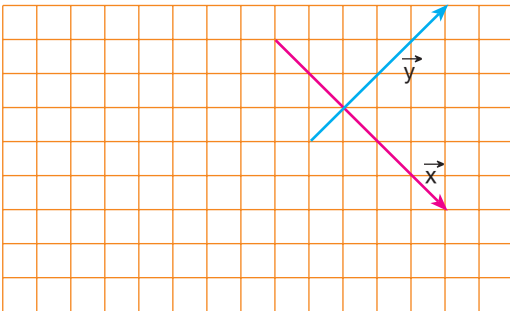
2.



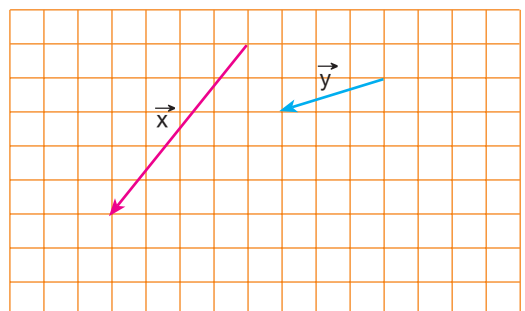
5.



3.



6.

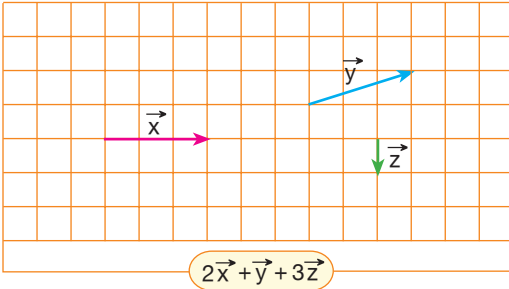




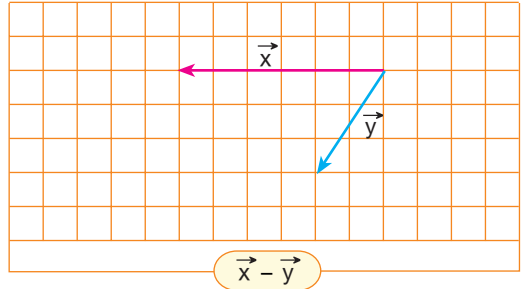
Etkinlik Zamanı – 3

Aşağıdaki zemin altında verilen vektörleri gösterelim.

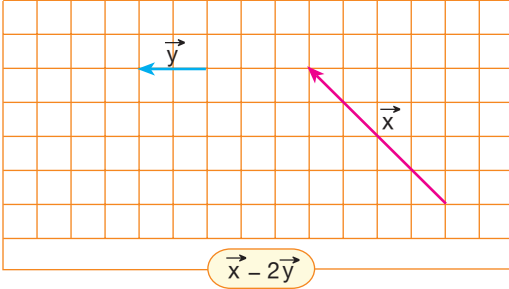
1.



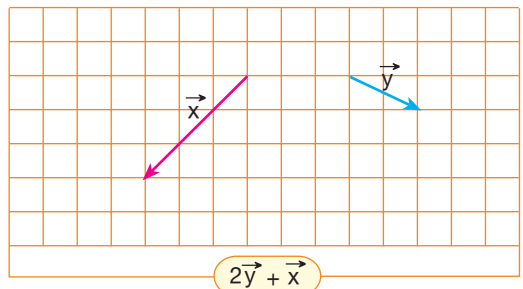
6.



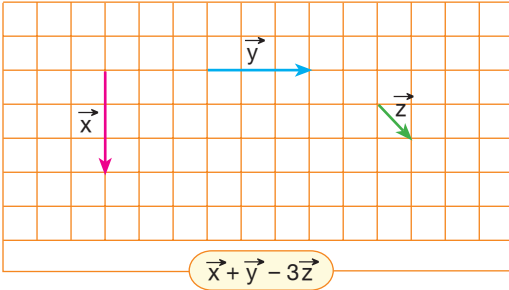
2.



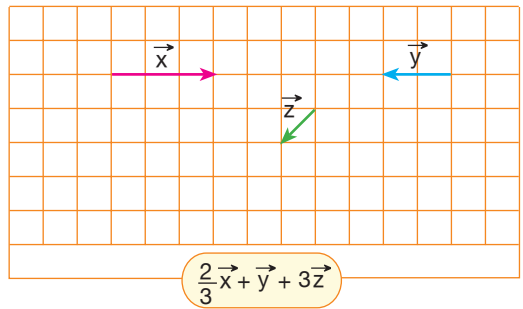
7.



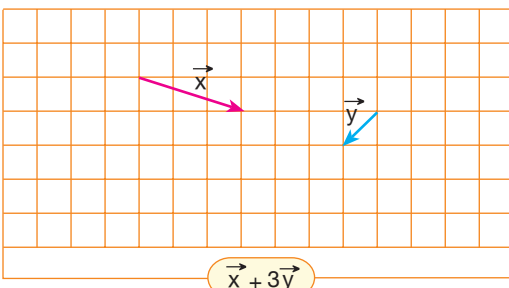
3.



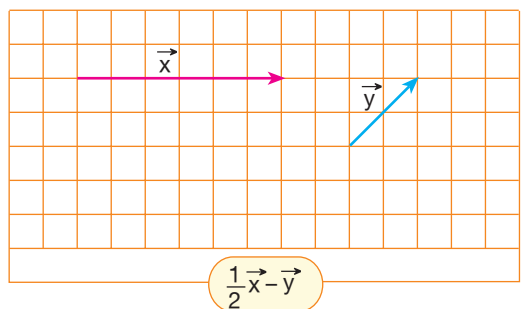
8.



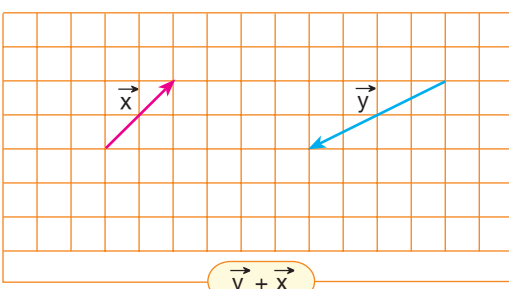
4.



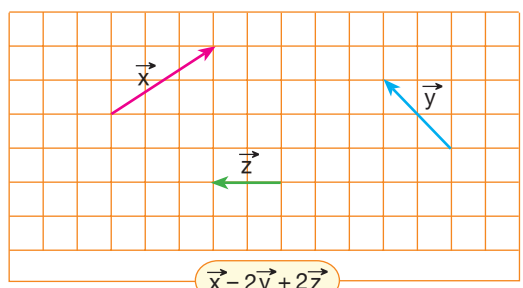
9.



5.



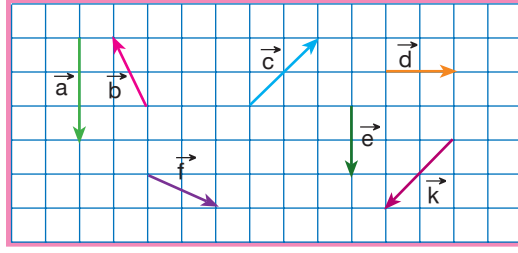
10.





Etkinlik Zamanı – 4

DOĞRU – YANLIŞ



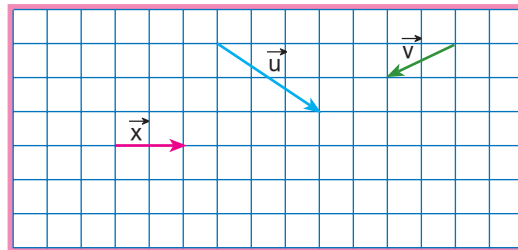
D Y

1. $\vec{a}$ ve $\vec{e}$ vektörlerinin doğrultuları aynıdır. ☐ D ☐ Y
2. $\vec{d} - \vec{f}$ ile $\vec{a} - \vec{e}$ eş iki vektördür. ☐ D ☐ Y
3. $\vec{d} + \vec{k}$ ile $\vec{b} + \vec{f}$ eş iki vektördür. ☐ D ☐ Y
4. $\vec{c}$ ve $\vec{k}$ aynı doğrultulu vektörlerdir. ☐ D ☐ Y
5. $\vec{b} + \vec{k}$ ile $\vec{d}$ eş iki vektördür. ☐ D ☐ Y
6. $\vec{b} + \vec{c}$ ile $\vec{e} + \vec{k}$ vektörlerinin doğrultuları farklıdır. ☐ D ☐ Y
7. $\vec{e} + \vec{f}$ ile $\vec{a} + \vec{d}$ eş iki vektördür. ☐ D ☐ Y
8. $\vec{c}$ ve $\vec{k}$ zıt yönlü iki vektördür. ☐ D ☐ Y



Etkinlik Zamanı – 5

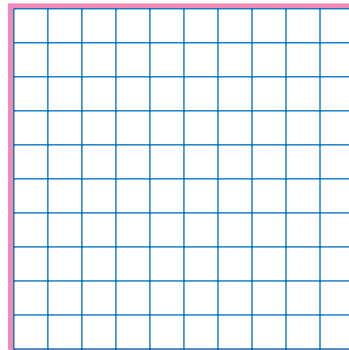
TOPLAMA



Yukarıdaki $\vec{x}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ vektörlerini kullanarak,

- $\vec{x} + \vec{v}$
- $\vec{x} + \vec{u}$
- $\vec{u} + \vec{v}$
- $\vec{x} + \vec{u} + \vec{v}$

vektörlerini yandaki zeminde gösteriniz.

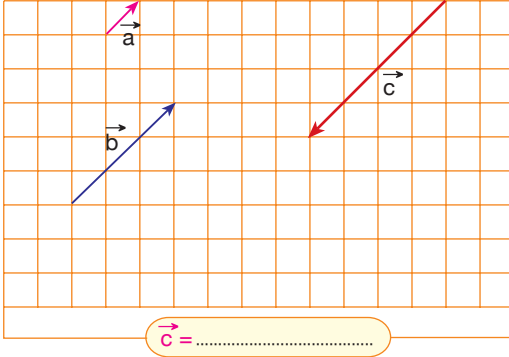




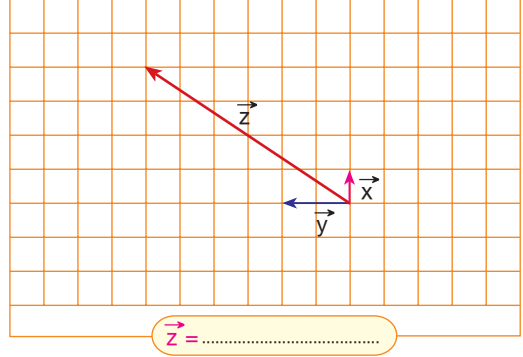
Etkinlik Zamanı – 6

Aşağıda zemin altında verilen vektörleri zemindeki vektörlerin lineer bileşimi olarak yazalım.

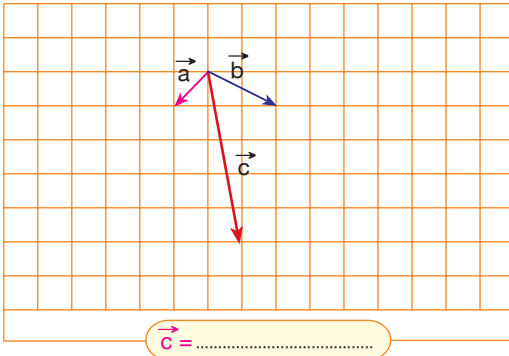
1.



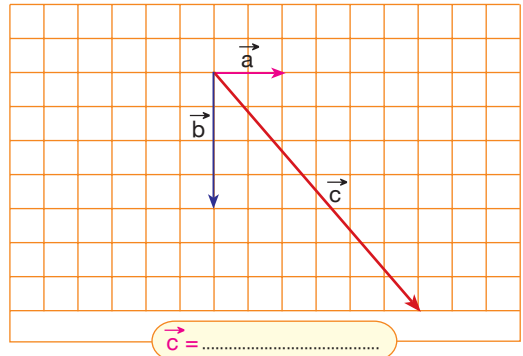
4.



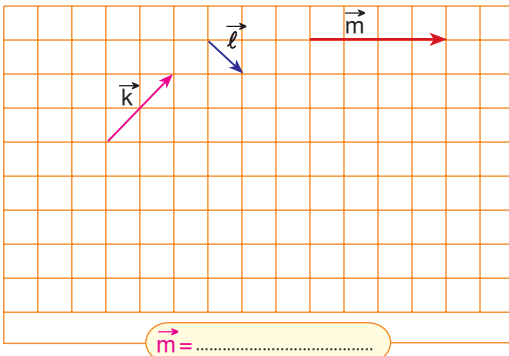
2.



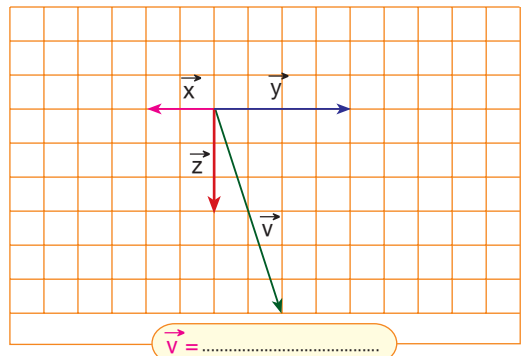
5.



3.



6.





Etkinlik Zamanı – 7

Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerleri verilen uygun kelimelerle doldurunuz.

1. Uzunluğu 1 birim olan vektöre denir.
2. Başlangıç ve bitim noktası aynı olan vektöre denir.
3. Doğrultuları aynı yönleri farklı olan vektörlere denir.
4. Biri diğerinin reel katı olan iki vektör dır.
5. Doğrultuları farklı olan iki vektör dır.
6. Vektörler toplanırken ya ya da metodu kullanılır.
7. Lineer bağımlı iki vektörün aynıdır.
8. Bir vektörü -1 den küçük bir sayı ile çarparsak boyu
9. Aynı denklik sınıfında bulunan doğrular dir.
10. Düzlemdeki bir doğrunun düzlemi ayırdığı parçalardan her birine denir.
11. Uzunluğu, yönü ve doğrultusu olan doğru parçasına denir.
12. Bir vektör sıfırdan farklı bir reel sayı ile çarpıldığında değişmez.
13. Düzlemde ikiden fazla vektör doğrultularına bakılmaksızın dır.

☞ doğrultusu

☞ lineer bağımlı

☞ paralel

☞ büyür

☞ birim vektör

☞ zıt yönlü vektörler

☞ lineer bağımsız

☞ yarı düzlem

☞ doğrultuları

☞ yönlü doğru parçası

☞ sıfır vektörü

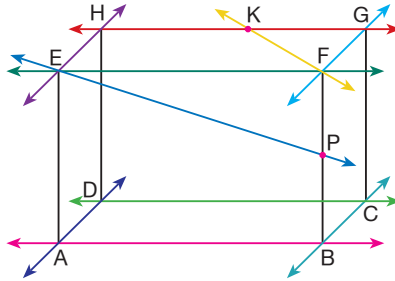
☞ lineer bağımlı

☞ çokgen metodu - paralelkenara tamamlama



Etkinlik Zamanı – 8

Aşağıdaki boşlukları prizmadaki doğruları göz önüne alarak "**paralel, kesişen, aykırı, düzlemsel**" kelimelerinden uygun olanı ile doldurunuz.



- | | |
|-----|--|
| 1. | EH ile BC doğruları doğrulardır. |
| 2. | DC ile EH doğruları doğrulardır. |
| 3. | AD ile HG doğruları doğrulardır. |
| 4. | EP ile FG doğruları doğrulardır. |
| 5. | FK ile EH doğruları doğrulardır. |
| 6. | ABCD ile EFGH düzlemleri düzlemlerdir. |
| 7. | AEHD ile ABCD düzlemleri düzlemlerdir. |
| 8. | E, F, K noktaları noktaldır. |
| 9. | FK ile AD doğrulardır. |
| 10. | A, F, G noktaları noktaldır. |
| 11. | FK ile BC doğruları doğrulardır. |
| 12. | H, A, G noktaları noktaldır. |
| 13. | AB ile EP doğruları doğrulardır. |
| 14. | EP ile BC doğruları doğrulardır. |

 **NOT ALINIZ ...**

Handwriting practice lines consisting of 25 horizontal dotted lines.



KOORDİNAT SİSTEMİ



3. ÜNİTE

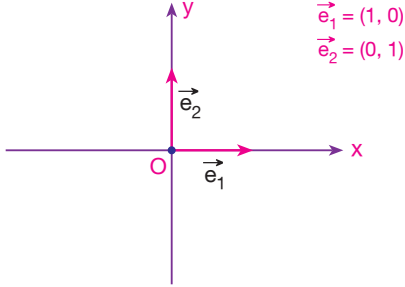
- Dik Koordinat Sistemi
- Yer Vektörü
- Skaler Çarpım
- Bir Vektörün Uzunluğu
- Birim Vektör
- Bir Vektör ile Aynı Doğrultulu Birim Vektör
- Bir Vektör ile Aynı Yönlü Birim Vektör
- Bir Vektör ile Zıt Yönlü Birim Vektör
- İki Vektör Arasındaki Aç
- Kosinüs Teoremi
- Dik İzdüşüm

"Dünyadaki en masum uğraş matematiktir."

(G.H. HARDY)

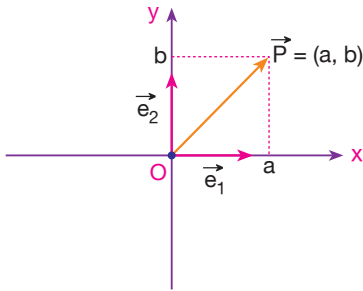
DİK KOORDİNAT SİSTEMİ

Düzlemde bir O noktası ve başlangıcı O olan birbirine dik $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ birim vektörleri verilsin.



$\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ yapısına **dik koordinat sistemi** denir.

- O noktası orijin.
- $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ birim vektörler.
- $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ vektörlerini taşıyan doğrulara x ve y eksenleri denir.
- Dik koordinat sisteminde alınan herhangi bir P(a, b) noktası için $\vec{OP} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ yazılabilir.

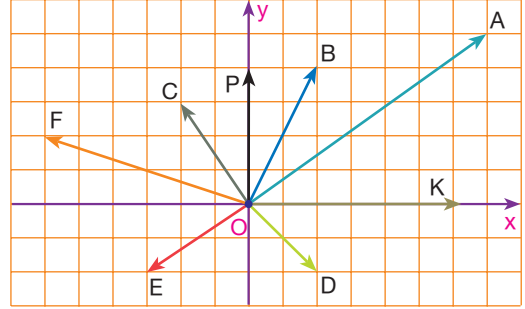


$$\begin{aligned}\vec{OP} &= (a, b) \\ &= (a, 0) + (0, b) \\ &= a(1, 0) + b(0, 1) \\ &= a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2\end{aligned}$$

O halde $\vec{OP} = (a, b) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ yazılabilir.

SONUÇ : $\vec{A} = (x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

ÖRNEK - 1



Yukarıdaki zeminde,

$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}, \vec{OE}, \vec{OF}, \vec{OP}, \vec{OK}$

vektörlerini $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazalım.

ÇÖZÜM

A(7, 5) olduğundan $\vec{OA} = 7\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ bulunur.

B(2, 4) olduğundan $\vec{OB} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ bulunur.

C(-2, 3) olduğundan $\vec{OC} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ bulunur.

D(2, -2) olduğundan $\vec{OD} = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ bulunur.

E(-3, -2) olduğundan $\vec{OE} = -3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ bulunur.

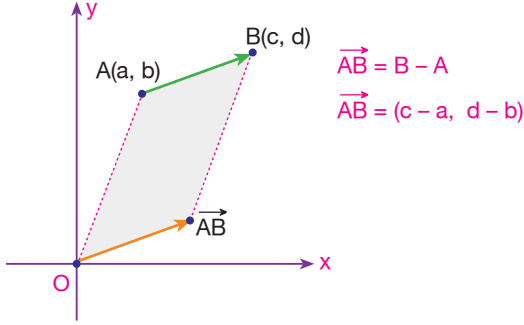
F(-6, 2) olduğundan $\vec{OF} = -6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ bulunur.

K(6, 0) olduğundan $\vec{OK} = 6\vec{e}_1$ bulunur.

P(0, 4) olduğundan $\vec{OP} = 4\vec{e}_2$ bulunur.

Yer Vektörü

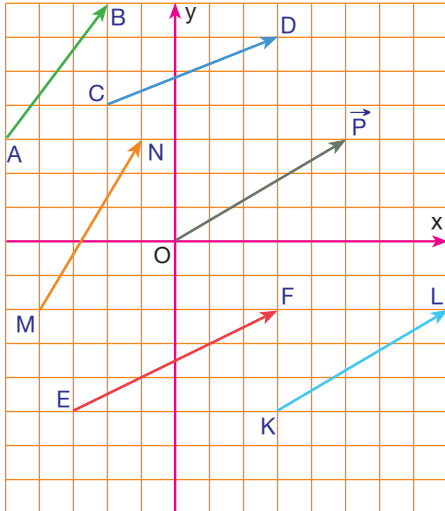
Koordinat sisteminde verilen bir vektörün uzunluk, yön ve doğrultusunu değiştirmeden başlangıcını orijine taşıyarak verilen vektörün yer vektörünü bulmuş oluruz.



Yukarıda başlangıç noktası A ve bitim noktası B olan vektörün başlangıcı orijine taşınarak $\vec{AB}$ yer vektörü bulunmuş olur.

$$\vec{AB} = B - A = \vec{B} - \vec{A} \text{ yazılabilir.}$$

ÖRNEK - 1



Yukarıdaki zeminde, $\vec{OP} = \vec{P}$ vektörü hangisinin konum vektörüdür.

- A) $\vec{AB}$ B) $\vec{CD}$ C) $\vec{EF}$ D) $\vec{KL}$ E) $\vec{MN}$

ÇÖZÜM

Aradığımız vektör $\vec{P}$ vektörüne paralel ve $\vec{P}$ vektörünün uzunluğuna eşit olacak.

Verilen vektörlerin uç noktaları,

A(-5, 3), B(-2, 7), C(-2, 4), D(3, 6), E(-3, -5), F(3, -2), K(3, -5), L(8, -2), M(-4, -2), N(-1, 3) olup

$$\vec{AB} = B - A = (3, 4)$$

$$\vec{CD} = D - C = (5, 2)$$

$$\vec{EF} = F - E = (6, 3)$$

$$\vec{KL} = L - K = (5, 3)$$

$$\vec{MN} = N - M = (3, 5) \text{ bulunur.}$$

$\vec{P} = (5, 3)$ olduğundan $\vec{KL}$ ile $\vec{P}$ paralellik bağıntısına göre aynı denklik sınıfındadır.

Cevap: D

ÖRNEK - 2

Başlangıç noktası A(1, 2) ve bitim noktası B(4, 7) olan $\vec{AB}$ nün yer vektörünü bulalım.

ÇÖZÜM

$$\vec{AB} = B - A$$

$$\vec{AB} = (4 - 1, 7 - 2) = (3, 5) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

Başlangıç noktası A(3, -4) ve bitiş noktası B(-1, 5) olan $\vec{BA}$ nün yer vektörünü bulalım.

ÇÖZÜM

$$\vec{BA} = A - B$$

$$\vec{BA} = (3 - (-1), -4 - 5) \text{ olup} = (4, -9) \text{ bulunur.}$$



NOT :

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (x_1, y_1) \text{ ve } \vec{B} = (x_2, y_2) \text{ için} \\ \vec{A} + \vec{B} &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \vec{A} - \vec{B} &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \\ k \cdot \vec{A} &= (kx_1, ky_1) \quad (k \in \mathbb{R}) \\ \vec{A} = \vec{B} &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 = y_2 \text{ dir.}\end{aligned}$$

ÖRNEK - 4

$$\left. \begin{aligned}\vec{A} &= (-3, 4) \\ \vec{B} &= (1, 4)\end{aligned} \right\} \text{ veriliyor.}$$

$2\vec{A} + 3\vec{B} = \vec{C}$ eşitliğini sağlayan $\vec{C}$ nü bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}2\vec{A} + 3\vec{B} &= \vec{C} \\ 2(-3, 4) + 3(1, 4) &= \vec{C} \\ (-6, 8) + (3, 12) &= \vec{C} \\ (-3, 20) &= \vec{C} \text{ olup} \\ \vec{C} &= (-3, 20) \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK - 5

$$\left. \begin{aligned}\vec{A} &= -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \\ \vec{B} &= 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2\end{aligned} \right\} \text{ vektörleri veriliyor.}$$

$2\vec{A} + \vec{C} = 3\vec{B}$ eşitliğini sağlayan $\vec{C}$ nü bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}A &= (-2, 4) \text{ ve } B = (3, 5) \\ \vec{C} &= (x, y) \text{ diyelim} \\ 2\vec{A} + \vec{C} &= 3\vec{B} \\ 2(-2, 4) + (x, y) &= 3(3, 5) \\ (x, y) &= (9, 15) - (-4, 8) \text{ olup} \\ (x, y) &= (13, 7) \\ \vec{C} &= (13, 7) \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Öklid İç Çarpımı (Skaler Çarpım)

$$\left. \begin{aligned}\vec{A} &= (x_1, y_1) \\ \vec{B} &= (x_2, y_2)\end{aligned} \right\} \text{ vektörlerinin skaler çarpımı}$$

$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ şeklinde tanımlanır.

- İki vektörün skaler çarpımı bir reel sayıdır, vektör değildir.

ÖRNEK - 1

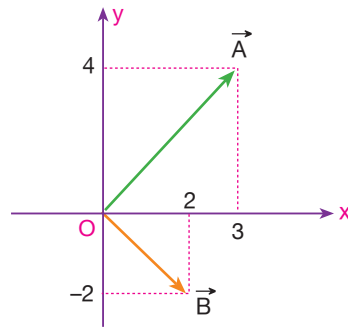
$$\left. \begin{aligned}\vec{A} &= (-3, 5) \\ \vec{B} &= (2, 7) \\ \vec{C} &= (6, -4)\end{aligned} \right\} \text{ vektörleri veriliyor.}$$

$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle, \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle, \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle$ iç çarpımlarını bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle &= (-3) \cdot 2 + 5 \cdot 7 = -6 + 35 = 29 \\ \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle &= (-3) \cdot 6 + 5 \cdot (-4) = -18 - 20 = -38 \\ \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle &= 2 \cdot 6 + 7 \cdot (-4) = 12 - 28 = -16\end{aligned}$$

ÖRNEK - 2

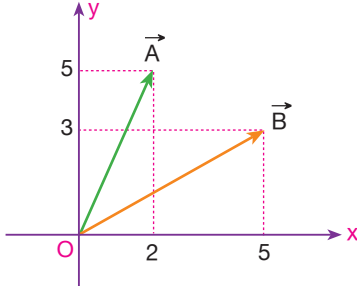


$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ iç çarpımını hesaplayalım.

ÇÖZÜM

$$\left. \begin{aligned}\vec{A} &= (3, 4) \\ \vec{B} &= (2, -2)\end{aligned} \right\} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) = -2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3



$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ iç çarpımını hesaplayalım.

ÇÖZÜM :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{A} = (2, 5) \\ \vec{B} = (5, 3) \end{array} \right\} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 25 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 4

Dik koordinat sisteminde,
A(2, 8), B(5, -4), C(-3, 7)
noktaları veriliyor.

$\langle \vec{AB}, \vec{CB} \rangle$ iç çarpımını bulalım.

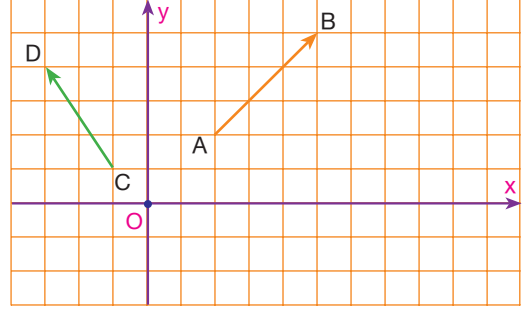
ÇÖZÜM :

$$\vec{AB} = B - A = (5 - 2, -4 - 8) = (3, -12)$$

$$\vec{CB} = B - C = (5 - (-3), -4 - 7) = (8, -11) \text{ olup}$$

$$\langle \vec{AB}, \vec{CB} \rangle = 3 \cdot 8 + (-12) \cdot (-11) = 156 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 5



Yukarıdaki dik koordinat sisteminde

$\langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle$ iç çarpımını hesaplayalım.

ÇÖZÜM :

A(2, 2) ve B(5, 5) olup

$$\vec{AB} = (3, 3)$$

C(-1, 1) ve D(-3, 4) olup

$$\vec{CD} = (-2, 3) \text{ yazılabilir.}$$

Böylece, $\langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle = 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 3$ bulunur.

ÖRNEK - 6

Dik koordinat sisteminde,

A(3, 2), B(-2, 5), C(6, 9), D(-4, 0)

noktaları veriliyor.

$\langle \vec{AC}, \vec{BD} \rangle$ iç çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM :

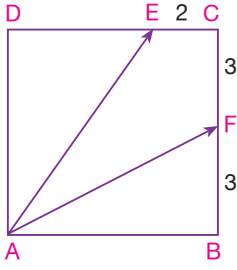
$$\vec{AC} = C - A = (3, 7)$$

$$\vec{BD} = D - B = (-2, -5) \text{ olup}$$

$$\langle \vec{AC}, \vec{BD} \rangle = 3 \cdot (-2) + 7 \cdot (-5)$$

$$= -6 - 35 = -41 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 7

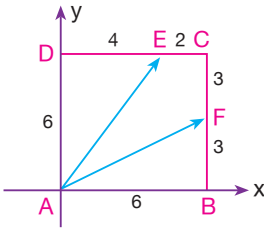


ABCD kare
 $|BF| = 3$ birim
 $|FC| = 3$ birim
 $|CE| = 2$ birim

Şekilde $\langle \vec{AE}, \vec{AF} \rangle$ iç çarpımını hesaplayalım.

ÇÖZÜM

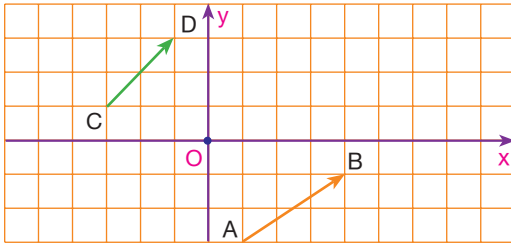
Şekle başlangıç noktası A olan dik koordinat sistemi yerleştirelim.



$\vec{AE} = (4, 6)$
 $\vec{AF} = (6, 3)$ yazılabilir.

Böylece $\langle \vec{AE}, \vec{AF} \rangle = 4 \cdot 6 + 6 \cdot 3 = 42$ bulunur.

ÖRNEK - 8



Yukarıdaki dik koordinat sisteminde
 $\langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle$ iç çarpımını hesaplayalım.

ÇÖZÜM

A(1, -3) ve B(4, -1) olduğundan

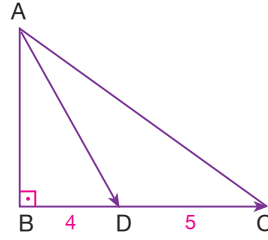
$\vec{AB} = (3, 2)$ yazılabilir.

C(-3, 1) ve D(-1, 3) olup

$\vec{CD} = (2, 2)$ yazılabilir.

Böylece, $\langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$ bulunur.

ÖRNEK - 9

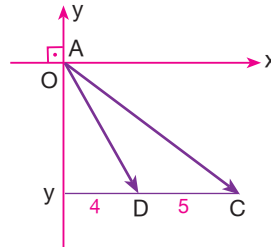


ABC dik üçgen
 $[AB] \perp [BC]$
 $|BD| = 4$ birim
 $|DC| = 5$ birim

Şekilde $\langle \vec{AD}, \vec{BC} \rangle$ iç çarpımını hesaplayalım.

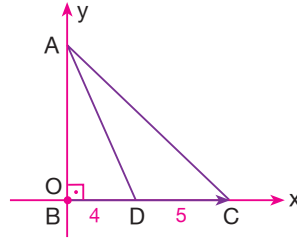
ÇÖZÜM

$\vec{AD}$ vektörünün bileşenlerini bulabilmek için başlangıç noktası A olan dik koordinat sistemini çizelim.



$\vec{AD} = (4, y)$ yazılabilir.

$\vec{BC}$ vektörünün bileşenlerini bulabilmek için başlangıç noktası B olan dik koordinat sistemini çizelim.

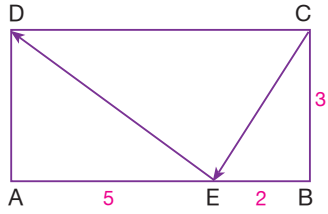


$\vec{BC} = (9, 0)$ yazılabilir.

Böylece, $\vec{AD} = (4, y)$ ve $\vec{BC} = (9, 0)$ ile

$\langle \vec{AD}, \vec{BC} \rangle = 4 \cdot 9 + y \cdot 0 = 36$ bulunur.

ÖRNEK - 10

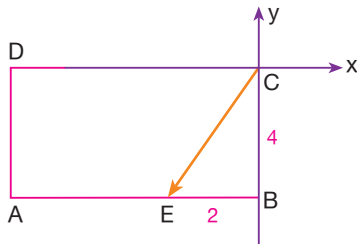


ABCD dikdörtgen
 $|AE| = 5$ birim
 $|EB| = 2$ birim
 $|BC| = 4$ birim

Şekilde $\langle \vec{CE}, \vec{ED} \rangle$ iç çarpımını hesaplayalım.

ÇÖZÜM

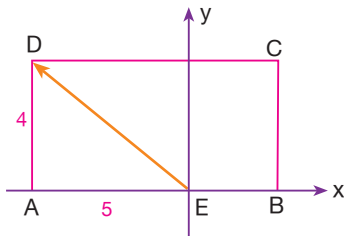
$\vec{CE}$ vektörünü başlangıç noktası C olan dik koordinat sistemi çizerek bulalım.



$\vec{CE} = (-3, -4)$ yazılabilir.

Koordinat sisteminin başlangıç noktası gibi düşünülebilir.

$\vec{ED}$ vektörünü başlangıç noktası E olan dik koordinat sistemi çizerek bulalım.



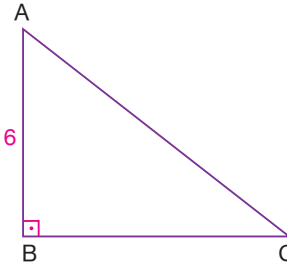
$\vec{ED} = (-5, 4)$ yazılabilir.

Koordinat sisteminin başlangıç noktası gibi düşünülebilir.

Böylece,

$\vec{CE} = (-3, -4)$ ve $\vec{ED} = (-5, 4)$ vektörlerinden
 $\langle \vec{CE}, \vec{ED} \rangle = (-3) \cdot (-5) + (-4) \cdot 4 = -1$ bulunur.

ÖRNEK - 11

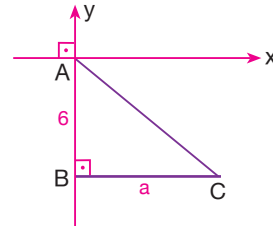


ABC dik üçgen
 $[AB] \perp [BC]$
 $|AB| = 6$ birim
 $|BC| = 7$ birim

Şekilde $\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle$ iç çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM

Şekle başlangıç noktası (orijini) A olan dik koordinat sistemi çizelim.



O halde;

$\vec{AB} = (0, -6)$

$\vec{AC} = (7, -6)$ yazılabilir.

Böylece ,

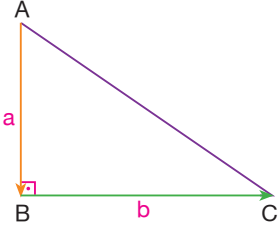
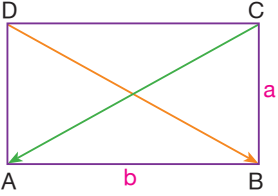
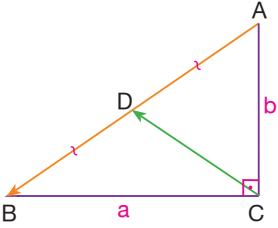
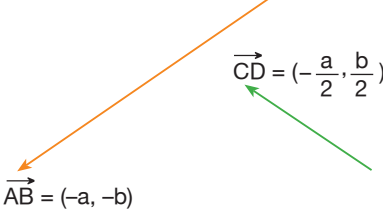
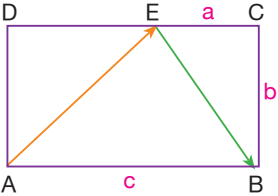
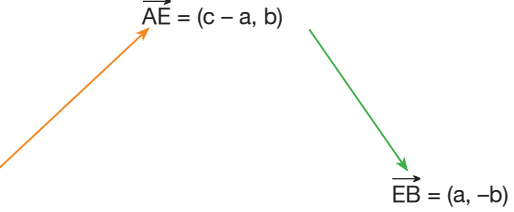
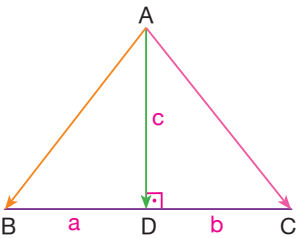
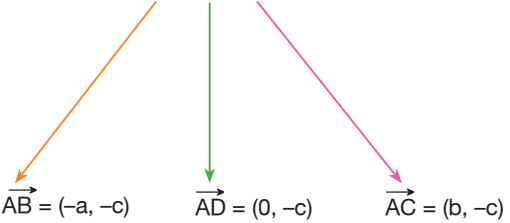
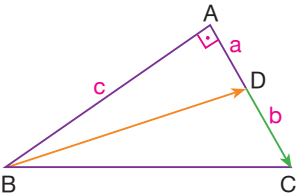
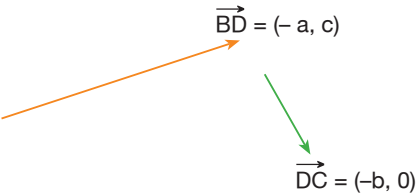
$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = 0 \cdot 7 + (-6) \cdot (-6) = 36$ bulunur.

✓ Pratik Bilgi

Şekli sorularda çoğu kez vektörün başlangıç noktasına dik koordinat sistemi çizilerek uzunlukları koordinatlarla ifade edebiliriz. Böyle yapmak aslında verilen vektörün konum vektörünü bulmaktır.

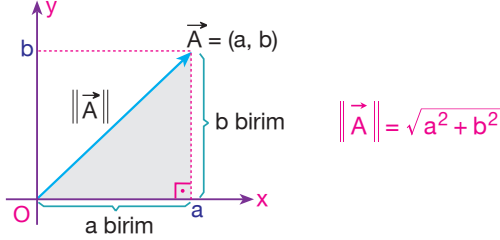
Böylece skaler çarpım daha kolay bulunabilir.

GEOMETRİK – VEKTÖREL YAKLAŞIM

Geometrik Yaklaşım	Vektörel Yaklaşım
1. 	 $\vec{AB} = (0, -a)$ $\vec{BC} = (b, 0)$
2. 	 $\vec{CA} = (-b, -a)$ $\vec{DB} = (b, -a)$
3. 	 $\vec{AB} = (-a, -b)$ $\vec{CD} = (-\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$
4. 	 $\vec{AE} = (c - a, b)$ $\vec{EB} = (a, -b)$
5. 	 $\vec{AB} = (-a, -c)$ $\vec{AD} = (0, -c)$ $\vec{AC} = (b, -c)$
6. 	 $\vec{BD} = (-a, c)$ $\vec{DC} = (-b, 0)$

Bir Vektörün Uzunluğu (Normu)

Dik koordinat sisteminde verilen $\vec{A} = (a, b)$ vektörünün boyu $\|\vec{A}\|$ ya da $|\vec{A}|$ ile gösterilir.

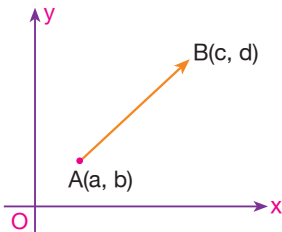


NOT : $\vec{A} = (a, b)$ vektöründe,
 $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = a^2 + b^2$ olduğundan
 $\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle}$ dir.

ÖRNEK - 1

Dik koordinat sisteminde $A(a, b)$ ve $B(c, d)$ noktaları arasındaki uzaklığı skaler çarpım kullanarak bulalım.

ÇÖZÜM



$\vec{AB}$ nin yer vektörü

$\vec{AB} = B - A = (c - a, d - b)$ olup

$|\vec{AB}| = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle}$ dir.

$= \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$ bulunur.

ÖRNEK - 2

$\vec{A} = (3, 5)$ vektörü veriliyor.

$\vec{A}$ vektörünün uzunluğunu hesaplayalım.

ÇÖZÜM

$\|\vec{A}\| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 3

$\vec{A} = (1, 2)$ ve $\vec{B} = (-3, 4)$ vektörleri veriliyor.

$2\vec{A} + \vec{B}$ vektörünün uzunluğunu hesaplayalım.

ÇÖZÜM

$$\left. \begin{array}{l} 2\vec{A} = (2, 4) \\ \vec{B} = (-3, 4) \end{array} \right\} 2\vec{A} + \vec{B} = (-1, 8)$$

$\|2\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{(-1)^2 + 8^2} = \sqrt{65}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 4

$\vec{V} = (-2, 3)$ ve $\vec{W} = (1, 4)$ vektörleri veriliyor.

$2\vec{W} - \vec{V}$ vektörünün uzunluğunu hesaplayalım.

ÇÖZÜM

İstenen $\|2\vec{W} - \vec{V}\|$ dir.

$$\left. \begin{array}{l} 2\vec{W} = (2, 8) \\ \vec{V} = (-2, 3) \end{array} \right\} \text{olup}$$

$$\begin{aligned} 2\vec{W} - \vec{V} &= (2 - (-2), 8 - 3) \\ &= (4, 5) \end{aligned}$$

$\|2\vec{W} - \vec{V}\| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ birim bulunur.



ÖRNEK - 5

$$\begin{aligned}\|\vec{A}\| &= 2 \text{ birim} \\ \|\vec{B}\| &= 6 \text{ birim} \\ \|\vec{A} + \vec{B}\| &= 7 \text{ birim}\end{aligned}$$

olduğuna göre, $\|\vec{A} - \vec{B}\|$ yi bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\|\vec{A} + \vec{B}\|^2 &= \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 + 2\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 49 \text{ olup} \\ 4 + 36 + 2\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle &= 49\end{aligned}$$

$$2\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 9$$

$$\begin{aligned}\|\vec{A} - \vec{B}\|^2 &= \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 4 + 36 - 9 \\ &= \sqrt{31} \text{ olur.}\end{aligned}$$

O halde $\|\vec{A} - \vec{B}\| = \sqrt{31}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 6

$$\langle 3\vec{A}, -2\vec{B} \rangle = 30$$

olduğuna göre, $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ iç çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM

$$\left. \begin{aligned}\vec{A} &= (a, b) \\ \vec{B} &= (c, d)\end{aligned} \right\} \text{ olsun}$$

$$3\vec{A} = (3a, 3b)$$

$$-2\vec{B} = (-2c, -2d) \text{ olup}$$

$$\langle 3\vec{A}, -2\vec{B} \rangle = -6ac - 6bd = 30$$

$$ac + bd = -5 \text{ eşitli inden}$$

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = ac + bd = -5 \text{ bulunur.}$$

✓ Pratik Bilgi

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = k \text{ ise}$$

$$\langle m\vec{A}, n\vec{B} \rangle = mn.k \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 7

$$\langle \frac{2}{3}\vec{A}, 4\vec{B} \rangle = -24$$

olduğuna göre, $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ iç çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM

$$\langle \frac{2}{3}\vec{A}, 4\vec{B} \rangle = \frac{2}{3} \cdot 4 \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = -24$$

$$\frac{8}{3} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = -24$$

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = -9 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 8

$$\langle x\vec{A}, y\vec{B} \rangle = x.y \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle \text{ ve } x^2 + y^2 = 34$$

olduğuna göre, $(x + y)$ toplamının negatif değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\langle x\vec{A}, y\vec{B} \rangle = xy \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle \text{ olduğundan}$$

$$x.y = 1 \text{ olur.}$$

$$x^2 + y^2 = 34 \text{ eşitliğini}$$

$$(x + y)^2 - 2xy = 34 \text{ şeklinde yazabiliriz.}$$

O halde,

$$(x + y)^2 - 2.1 = 34$$

$$(x + y)^2 = 36$$

$$x + y = \pm 6 \text{ olup negatif değeri } -6 \text{ bulunur.}$$

Birim Vektör

Uzunluğu 1 birim olan vektöre **birim vektör** denir. Yani $\vec{A}$ birim vektör ise $\|\vec{A}\| = 1$ birimdir.

- $\vec{A} = (1, 0)$ birim vektördür, çünkü; $\|\vec{A}\| = 1$ birimdir.
- $\vec{B} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ birim vektördür, çünkü; $\|\vec{B}\| = 1$ birimdir.
- $\vec{C} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ birim vektördür, çünkü; $\|\vec{C}\| = 1$ birimdir.

✓ Pratik Bilgi

$\vec{A} \neq \vec{0}$ olmak üzere,

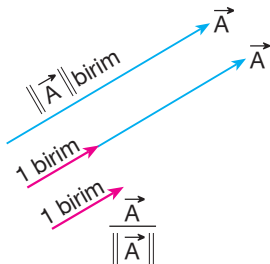
$$\vec{A} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \text{ birim vektördür.}$$

Yani bir vektörü uzunluğuna bölersek birim vektör buluruz.

Örneğin; 10 birim uzunluğundaki bir doğru parçasını 10 eşit parçaya bölersek her parçanın uzunluğu 1 birim olur. Bu durum vektörel olarak düşünülürse her bir parça birim vektöre model olarak düşünülebilir.

Bir Vektör İle Aynı Doğrultuda ve Aynı Yöndeki Birim Vektör

- $\vec{A}$ ile aynı doğrultudaki ve aynı yöndeki birim vektör $\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ vektörüdür.



ÖRNEK - 1

$\vec{A} = (3, 4)$ ile aynı doğrultuda ve aynı yöndeki birim vektörü bulalım.

ÇÖZÜM

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ birim olup,}$$

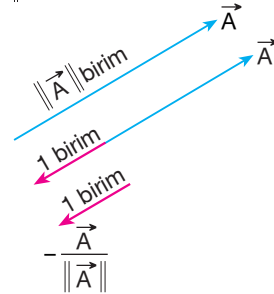
5 birim uzunluğundaki vektörü 5 eşit parçaya bölersek 1 birim uzunluğunda vektörler elde ederiz.

Böylece,

$$\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{(3, 4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \text{ bulunur.}$$

Bir Vektör İle Aynı Doğrultudaki ve Zıt Yöndeki Birim Vektör

- $\vec{A}$ ile aynı doğrultudaki ve zıt yöndeki birim vektör $-\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ dır.



ÖRNEK - 2

$\vec{A} = (5, -4)$ ile aynı doğrultuda ve zıt yöndeki birim vektörü bulalım.

ÇÖZÜM

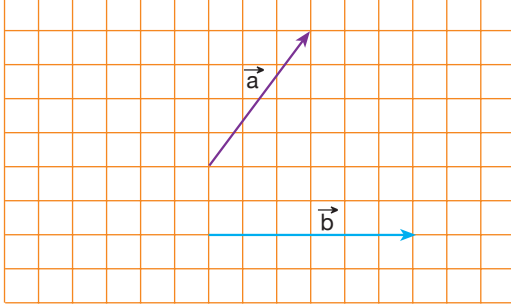
$$-\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = -\frac{(5, -4)}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = \left(-\frac{5}{\sqrt{41}}, \frac{4}{\sqrt{41}} \right) \text{ bulunur.}$$



İki Vektör Arasındaki Açı

İki vektör arasındaki açı vektörlerin başlangıç noktaları aynı noktaya taşınarak gösterilir.

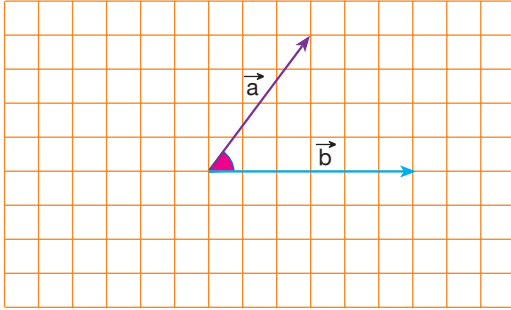
ÖRNEK - 1



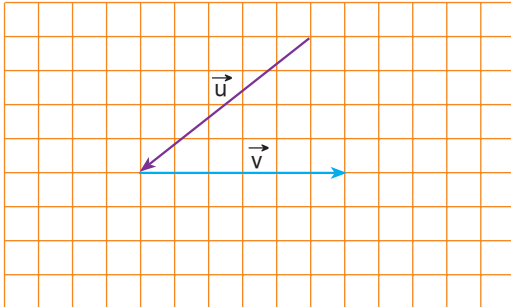
Yukarıdaki zeminde verilen vektörler arasındaki açıyı gösterelim.

ÇÖZÜM :

Vektörlerin başlangıç noktalarını aynı noktaya taşıyalım.



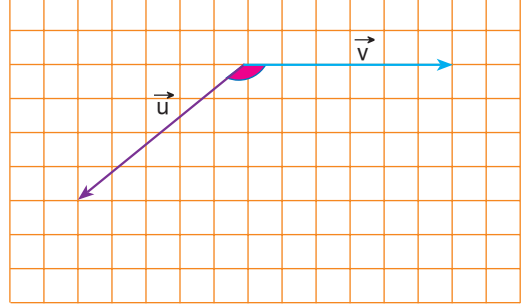
ÖRNEK - 2



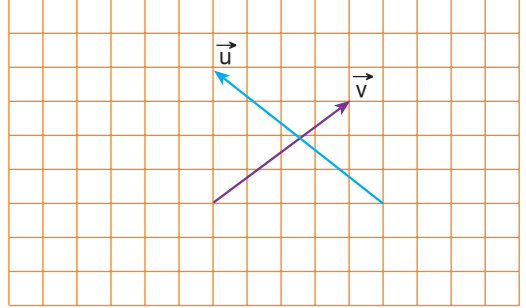
Yukarıdaki zeminde verilen vektörler arasındaki açıyı gösterelim.

ÇÖZÜM :

Vektörlerin başlangıç noktalarını aynı noktaya taşıyalım.



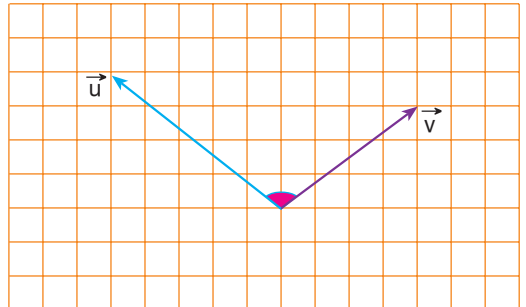
ÖRNEK - 3



Yukarıdaki zeminde verilen vektörler arasındaki açıyı gösterelim.

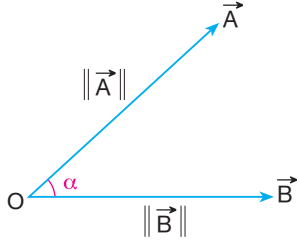
ÇÖZÜM :

Vektörlerin başlangıç noktalarını aynı noktaya taşıyalım.



Skaler (İç) Çarpım

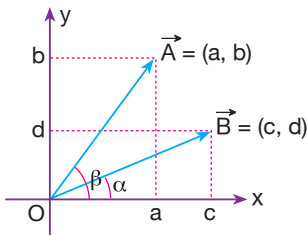
$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ sıfırdan farklı iki vektör ve bu iki vektör arasındaki açı α olmak üzere;



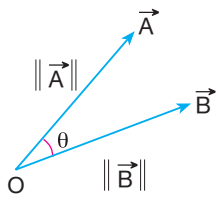
$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{A} = (a, b) \\ \vec{B} = (c, d) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = a \cdot c + b \cdot d \\ \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \alpha \end{array}$$

İspat :



$\beta - \alpha = \theta$ olsun



$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açı $\theta = \beta - \alpha$ olup

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \sin \alpha$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\|\vec{A}\|} \cdot \frac{c}{\|\vec{B}\|} + \frac{b}{\|\vec{A}\|} \cdot \frac{d}{\|\vec{B}\|} \text{ böylece}$$

$$a \cdot c + b \cdot d = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \theta \text{ bulunur.}$$

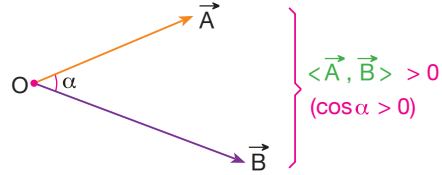
$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \theta$$



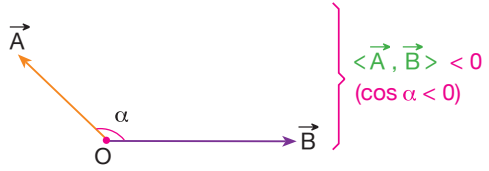
NOT :

- $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ bir reel sayıdır.
- $\vec{AB}$ bir vektördür.

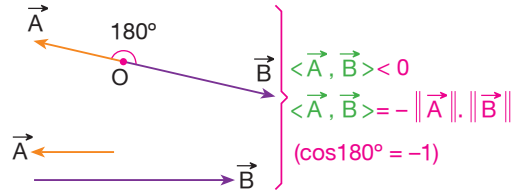
1. Durum : Aralarında dar açı olan iki vektörün skaler çarpımı pozitif bir reel sayıdır.



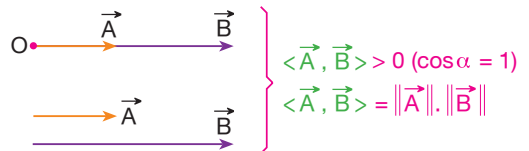
2. Durum : Aralarında geniş açı olan iki vektörün skaler çarpımı negatif bir reel sayıdır.



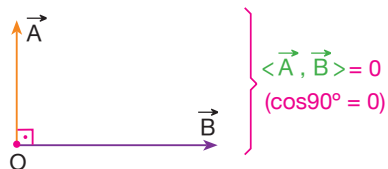
3. Durum : Zıt yönlü iki vektörün skaler çarpımı negatif bir reel sayıdır.



4. Durum : Yönleri aynı olan iki vektörün skaler çarpımı pozitif bir reel sayıdır.



5. Durum : Dik kesişen iki vektörün skaler çarpımı sıfırdır.

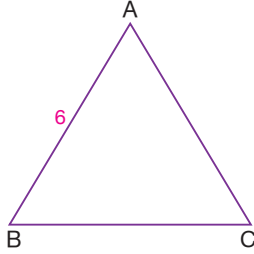


✓ **Pratik Bilgi**

Sıfırdan farklı $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ için

• $\|\vec{A} + \vec{B}\| = \|\vec{A} - \vec{B}\|$ ise $\vec{A} \perp \vec{B}$ dir.

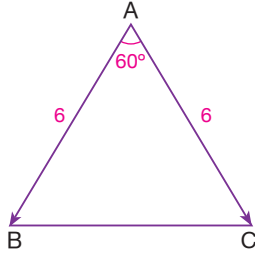
ÖRNEK - 1



ABC eşkenar üçgen
|AB| = 6 birim

Buna göre, $\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle$ iç çarpımını bulalım.

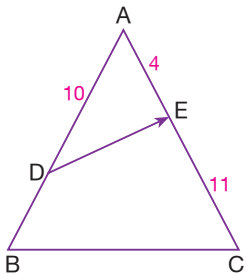
ÇÖZÜM



$$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 18 \text{ bulunur.}$$

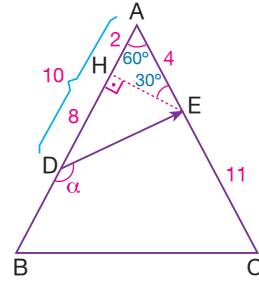
ÖRNEK - 2



ABC eşkenar üçgen
|AD| = 10 birim
|AE| = 4 birim
|EC| = 11 birim

Buna göre, $\langle \vec{DE}, \vec{AB} \rangle$ iç çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM



[EH] dikmesi ile oluşan HDE dik üçgeninde,

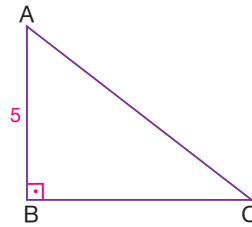
$$\cos \alpha = \frac{-8}{|DE|} \text{ olur.}$$

Böylece,

$$\langle \vec{DE}, \vec{AB} \rangle = \|\vec{DE}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \cos \alpha$$

$$= \|\vec{DE}\| \cdot 15 \cdot \frac{-8}{|DE|} = -120 \text{ bulunur.}$$

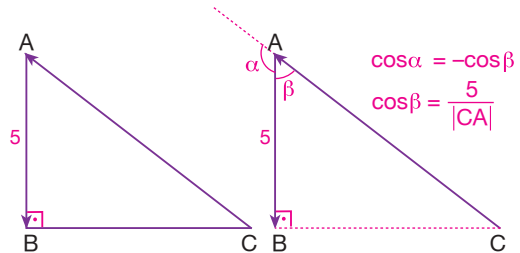
ÖRNEK - 3



ABC dik üçgen
[AB] $\perp$ [BC]
|AB| = 5 birim

Buna göre, $\langle \vec{AB}, \vec{CA} \rangle$ iç çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM



$$\cos \alpha = -\cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{5}{|CA|}$$

$$\langle \vec{AB}, \vec{CA} \rangle = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{CA}\| \cdot \cos \alpha$$

$$= 5 \cdot \|\vec{CA}\| \cdot \frac{-5}{|CA|}$$

$$= -25 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 4

$$\left. \begin{array}{l} \vec{A} = (1, 7) \\ \vec{B} = (-2, k) \end{array} \right\} \text{ vektörleri arasındaki açı } 90^\circ \text{ dir.}$$

Buna göre, k değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açı 90° ve

$\cos 90^\circ = 0$ olduğundan,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ olur.}$$

Buna göre, $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 0$ dir.

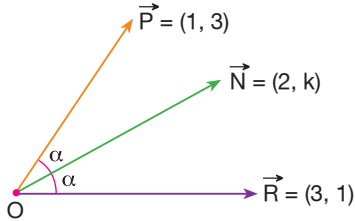
$$-2 \cdot 1 + 7 \cdot k = 0 \text{ eşitliğinden } k = \frac{2}{7} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 5

$$\vec{P} = (1, 3) \text{ ve } \vec{R} = (3, 1)$$

vektörlerinin açıortay vektörü $\vec{N} = (2, k)$ olduğuna göre, k yi bulalım.

ÇÖZÜM :



$$\langle \vec{P}, \vec{N} \rangle = \|\vec{P}\| \cdot \|\vec{N}\| \cdot \cos \alpha$$

$$1 \cdot 2 + 3k = \sqrt{10} \cdot \|\vec{N}\| \cdot \cos \alpha \dots\dots (1)$$

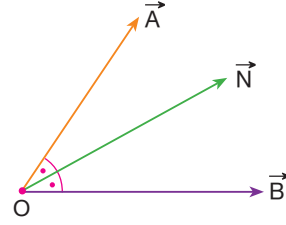
$$\langle \vec{N}, \vec{R} \rangle = \|\vec{N}\| \cdot \|\vec{R}\| \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot 3 + k = \sqrt{10} \cdot \|\vec{N}\| \cdot \cos \alpha \dots\dots (2)$$

(1) ve (2) eşitlikler oranlanırsa,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2+3k}{6+k} = \frac{\sqrt{10} \cdot \|\vec{N}\| \cdot \cos \alpha}{\sqrt{10} \cdot \|\vec{N}\| \cdot \cos \alpha} \\ \frac{2+3k}{6+k} = 1 \text{ olup} \\ 2+3k = 6+k \\ k = 2 \text{ bulunur.} \end{array} \right\}$$

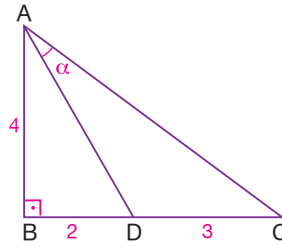
✓ Pratik Bilgi



$\vec{N}$: $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ nün açıortay vektörü ise,

$\vec{N}$ ile $\vec{A} \cdot \|\vec{B}\| + \vec{B} \cdot \|\vec{A}\|$ lineer bağımlıdır, yani;
 $\vec{A} \cdot \|\vec{B}\| + \vec{B} \cdot \|\vec{A}\| = k \cdot \vec{N}$ yazılabilir.

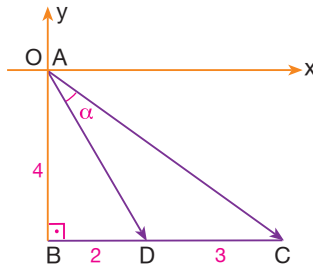
ÖRNEK - 6



ABC dik üçgen
 $|AB| = 4$ birim
 $|BD| = 2$ birim
 $|DC| = 3$ birim
 $m(\widehat{DAC}) = \alpha$

Buna göre, $\cos \alpha$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM :



$$\begin{array}{l} \vec{AD} = (2, -4) \\ \vec{AC} = (5, -4) \end{array} \text{ yazılabilir.}$$

O halde şekli vektörel olarak düşünürsek α açısının

$\vec{AD}$ ile $\vec{AC}$ arasındaki açı olduğu görülür.

Skaler çarpım ile

$$\langle \vec{AD}, \vec{AC} \rangle = \|\vec{AD}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \cos \alpha$$

$$10 + 16 = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{41} \cdot \cos \alpha$$

$$26 = 2\sqrt{205} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{13}{\sqrt{205}} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 7

$\vec{A} = (3, -4)$ ve $\vec{B} = (8, 6)$ vektörleri arasındaki açının ölçüsünü hesaplayalım.

ÇÖZÜM :

$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açı α olsun.

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \alpha$$

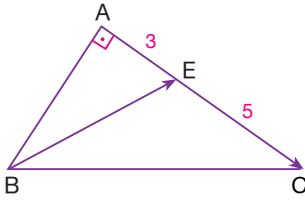
$$3 \cdot 8 - 4 \cdot 6 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{8^2 + 6^2} \cdot \cos \alpha$$

$$0 = 5 \cdot 10 \cdot \cos \alpha$$

$\cos \alpha = 0$ olup

$\alpha = 90^\circ$ bulunur.

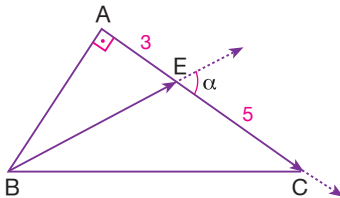
ÖRNEK - 8



ABC dik üçgen
 $|AE| = 3$ birim
 $|EC| = 5$ birim

Buna göre, $\langle \vec{BE}, \vec{AC} \rangle$ iç çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM :



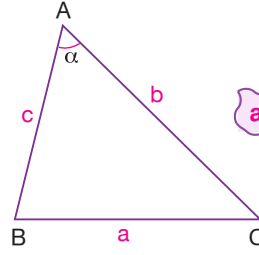
$\vec{BE}$ ve $\vec{AC}$ vektörleri arasındaki açı; vektörlerin okları arasındaki açıdır.

$$\langle \vec{BE}, \vec{AC} \rangle = \|\vec{BE}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \cos \alpha \text{ ve}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\|\vec{BE}\|} \text{ olduğundan}$$

$$\langle \vec{BE}, \vec{AC} \rangle = \|\vec{BE}\| \cdot 8 \cdot \frac{3}{\|\vec{BE}\|} = 24 \text{ bulunur.}$$

Kosinüs Teoremi

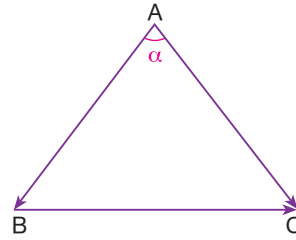


Bir ABC üçgeninde,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

eşitliği vardır.

İspat :



$$\|\vec{AB}\| = c \text{ birim}$$

$$\|\vec{AC}\| = b \text{ birim}$$

$$\|\vec{BC}\| = a \text{ birim}$$

$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ olsun

Böylece,

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} \text{ olup}$$

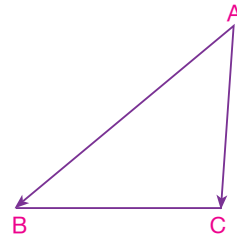
$$\|\vec{BC}\| = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|$$

$$\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - 2 \langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle$$

$$\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - 2 \|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \text{ bulunur.}$$

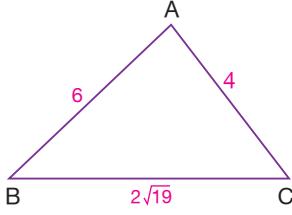
✓ Pratik Bilgi



$$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = \frac{\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{BC}\|^2}{2}$$

(Kosinüs teoreminden)

ÖRNEK - 1



ABC üçgen
 $|AB| = 6$ birim
 $|AC| = 4$ birim
 $|BC| = 2\sqrt{19}$ birim

Buna göre, BAC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

ABC üçgeninde kosinüs teoremi ile,

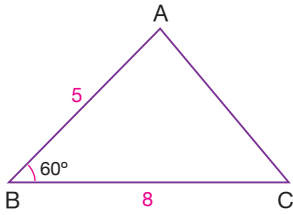
$$(2\sqrt{19})^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos(\hat{A})$$

$$76 = 52 - 48 \cdot \cos(\hat{A})$$

$$\cos(\hat{A}) = -\frac{1}{2} \text{ olup}$$

$$m(\hat{BAC}) = 120^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 2



ABC üçgen
 $|AB| = 5$ birim
 $|BC| = 8$ birim
 $m(\hat{ABC}) = 60^\circ$

Buna göre, $|AC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

1. Yol :

ABC üçgeninde kosinüs teoremi ile,

$$x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$$

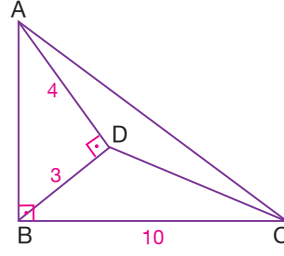
$$x^2 = 89 - 40$$

$$x^2 = 49 \Rightarrow x = 7 \text{ birim bulunur.}$$

2. Yol :

A noktasında $[BC]$ na dikme inerek.

ÖRNEK - 3



ABC üçgen
 $[AD] \perp [DB]$
 $|AD| = 4$ birim
 $|DB| = 3$ birim
 $|BC| = 10$ birim

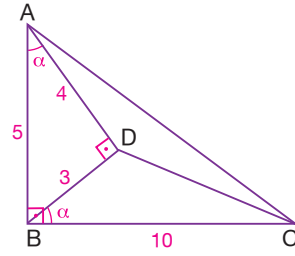
Buna göre, $|DC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

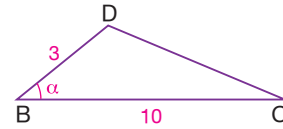
$m(\hat{DBC}) = \alpha$ diyelim.

Bu durumda, $m(\hat{BAD}) = \alpha$ olup

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ olur.}$$



DBC üçgeninde kosinüs teoremi ile,



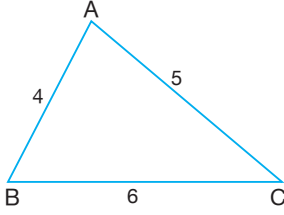
$$|DC|^2 = 3^2 + 10^2 - 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ yerine yazılırsa,}$$

$$|DC| = 109 - 60 \cdot \frac{4}{5} \text{ eşitliğinden}$$

$$|DC| = \sqrt{61} \text{ birim bulunur.}$$

1.

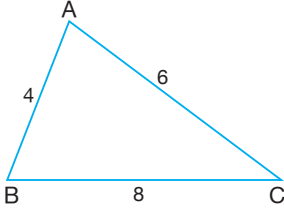


ABC üçgen
 $|AB| = 4$ birim
 $|AC| = 5$ birim
 $|BC| = 6$ birim

Yukarıdaki ABC üçgeninin en küçük açısının kosinüsü kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

2.



ABC üçgen
 $|AB| = 4$ birim
 $|AC| = 6$ birim
 $|BC| = 8$ birim

Buna göre, $\cos(\widehat{ACB})$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{7}{8}$

3. Bir ABC üçgeninde,

$$|AB| = c \text{ birim}$$

$$|AC| = b \text{ birim}$$

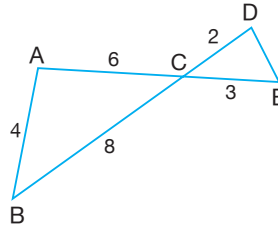
$$|BC| = a \text{ birim}$$

olarak veriliyor.

$a^2 = b^2 + c^2 + bc$ olduğuna göre, $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

- A) 30 B) 45 C) 60 D) 120 E) 150

4.

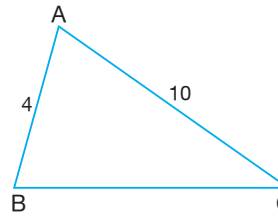


$[AE] \cap [BD] = \{C\}$
 $|AB| = 4$ birim
 $|AC| = 6$ birim
 $|BC| = 8$ birim
 $|CD| = 2$ birim
 $|CE| = 3$ birim

Buna göre, $|DE|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 2 B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C) $\sqrt{6}$ D) 3 E) 4

5.



ABC üçgen
 $|AB| = 4$ birim
 $|AC| = 10$ birim
 $m(\widehat{BAC}) > 60^\circ$

Buna göre, $|BC|$ uzunluğunun en küçük tam-sayı değeri kaçtır?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

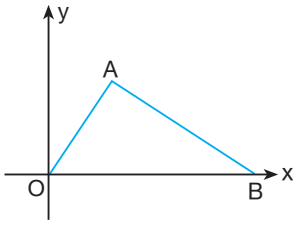
6. Bir ABC üçgeninde,

$$2|AB| = 3|AC| = 4|BC|$$

Buna göre, $\cos(\widehat{ABC})$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{7}{8}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{29}{36}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{5}$

7.

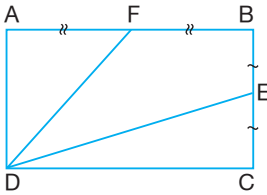


A(2, 5)
B(14, 0)

Buna göre, $\cos(\widehat{ABO})$ kaçtır?

- A) $\frac{9}{13}$ B) $\frac{11}{13}$ C) $\frac{12}{13}$ D) $\frac{14}{15}$ E) $\frac{16}{17}$

8.

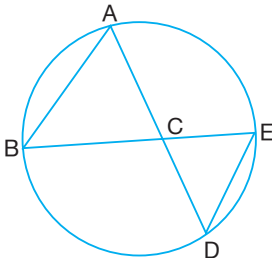


ABCD dikdörtgen
 $|AF| = |FB|$
 $|BE| = |EC|$
 $|AB| = 2|BC|$

Buna göre, $\cos(\widehat{EDF})$ kaç eşittir?

- A) $\frac{5}{\sqrt{34}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ C) $\frac{3}{\sqrt{15}}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

9.

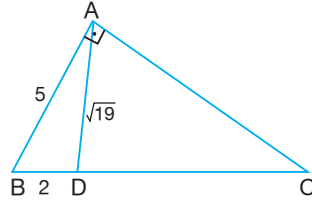


$[AD] \cap [BE] = \{C\}$
 $|CD| = 4$ birim
 $|DE| = 6$ birim

$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{1}{3}$ olduğuna göre, $|CE|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

10.

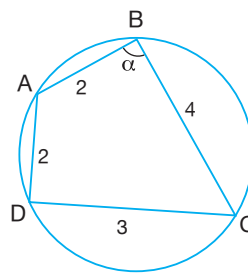


ABC dik üçgen
 $|AB| = 5$ birim
 $|AD| = \sqrt{19}$ birim
 $|BD| = 2$ birim

Buna göre, $|DC|$ uzunluğu kaçtır?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) $4\sqrt{3}$ E) $8\sqrt{2}$

11.

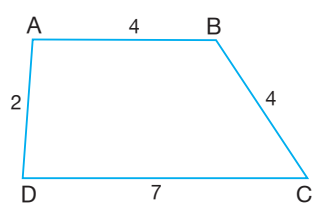


Şekilde
ABCD kirişler
dörtgeni verilmiştir.

Buna göre, $\cos \alpha$ kaçtır?

- A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

12.



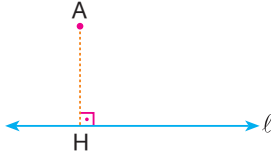
ABCD yamuk
 $|AD| = 2$ birim
 $|AB| = 4$ birim
 $|BC| = 4$ birim
 $|DC| = 7$ birim

ABCD yamuğunda, $\cos(\widehat{BCD})$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{7}{8}$

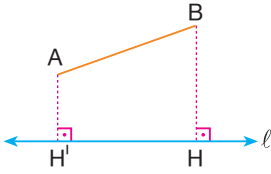
DİK İZDÜŞÜM

1



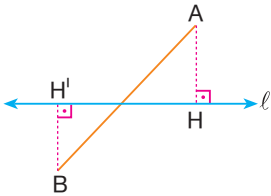
A noktasının ℓ doğrusu üzerindeki dik izdüşümü; H noktasıdır.

2



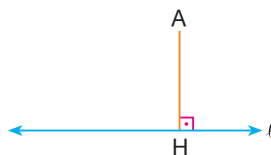
[AB] nın ℓ doğrusu üzerindeki dik izdüşümü; [H'H] doğru parçasıdır.

3



[AB] nın ℓ doğrusu üzerindeki dik izdüşümü; [H'H] doğru parçasıdır.

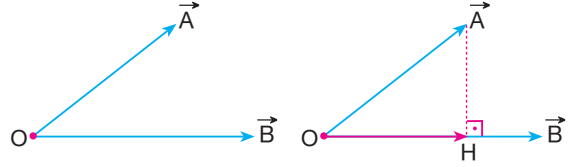
4



[AH] nın ℓ doğrusu üzerindeki dik izdüşümü; H noktasıdır.

Bir Vektörün Bir Doğru Üzerindeki Dik İzdüşüm Vektörü

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ başlangıç noktaları aynı iki vektör olsun.



$\vec{OH}$: $\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörüdür.

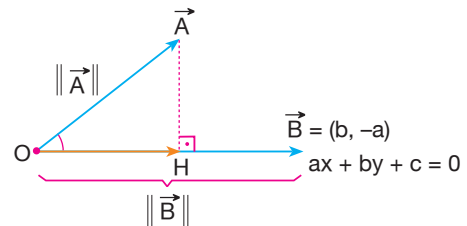
$$\|\vec{OH}\| = \frac{\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle}{\|\vec{B}\|} \quad \text{ve} \quad \vec{OH} = \|\vec{OH}\| \cdot \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$$

Dik izdüşüm vektörünün uzunluğu Dik izdüşüm vektörü

Bir Vektörün Bir Doğru Üzerindeki Dik İzdüşüm Uzunluğu

Doğrunun bir doğrultman vektörü alınıp verilen vektörün bu vektör üzerindeki izdüşüm uzunluğu hesaplanır.

Bir A vektörünün $ax + by + c = 0$ doğrusu üzerindeki dik izdüşümü;

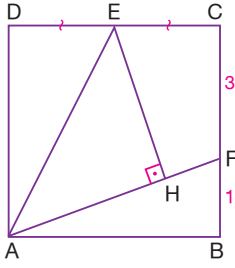


İki vektör skaler çarpılır.

$$\|\vec{OH}\| = \frac{\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle}{\|\vec{B}\|}$$

Dikliğinin olduğu vektörün uzunluğuna bölünür.

ÖRNEK - 1

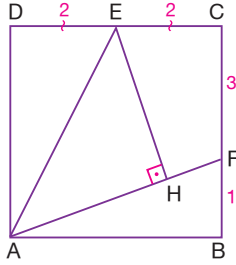


ABCD kare
 $|DE| = |EC|$
 $[EH] \perp [AF]$
 $|CF| = 3$ birim
 $|FB| = 1$ birim

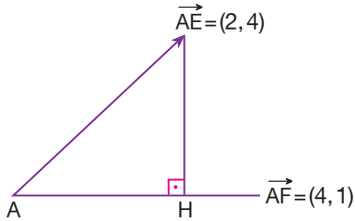
Buna göre, $|AH|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Şekildeki diğer uzunlukları yazalım.



Buna göre, $\vec{AE} = (2, 4)$ ve $\vec{AF} = (4, 1)$ olup



$$|AH| = \frac{(\vec{AE}, \vec{AF})}{\|\vec{AF}\|} = \frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 1}{\sqrt{16 + 1}}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{17}} \text{ birim bulunur.}$$

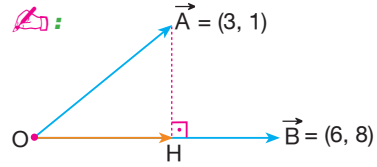
ÖRNEK - 2

$\vec{A} = (3, 1)$ ve $\vec{B} = (6, 8)$ vektörleri veriliyor.

$\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ vektörü üzerindeki

- Dik izdüşüm uzunluğunu
- Dik izdüşüm vektörünü bulalım.

ÇÖZÜM



$$a) |OH| = \frac{(\vec{A}, \vec{B})}{\|\vec{B}\|} = \frac{6 \cdot 3 + 8 \cdot 1}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{13}{5} \text{ br bulunur.}$$

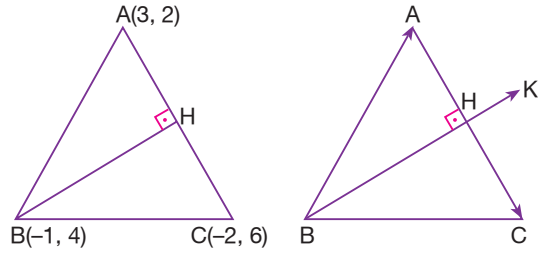
$$b) \vec{OH} = \frac{(\vec{A}, \vec{B})}{\|\vec{B}\|} \cdot \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{18 + 8}{\sqrt{6^2 + 8^2}} \cdot \left(\frac{6}{10}, \frac{8}{10} \right)$$

$$\vec{OH} = \left(\frac{39}{25}, \frac{52}{25} \right) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

Köşe koordinatları $A(3, 2)$, $B(-1, 4)$ ve $C(-2, 6)$ olan ABC üçgeninde $[AC]$ kenarına ait yüksekliğini bulalım.

ÇÖZÜM



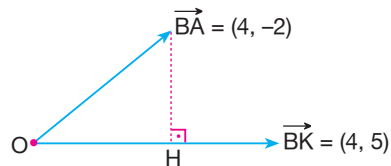
(Geometrik yaklaşım)

(Vektörel yaklaşım)

$|BH|$: $\vec{BA}$ vektörünün $\vec{BK}$ vektörü üzerindeki izdüşüm uzunluğudur.

O halde, $\vec{BA} = (4, -2)$, $\vec{AC} = (-5, 4)$ ve

$\vec{AC} \perp \vec{BK}$ olup $\vec{BK} = (4, 5)$ alınabilir.



$$|BH| = |OH| = \frac{(\vec{BA}, \vec{BK})}{\|\vec{BK}\|}$$

$$= \frac{4 \cdot 4 - 2 \cdot 5}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{6}{\sqrt{41}} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 4

$$\left. \begin{array}{l} (\vec{b} + \vec{c}) \perp \vec{a} \\ \vec{a} = \sqrt{5} \vec{b} \\ \|\vec{c}\| = 2\|\vec{b}\| \end{array} \right\} \text{ veriliyor.}$$

Buna göre, $\vec{a}$ ve $\vec{c}$ arasındaki açının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :

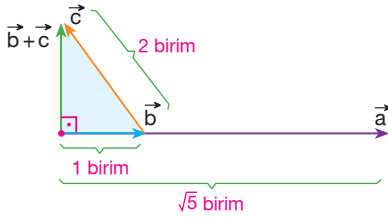
$\vec{a} = \sqrt{5} \vec{b}$ ise $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ lineer bağımlıdır.

O halde,

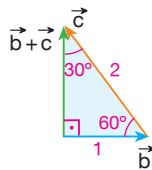


$(\vec{b} + \vec{c}) \perp \vec{a}$ ve $\|\vec{c}\| = 2\|\vec{b}\|$ ise

Şekli aşağıdaki gibi çizebiliriz.



Taralı üçgen $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni olur.



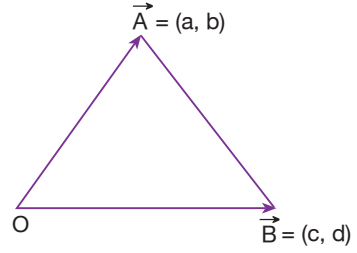
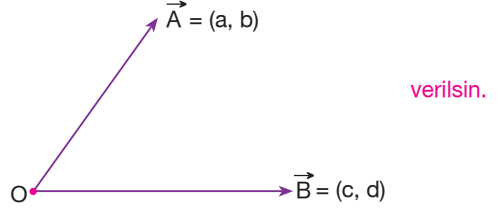
Böylece,



$\vec{a}$ ile $\vec{c}$ arasındaki açının ölçüsü 120° bulunur.

Başlangıç Noktaları Aynı Olan İki Vektör Üzerine Kurulan Üçgenin Alanı

✓ Pratik Bilgi

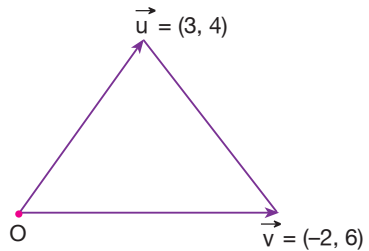


$$A(\widehat{OAB}) = \frac{1}{2} |ad - bc| \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 1

$\vec{u} = (3, 4)$ ve $\vec{v} = (-2, 6)$ üzerine kurulan üçgen- sel bölgenin alanını hesaplayalım.

ÇÖZÜM :

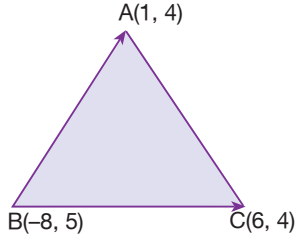
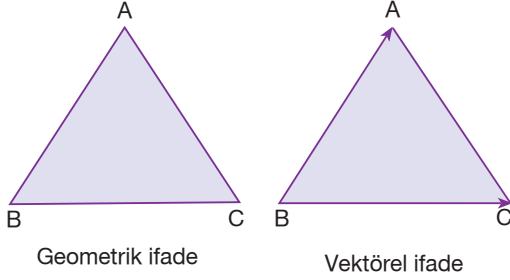


$$\begin{aligned} \text{Taralı Alan} &= \frac{1}{2} \cdot |3 \cdot 6 - (-2) \cdot 4| \\ &= 13 \text{ br}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK - 2

A(1, 4) ve B(-8, 5) ve C(6, 4) noktalarının birleştirilmesi ile oluşan ABC üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

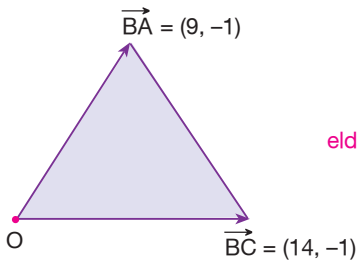


$\vec{BA}$ ve $\vec{BC}$ nin konum vektörlerini bulalım.

$$\vec{BA} = A - B = (9, -1)$$

$$\vec{BC} = C - B = (14, -1)$$

Böylece,



elde edilir.

Bu durumda,

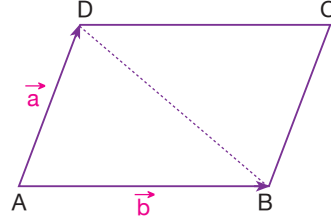
$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} |(-1) \cdot 9 - (-1) \cdot 14|$$

$$A(\triangle ABC) = \frac{5}{2} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

Ardışık iki kenarı $\vec{a} = (3, 8)$ ve $\vec{b} = (-8, 6)$ vektörleri olan paralelkenarsal bölgenin alanını hesaplayalım.

ÇÖZÜM :

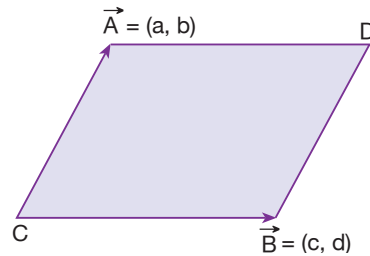
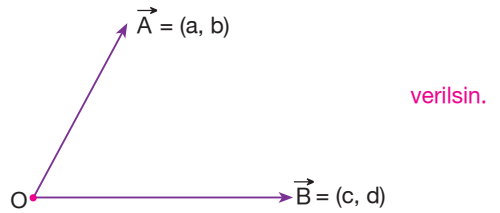


$A(ABCD) = 2A(\triangle ABD)$ olduğundan

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |3 \cdot 6 - 8(-8)| \\ &= |18 + 64| \\ &= 82 \text{ br}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Başlangıç Noktaları Aynı Olan İki Vektör Üzerine Kurulan Paralelkenarsal Bölgenin Alanı

✓ Pratik Bilgi



$$A(ACBD) = |ad - bc| \text{ dir.}$$

1. A(4, 6) ve B(1, -2) noktaları veriliyor.

Buna göre, $\overrightarrow{AB}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) (2, 8) B) (-2, 8) C) (2, -7)
D) (-3, -8) E) (3, 1)

2. A(1, 7) ve B(-3, -4) noktaları veriliyor.

Buna göre, $\overrightarrow{BA}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) (-11, -4) B) (-4, 11) C) (4, 11)
D) (4, 9) E) (11, 4)

3. A(-3, 5) noktası ve $\overrightarrow{AB} = (2, 0)$ veriliyor.

Buna göre, B noktası aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) (1, 5) B) (-1, 2) C) (5, 3)
D) (-1, 5) E) (0, 5)

4. $\vec{A} = (2, k)$, $\vec{B} = (p, -1)$ ve $2\vec{A} - 3\vec{B} = (4, 9)$ veriliyor.

Buna göre, $\overrightarrow{AB}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) (-2, -4) B) (2, 4) C) (-2, 4)
D) (2, -4) E) (2, 9)

5. $\vec{A} = 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ ve $\vec{B} = 6\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ veriliyor.

Buna göre, $2\vec{A} - 3\vec{B}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) (2, 6) B) (-8, 16) C) (-2, -6)
D) (1, 16) E) (6, 1)

6. A(4, -2) ve B(3, m) noktaları veriliyor.

$\overrightarrow{BA}$ birim vektör olduğuna göre, m aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) -2 E) -1

7. $\left. \begin{array}{l} \vec{U} = (6, 3) \\ \vec{V} = (-4, 6) \end{array} \right\}$ veriliyor.

Buna göre, $\langle \vec{U}, \vec{V} \rangle$ skaler çarpımı kaçadır?

- A) -3 B) -4 C) -5 D) -6 E) -7

8. $\left. \begin{array}{l} \vec{V} = (4, -5) \\ \vec{W} = (-1, k) \end{array} \right\}$ veriliyor.

Buna göre, $\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle = 11$ olduğuna göre, k kaçtır?

- A) $-\frac{7}{3}$ B) $-\frac{8}{3}$ C) -3 D) $-\frac{10}{3}$ E) $-\frac{11}{3}$

9. $\vec{X} = p\vec{e}_2$ ve $\vec{Y} = k\vec{e}_1$ veriliyor.

Buna göre, $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle$ skaler çarpımı kaç eşittir?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

10. $\vec{A} = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ ve $\vec{B} = 6\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ veriliyor.

Buna göre, $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ skaler çarpımı kaç eşittir?

- A) 16 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

11. $\|\vec{K}\| = 3$ birim

$$\|\vec{P}\| = 5 \text{ birim}$$

$\vec{K} - \vec{P} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ olduğuna göre, $\langle \vec{K}, \vec{P} \rangle$ skaler çarpımı kaç eşittir?

- A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

12. $\vec{a} + \vec{b} = (2, -4)$

$$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = 10$$

olduğuna göre, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ skaler çarpımı kaç eşittir?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

13. $\vec{A} = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ ve $\vec{B} = 6\vec{e}_1 + n\vec{e}_2$ dik kesiştiğine göre, n kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

14. $\|\vec{A} - \vec{B}\| = \|\vec{A} + \vec{B}\|$ olduğuna göre, $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ skaler çarpımı kaç eşittir?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

15. $\vec{V} = (1, 2)$ ve $\vec{W} = (2, 3)$ vektörleri arasındaki açı α olduğuna göre, $\sin \alpha$ kaç eşittir?

- A) $\frac{5}{\sqrt{65}}$ B) $\frac{4}{\sqrt{65}}$ C) $\frac{3}{\sqrt{65}}$
D) $\frac{2}{\sqrt{65}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{65}}$

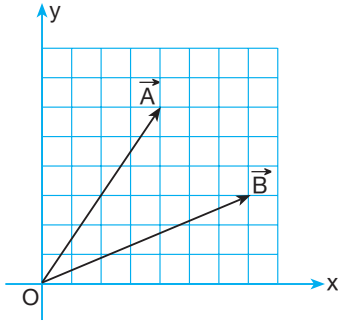
16. $2\vec{A} - \vec{B} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

$$3\vec{A} + \vec{B} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

olduğuna göre, $\vec{A}$ nın Ox ekseni ile yaptığı açı kaç derecedir?

- A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

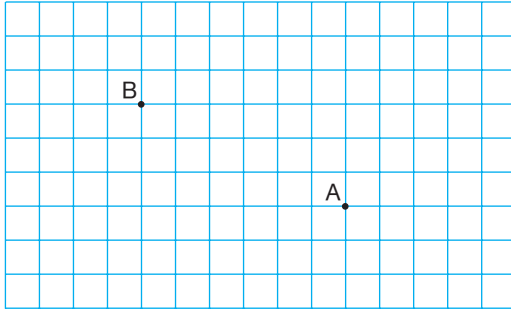
1.



Yukarıdaki zeminde $\vec{A} - \vec{B}$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (6, 4) B) (5, 3) C) (-2, 4)
D) (-5, 3) E) (-3, 3)

2.



Yukarıdaki zeminde $\vec{AB}$ nün konum vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (6, -3) B) (-6, 3) C) (6, 3)
D) (-6, -3) E) (2, 4)

3.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{A} = (5, 2) \\ \vec{B} = (k, 4) \\ \vec{C} = (-1, 3) \end{array} \right\} \text{ veriliyor.}$$

$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle$ olduğuna göre, k kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) -2 E) $-\frac{7}{5}$

$$\left. \begin{array}{l} \|\vec{A}\| = 4 \text{ birim} \\ \|\vec{B}\| = 8 \text{ birim} \\ \vec{A} \perp \vec{B} \end{array} \right\} \text{ veriliyor.}$$

Buna göre, $\|\vec{A} - \vec{B}\| + \|\vec{A} + \vec{B}\|$ toplamı kaçtır?

- A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{5}$
D) $4\sqrt{5}$ E) $8\sqrt{5}$

5. $\langle 3\vec{A}, 2\vec{B} \rangle = 24$ olduğuna göre, $\langle -\vec{A}, 5\vec{B} \rangle$ iç çarpımı kaçtır?

- A) -12 B) -14 C) -16 D) -20 E) -24

$$\left. \begin{array}{l} \|\vec{A}\| = 6 \text{ birim} \\ \|\vec{B}\| = 4 \text{ birim} \\ \vec{A} - \vec{B} = (-2, 7) \end{array} \right\} \text{ olduğuna göre,}$$

$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ iç çarpımı kaçtır?

- A) $-\frac{23}{2}$ B) -12 C) $-\frac{25}{2}$ D) -13 E) $-\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} \|\vec{A}\| = 17 \text{ birim} \\ \vec{A} \parallel \vec{B} \\ \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = -85 \end{array} \right\} \text{ veriliyor.}$$

Buna göre, $\vec{B}$ nün uzunluğu kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

8. Dik koordinat sisteminde,

$$\vec{A} = (-3, 4) \text{ ve } \vec{B} = (4, 3)$$

veriliyor.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $\vec{A} \perp \vec{B}$ dir.
B) $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ lineer bağımsızdır.
C) $\|\vec{A} - \vec{B}\| = \|\vec{A} + \vec{B}\|$ dir.
D) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 0$ dir.
E) $2\|\vec{A}\| = 3\|\vec{B}\|$ dir.

9. $\left. \begin{array}{l} \vec{U} // \vec{W} \\ \vec{U} \perp \vec{P} \end{array} \right\}$ veriliyor.

$\langle (\vec{P} - \vec{W}), \vec{U} \rangle = -48$ ve $\|\vec{U}\| = 3\|\vec{W}\|$ olduğuna göre, $\|\vec{U}\|$ kaç birimdir?

- A) 16 B) 12 C) 11 D) 10 E) 8

10. $\vec{A} = (1, 2)$ vektörü ile aynı yönlü, paralel ve uzunluğu $6\sqrt{5}$ birim olan vektör $\vec{B} = (m, n)$ olduğuna göre, $n - m$ kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$ E) 6

11. $\left. \begin{array}{l} \vec{U} = (-2, 4) \\ \vec{V} = (3, 5) \\ \vec{W} = (2, n) \end{array} \right\}$ veriliyor.

$\vec{UV} \perp \vec{W}$ olduğuna göre, n kaçtır?

- A) -4 B) $-\frac{10}{3}$ C) -2 D) -8 E) -10

12. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ paralel iki vektör olup

$$\left. \begin{array}{l} \|\vec{A}\| = 2 \text{ birim} \\ \|\vec{B}\| = 6 \text{ birim} \end{array} \right\} \text{ veriliyor.}$$

Buna göre, $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ kaç eşit olabilir?

- A) 7 B) 6 C) -6 D) -7 E) -12

13. $\left. \begin{array}{l} \|\vec{A}\| = 6 \text{ birim} \\ \|\vec{B}\| = 8 \text{ birim} \\ \|\vec{C}\| = 7 \text{ birim} \end{array} \right\}$ veriliyor.

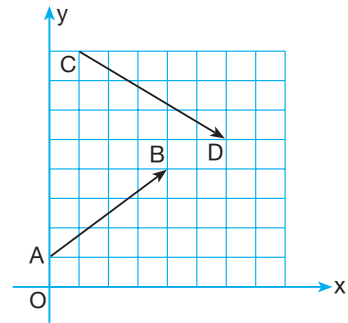
Buna göre, $\|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\|$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14. Köşelerinin koordinatları $A(3, 8)$, $B(1, 2)$ ve $C(-2, 8)$ noktaları olan ABC üçgeninde ABC açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

- 15.



Yukarıdaki zeminde $\langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle$ iç çarpımı kaçtır?

- A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

1. $\left. \begin{array}{l} \vec{A} = (1, 2 + \sqrt{3}) \\ \vec{B} = (2 + \sqrt{3}, 1) \end{array} \right\} \text{ veriliyor.}$

Buna göre, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ arasındaki açı kaç derecedir?

- A) 30 B) 45 C) 60 D) 75 E) 90

2. $\left. \begin{array}{l} (\vec{Y} + \vec{Z}) \perp \vec{X} \\ \vec{X} = \sqrt{3} \vec{Y} \\ \|\vec{Z}\| = 2\|\vec{Y}\| \end{array} \right\} \text{ veriliyor.}$

Buna göre, $\vec{X}$ ve $\vec{Z}$ arasındaki açı kaç derecedir?

- A) 60 B) 75 C) 120 D) 135 E) 150

3. $\left. \begin{array}{l} \vec{A} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{B} = 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_1 \end{array} \right\} \text{ veriliyor.}$

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nin lineer kombinasyonlarından biri değildir?

- A) (6, -3) B) (-2, 1) C) (0, 0)
D) (10, -5) E) (7, 2)

4. $\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (2, 3 - a) \\ \vec{v} = (1, a - 2) \end{array} \right\} \text{ veriliyor.}$

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ leri $\vec{w} = (m, n)$ ne dik olduğuna göre, a kaçtır?

- A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) 3 D) $\frac{10}{3}$ E) $\frac{11}{3}$

5. $\left. \begin{array}{l} \vec{U} = (1, 2) \\ \vec{V} = (4, 3) \end{array} \right\} \text{ veriliyor.}$

Buna göre, $\vec{U}$ nün $\vec{V}$ üzerindeki dik izdüşüm uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\frac{8}{5}$ B) $\frac{9}{5}$ C) 2 D) $\frac{11}{5}$ E) $\frac{12}{5}$

6. $\vec{W} = (3, -4)$ yönündeki birim vektör aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ B) $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ C) $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$
D) $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ E) $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

7. $\vec{A} = (5, 12)$ doğrultusundaki birim vektörler $\vec{C}$ ve $\vec{D}$ olduğuna göre, $\vec{CD}$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $\left(\frac{10}{13}, \frac{24}{13}\right)$ B) $\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$
C) $\left(\frac{-5}{13}, \frac{-12}{13}\right)$ D) $\left(\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$
E) (1, 1)

8. $\left. \begin{array}{l} \vec{A} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \\ \vec{B} = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 \end{array} \right\} \text{ veriliyor.}$

Buna göre, $\vec{A}$ nün $\vec{B}$ üzerindeki dik izdüşüm vektörü nedir?

- A) $\left(\frac{17}{26}, \frac{85}{26}\right)$ B) $\left(\frac{18}{13}, \frac{85}{26}\right)$ C) $\left(\frac{15}{26}, \frac{85}{26}\right)$
D) $\left(\frac{13}{26}, \frac{85}{26}\right)$ E) $\left(\frac{11}{26}, \frac{85}{26}\right)$

9. $\vec{v} = (1, 2)$ vektörünün $2y - 3x - 6 = 0$ doğrusu üzerindeki dik izdüşüm vektörünün uzunluğu kaç birimdir?

A) $\frac{8}{\sqrt{17}}$ B) $\frac{8}{\sqrt{13}}$ C) $\frac{5}{\sqrt{13}}$
D) $\frac{6}{\sqrt{17}}$ E) $\frac{5}{\sqrt{17}}$

10. $\vec{V}$ ile $\vec{W}$ birim vektörleri arasındaki açının ölçüsü 60° olduğuna göre,

$$\langle (\vec{V} - \vec{W}), (2\vec{V} - 3\vec{W}) \rangle$$

skaler çarpımının sonucu kaç eşittir?

A) 4 B) $\frac{7}{2}$ C) 3 D) $\frac{5}{2}$ E) 2

11. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$, $\|\vec{B}\| = 2\sqrt{5}$ birim, $\vec{A} \perp \vec{B}$ olup $\vec{A}$ ile $\vec{C}$ arasındaki açının kosinüsü $\frac{2}{3}$ olduğuna göre, $\|\vec{A}\|$ kaç birimdir?

A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) $\frac{7}{2}$ E) 4

12. $\vec{A} = 2\vec{B}$, $\|\vec{A}\| = \sqrt{3}\|\vec{C}\|$, $\vec{A} \perp (\vec{B} - \vec{C})$ olup $\vec{A}$ ile $\vec{C}$ arasındaki açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

13. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ arasındaki açının ölçüsü 120° dir.

$\|\vec{A}\| = 3$ birim ve $\|\vec{B}\| = 4$ birim olduğuna göre, $\langle (2\vec{A} + \vec{B}), (\vec{A} - 3\vec{B}) \rangle$ skaler çarpımı kaç eşittir?

A) -4 B) -3 C) -2 D) 0 E) 1

14. $\vec{U} = (4 + a, b - 1)$
 $\vec{V} = (3, 1 - b)$ veriliyor.

$\vec{U} \parallel \vec{V}$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) -5 B) -6 C) -7 D) -8 E) -9

15. A(4, -2), B(-1, k) noktaları ile $\vec{V} = (1, -3)$ veriliyor.

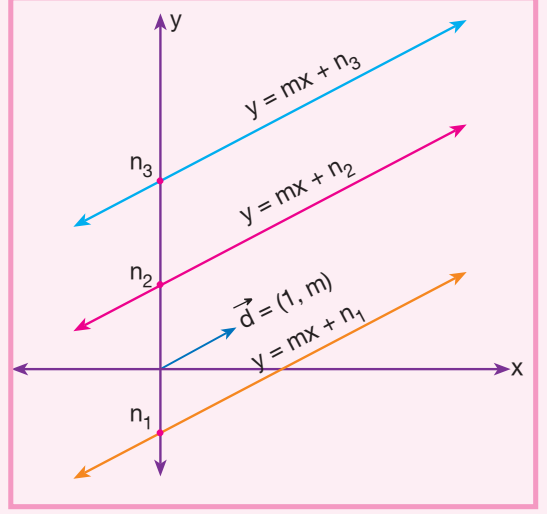
$\langle \vec{AB}, \vec{V} \rangle = 1$ olduğuna göre, k kaç eşittir?

A) -4 B) -5 C) -6 D) -8 E) -9

16. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
 $\vec{b} \perp \vec{c}$
 $\|\vec{a}\| = 2\|\vec{c}\|$ veriliyor.

Buna göre, $\vec{a}$ ile $\vec{c}$ arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{3}$



DOĞRULAR

4. ÜNİTE

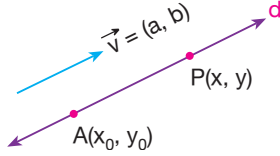
- Bir Doğrunun Vektörel, Parametrik ve Kapalı Denklemleri
- Bir Doğrunun Doğrultman ve Normal Vektörleri
- Bir Doğrunun Bir Düzlemde Ayırdığı Açık ve Kapalı Düzlemler
- İki Doğrunun Birbirine Göre Durumu
- İki Doğru Arasındaki Açık
- Bir Doğrunun Eğimi
- Bir Doğrunun Grafiği
- Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı
- Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

"Matematiksel olarak gösterilemeyen hiçbir araştırma gerçek bilim sayılamaz."

(Leonardo da Vinci)

BİR DOĞRUNUN PARAMETRİK ve KAPALI DENKLEMLERİ

Düzlemde $\vec{v} = (a, b)$ vektörüne paralel olan ve $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen doğru,



şeklinde düşünülürse; $\vec{AP}$ ile $\vec{v}$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür.

Böylece $\vec{AP} // \vec{v}$ yazılabilir.

Paralel vektörler; biri diğerinin bir reel katı olan vektörlerdir.

O halde;

$$\vec{AP} = k \cdot \vec{v}$$

$$\vec{AP} = (x - x_0, y - y_0) \text{ ifadesi}$$

$$\vec{AP} = k \cdot \vec{v} \text{ eşitliğinde yerine yazılırsa;}$$

$$(x - x_0, y - y_0) = k \cdot (a, b) \text{ elde edilir.}$$

Bu denkleme doğrunun **vektörel denklemi** denir.

Bu denklemde bileşenler eşitlenerek,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + k \cdot a \\ y &= y_0 + k \cdot b \end{aligned}$$

elde edilen bu denkleme doğrunun **parametrik denklemi** denir.

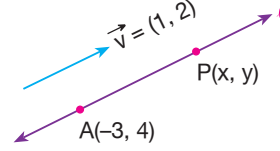
Burada; k ye doğrunun parametresi, $\vec{v}$ vektöründe doğrunun **doğrultu (doğrultman) vektörü** denir.

k ler eşitlenerek bulunan denkleme doğrunun **kapalı denklemi** denir.

ÖRNEK - 1

Düzlemde $\vec{v} = (1, 2)$ vektörüne paralel olup $A(-3, 4)$ noktasından geçen doğrunun parametrik denklemini bulalım.

ÇÖZÜM



ℓ doğrusu üzerinde değişken bir $P(x, y)$ noktası alalım. Bu durumda $\vec{AP} = (x + 3, y - 4)$ ve $\vec{v} = (1, 2)$ vektörleri lineer bağımlıdır, yani biri diğerinin katıdır.

Buradan, $\vec{AP} = k \cdot \vec{v}$ eşitliğinde yazılabilir.

$$(x + 3, y - 4) = k(1, 2)$$

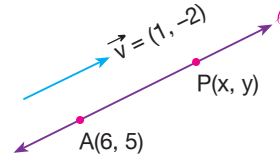
$x = k - 3, y = 2k + 4$ doğrunun parametrik denklemdir.

ÖRNEK - 2

Düzlemde $\vec{v} = (1, -2)$ vektörüne paralel olup $A(6, 5)$ noktasından geçen doğrunun kapalı denklemini bulalım.

ÇÖZÜM

ℓ doğrusu üzerinde bir nokta $P(x, y)$ olsun.



$\vec{AP} // \vec{v}$ olup $k \in \mathbb{R}$ için $\vec{AP} = k \cdot \vec{v}$ yazılabilir.

$$\text{Buradan, } (x - 6, y - 5) = k(1, -2)$$

$$x - 6 = k, y - 5 = -2k$$

k parametreleri yalnız bırakılırsa,

$$k = \frac{x - 6}{1} \text{ ve } k = \frac{5 - y}{2}$$

$$\frac{x - 6}{1} = \frac{5 - y}{2} \Rightarrow 2x + y - 17 = 0 \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK - 3

Vektörel denklemi $(x, y) = (-2, 6) + k(7, 5)$ olarak verilen doğrunun doğrultman vektörünü ve parametresini bulalım.

ÇÖZÜM :

Doğrultman vektörü $\vec{v} = (7, 5)$

Parametresi k dir.

ÖRNEK - 4

Parametrik denklemi,

$$x = 5k - 1$$

$$y = 4k + 4$$

olan doğrunun doğrultman vektörünü bulalım.

ÇÖZÜM :

$x + 1 = 5k$ ve $y - 4 = 4k$ şeklinde yazabiliriz.

Buradan $(x + 1, y - 4) = k(5, 4)$ olup

doğrultman vektörü $\vec{v} = (5, 4)$ dir.

ÖRNEK - 5

$2x - 5y + 1 = 0$ doğrusunun doğrultman vektörünü bulalım.

ÇÖZÜM :

$2x - 5y + 1 = 0$ doğrusunun eğimi $\frac{2}{5}$ olup

doğrultman vektörü $\vec{v} = (5, 2)$ alınabilir.



NOT :

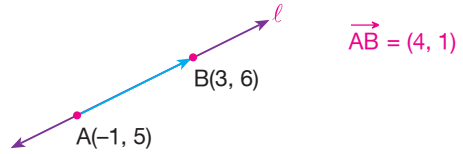
$ax + by + c = 0$ doğrusu ile ilgili,

- Doğrultman vektörü $\vec{v} = (b, -a)$ dir.
- Eğimi $m = -\frac{a}{b}$ dir.
- $a = 0$ ise x eksenine paraleldir.
- $b = 0$ ise y eksenine paraleldir.
- $c = 0$ ise orijinden geçer.

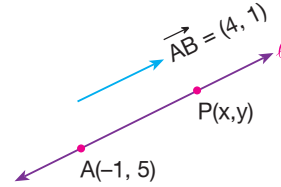
ÖRNEK - 6

$A(-1, 5)$ ve $B(3, 6)$ noktalarından geçen doğrunun vektörel denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :



$\vec{AB}$ doğrunun doğrultman vektörü olarak alınabilir.



$$\vec{AP} = k \cdot \vec{AB}$$

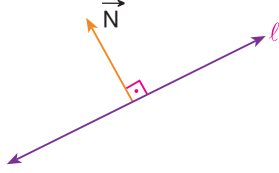
$$(x + 1, y - 5) = k(4, 1)$$

YA DA

$$(x, y) = (-1, 5) + k(4, 1) \text{ bulunur.}$$

Bir Doğrunun Normal Vektörü

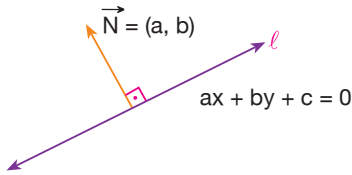
Bir doğruya ya da doğrultusuna dik olan herhangi bir vektördür.



$\vec{N}$: ℓ doğrusunun normal vektörüdür.

$ax + by + c = 0$ doğrusunun normal vektörü

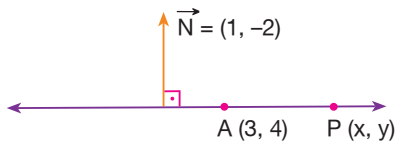
$\vec{N} = (a, b)$ alınabilir.



ÖRNEK - 1

$A(3, 4)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (1, -2)$ vektörüne dik olan doğrunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM



$$\vec{AP} = P - A = (x - 3, y - 4) \text{ ve}$$

$$\vec{AP} \perp \vec{N} \text{ olup}$$

dik iki vektörün skaler çarpımı sıfırdır.

$$\langle \vec{AP}, \vec{N} \rangle = 0 \text{ dir.}$$

Buradan,

$$1(x - 3) - 2(y - 4) = 0$$

$$x - 2y + 5 = 0 \text{ bulunur.}$$

Bir Doğrunun Bir Düzlemde Ayırdığı Açık Ya Da Kapalı Yarı Düzlemler

$$ax + by + c \geq 0$$

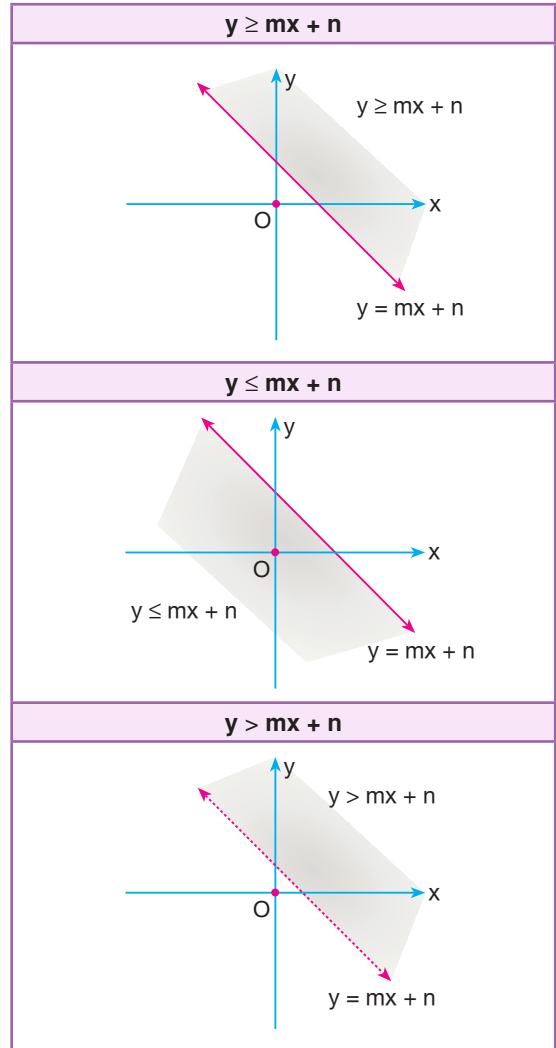
$$ax + by + c \leq 0$$

$$ax + by + c > 0$$

$$ax + by + c < 0$$

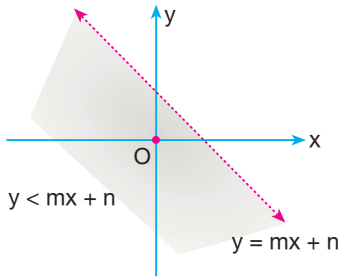
şeklindeki ifadeler analitik düzlemde yarı düzlemler belirtir.

- Bu yarı düzlemleri belirtmek için y yalnız bırakılır.
- Eğer y eşitsizliğin büyük tarafında kalıyorsa doğrunun yukarısı tarandır.
- Eğer y eşitsizliğin küçük tarafında kalıyorsa doğrunun aşağısı tarandır.
- Eşitsizlik $>$ ya da $<$ ile gösteriliyorsa doğru kesikli çizilir.

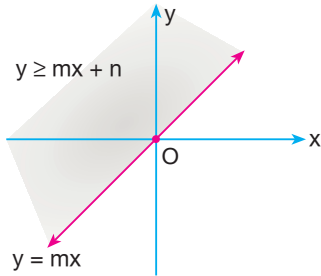




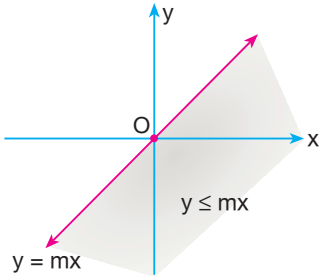
$$y < mx + n$$



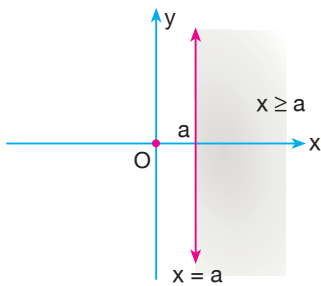
$$y \geq mx$$



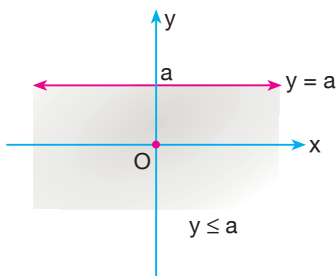
$$y \leq mx$$



$$x \geq a$$



$$y \leq a$$



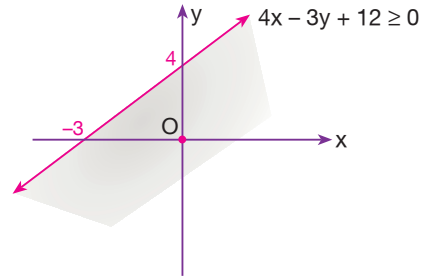
ÖRNEK - 1

$4x - 3y + 12 \geq 0$ eşitsizliğini analitik düzlemde gösterelim.

ÇÖZÜM :

$$x = 0 \text{ için } y = 4$$

$$y = 0 \text{ için } x = -3 \text{ eksenleri kestiği noktalardır.}$$



y yi yalnız bırakalım.

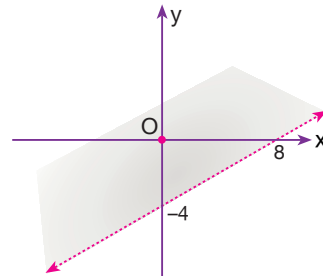
$$y \leq \frac{4x + 12}{3}$$

y eşitsizliğin küçük tarafında kaldığından doğru-
nun alt tarafı taranmıştır.

ÖRNEK - 2

$x - 2y - 8 < 0$ eşitsizliğini analitik düzlemde gösterelim.

ÇÖZÜM :



y yi yalnız bırakalım.

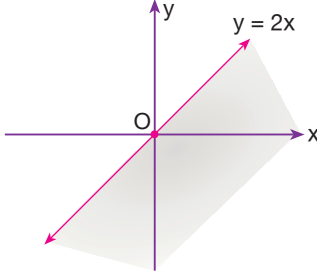
$$y > \frac{x - 8}{2}$$

y eşitsizliğin büyük tarafında kaldığından doğru-
nun üstü taranmıştır.

ÖRNEK - 3

$y - 2x \leq 0$ eşitsizliğini analitik düzlemde gösterelim.

ÇÖZÜM :

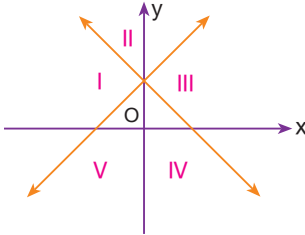


y yi yalnız bırakalım.

$$y \leq 2x$$

y eşitsizliğin küçük tarafında kaldığından doğrunun altı taranmıştır.

ÖRNEK - 4



Denklemleri $x + y = 4$ ve $2x - y = -4$ olan doğruların grafikleri koordinat düzlemini şekildeki gibi bölgelere ayırmıştır.

Buna göre, $x + y < 4$ ve $2x - y < -4$ eşitsizliklerini sağlayan noktalar kümesinin bulunduğu bölgeyi bulalım.

ÇÖZÜM :

$x + y < 4$ doğrusunun alt tarafı, $2x - y < -4$ doğrusunun üst tarafı taranırsa ortak noktalar I. bölgede olur.

Cevap: I

İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

İki doğrunun birbirine göre durumunu belirlemek için doğruların doğrultman vektörleri ya da normal vektörlerini bilmek yeterlidir.

- İki doğru paralel ise doğrultman vektörleri paraleldir ya da çakışiktır.
- İki doğrunun doğrultman vektörleri lineer bağımsız ise bu doğrular kesişen doğrulardır.
- Normal vektörleri lineer bağımlı olan iki doğru paralel ya da çakışiktır.
- Normal vektörleri lineer bağımsız olan iki doğru kesişir.

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ doğruları için,}$$

$$\bullet \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ ise doğrular çakışiktır.}$$

$$\bullet \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \text{ ise doğrular paraleldir.}$$

$$\bullet \quad \vec{v}_1 = (a_1, b_1) \text{ ile } \vec{v}_2 = (a_2, b_2) \text{ lineer bağımsız ise doğrular kesişir. Kesim noktası doğru denklemlerinin ortak çözümü ile bulunur.}$$

ÖRNEK - 1

$$(x, y) = (8, -5) + k_1(2, 6)$$

$$(x, y) = (1, 3) + k_2(-5, 4)$$

doğrularının birbirine göre durumunu bulalım.

ÇÖZÜM :

Verilen doğruların doğrultman vektörleri,

$$\vec{v} = (2, 6) \text{ ve } \vec{u} = (-5, 4) \text{ olup}$$

$$\vec{v} \text{ ile } \vec{u} \text{ lineer bağımsız (doğrultuları farklı)}$$

olduğundan verilen doğrular kesişir.



ÖRNEK - 2

$$8x - 5y + 6 = 0$$

$$5x - 8y + 1 = 0$$

doğrularının birbirine göre durumunu bulalım.

ÇÖZÜM :

Verilen doğruların normal vektörleri,

$$\vec{N}_1 = (8, -5) \text{ ve } \vec{N}_2 = (5, -8) \text{ olup}$$

$\vec{N}_1$ ile $\vec{N}_2$ lineer bağımsız (doğrultuları farklı) olduğundan verilen doğrular kesişir.

ÖRNEK - 3

$$3x - 4y + 5 = 0$$

$$6x - 8y + 10 = 0$$

doğrularının birbirine göre durumunu bulalım.

ÇÖZÜM :

Verilen doğruların normal vektörleri,

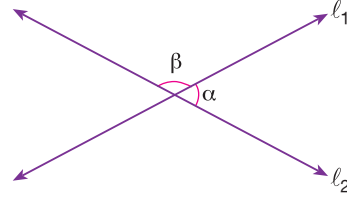
$$\vec{N}_1 = (3, -4) \text{ ve } \vec{N}_2 = (6, -8) \text{ olup}$$

$\vec{N}_1$ ile $\vec{N}_2$ nin lineer bağımlı olduğu görülür.

$$\vec{N}_2 = k \cdot \vec{N}_1 \text{ eşitliğinde } k = 2 \text{ ve } \frac{c_2}{c_1} = \frac{10}{5} = 2$$

olduğundan verilen doğrular çakışıktır.

İki Doğru Arasındaki Aç



$\alpha \leq \beta$ ise α iki doğru arasındaki açı kabul edilir.

Yani iki doğru arasındaki açı dar olan açıdır, diğeri ise bu açının bütünüdür.

İki doğru arasındaki açı bu doğruların doğrultman vektörleri arasındaki dar açıdır.

ÖRNEK - 1

$$y - 2x + 7 = 0$$

$$y + 3x - 8 = 0$$

doğruları arasındaki açının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :

Verilen doğruların doğrultman vektörleri,

$$\vec{v} = (1, 2) \text{ ve } \vec{u} = (1, -3) \text{ olup}$$

doğrultman vektörleri arasındaki açıyı bulalım.

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos \alpha \text{ eşitliğinden,}$$

$$1 - 6 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ve } \alpha = 135^\circ \text{ bulunur.}$$

Öyleyse doğrular arası açı 135° 'nin bütünü 45° 'dir.

ÖRNEK - 2

$$4x - 5y + 6 = 0$$

$$5x + 4y - 12 = 0$$

doğruları arasındaki açı kaç derecedir?

ÇÖZÜM :

Verilen doğruların normal vektörleri,

$$\vec{N}_1 = (4, -5) \text{ ve } \vec{N}_2 = (5, 4) \text{ olup}$$

bu vektörlerin skalar çarpımı,

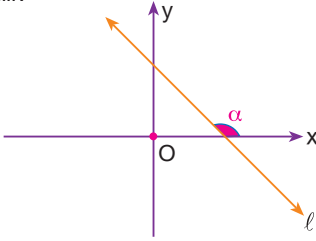
$$\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 4 \cdot 5 + (-5) \cdot 4 = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda vektörler birbirine diktir.

Sonuç olarak verilen doğruların dik kesiştiği söylenebilir.

Bir Doğrunun Eğimi

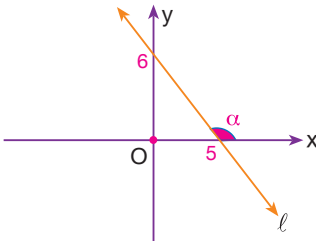
Bir doğrunun x eksenine pozitif yönlü yaptığı açıya **eğim açısı** ve bu açının tanjantına **doğrunun eğimi** denir. m ile gösterilir.



α : l doğrusunun eğim açısı

l doğrusunun eğimi; $m = \tan \alpha$

ÖRNEK - 1

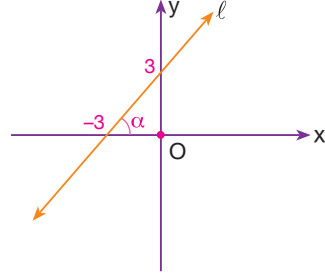


Yukarıdaki l doğrusunun eğimini bulalım.

ÇÖZÜM :

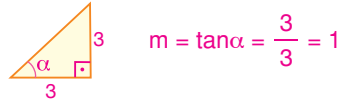
$$\alpha \text{ geniş açı olduğundan, } m = \tan \alpha = -\frac{6}{5}$$

ÖRNEK - 2

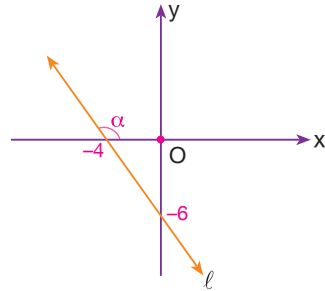


Yukarıdaki l doğrusunun eğimini bulalım.

ÇÖZÜM :

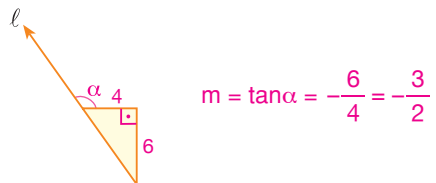


ÖRNEK - 3

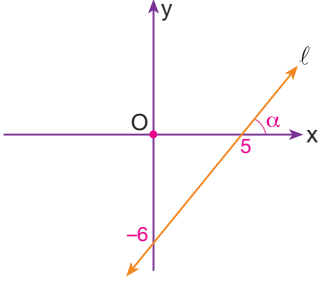


Yukarıdaki l doğrusunun eğimini bulalım.

ÇÖZÜM :



ÖRNEK - 4

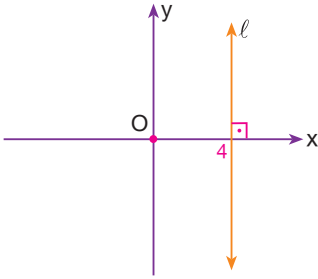


Yukarıdaki l doğrusunun eğimini bulalım.

ÇÖZÜM :

$$m = \tan \alpha = \frac{6}{5}$$

ÖRNEK - 5

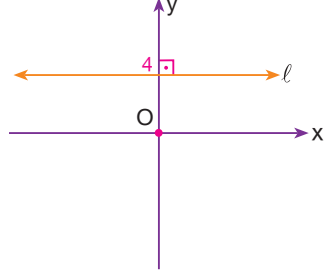


Yukarıdaki l doğrusunun eğimini bulalım.

ÇÖZÜM :

Eğim açısı 90° olup doğru eğimsizdir.

ÖRNEK - 6



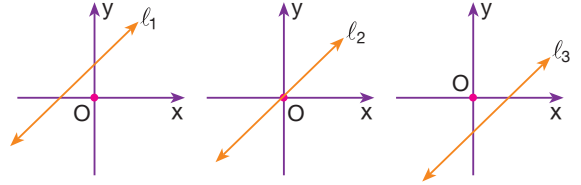
Yukarıdaki l doğrusunun eğimini bulalım.

ÇÖZÜM :

eğim açısı 0° olup $m = \tan 0^\circ = 0$

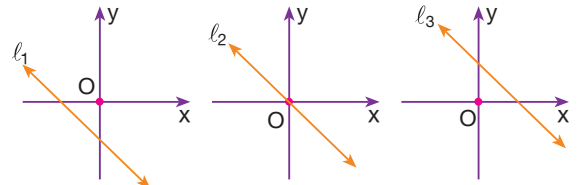
SONUÇLAR :

➤ Bir doğru x ekseninin sağ tarafına yatık ise eğimi pozitiftir.



Yukarıdaki l_1, l_2, l_3 doğrularının eğimleri pozitiftir.

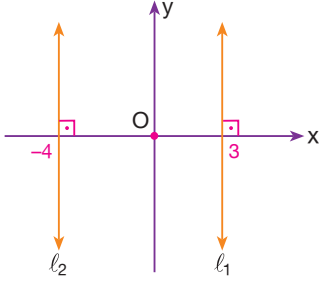
➤ Bir doğru x ekseninin sol tarafına yatık ise eğimi negatiftir.



Yukarıdaki l_1, l_2, l_3 doğrularının eğimleri negatiftir.

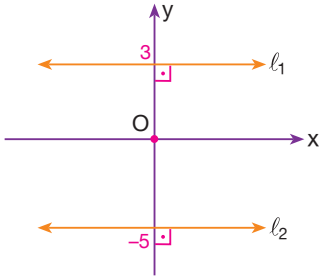


- Bir doğru x eksenine dik ise eğimi yoktur (eğimsizdir).



l_1 ve l_2 doğrularının eğimleri yoktur.

- Bir doğru y eksenine dik ise eğimi sıfırdır.



Yukarıdaki l_1 ve l_2 doğrularının eğimleri sıfırdır.



NOT :

$y = mx + n$ doğrusunun eğimi m dir.

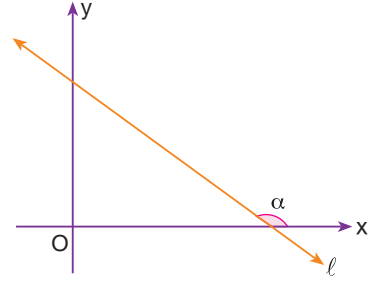
$ax + by + c = 0$ doğrusunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$ dir.

($ax + by + c = 0$ doğrusunun doğrultman vektörü

$\vec{v} = (b, -a)$ dir.)

SONUÇLAR :

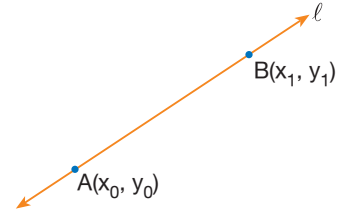
1.



l doğrusunun eğimi

$$m = \tan \alpha$$

2.



l doğrusunun eğimi

$$m = \frac{\text{ordinatlar farkı}}{\text{apsisler farkı}} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

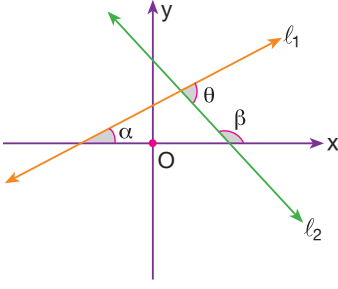
3.

$$l : ax + by + c = 0$$

l doğrusunun eğimi

$$m = -\frac{a}{b}$$

İki Doğru Arasındaki Açı



l_1 doğrusunun eğimi : $m_1 = \tan \alpha$

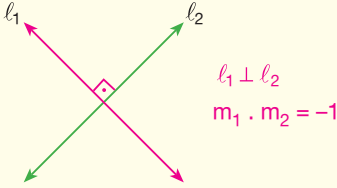
l_2 doğrusunun eğimi : $m_2 = \tan \beta$

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

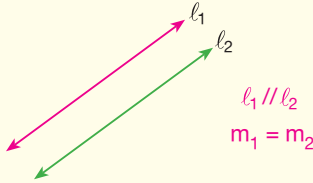


NOT :

İki doğru dik ise eğimleri çarpımı -1 dir.



İki doğru paralel ise eğimler eşittir.



ÖRNEK - 1

$$y = 2x + 11 \text{ ile } y = -3x + 4$$

doğruları arasındaki açının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :

$y = 2x + 4$ doğrusunun eğimi $m_1 = 2$ ve

$y = -3x + 11$ doğrusunun eğimi $m_2 = -3$ tür.

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)} = \frac{5}{-5} = -1 \text{ olup}$$

$\tan \theta = -1 \Rightarrow \theta = 135^\circ$ bulunur.

Bu durumda doğrular arasındaki açının ölçüsü,

$$180^\circ - 135^\circ = 45^\circ \text{ dir.}$$

"Yukarıdaki örneği doğruların doğrultman vektörlerini kullanarak (skaler çarpım) ile çözmeye çalışınız."

ÖRNEK - 2

$$2x - 7y + 3 = 0 \text{ ile } 7x + 2y - 8 = 0$$

doğruları arasındaki açının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :

$$l_1 : 2x - 7y + 3 = 0 \text{ doğrusunun eğimi } m_1 = \frac{2}{7}$$

$$l_2 : 7x + 2y - 8 = 0 \text{ doğrusunun eğimi } m_2 = -\frac{7}{2} \text{ tür.}$$

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{2}{7} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = -1 \text{ olduğundan } l_1 \perp l_2 \text{ olur.}$$

O halde doğrular arasındaki açının ölçüsü 90° dir.

HATIRLATMA

- ✓ İki doğru arasındaki açı dar açıdır.
- ✓ İki doğru arasındaki açı bu doğruların doğrultman vektörleri arasındaki dar açıdır.

HATIRLATMA

- ✓ Doğrultman vektörleri dik olan doğrular dik kesilir.

ÖRNEK - 3

$A(-1, 2)$ noktasından geçen ve $y = 2x + 5$ doğrusuna paralel olan doğrunun kapalı denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

Aranan doğru $y = 2x + 5$ doğrusuna paralel olduğundan eğimi 2 olmalıdır.

O halde denklemi de,

$$y = 2x + n$$

olur ki bu doğru $A(-1, 2)$ noktasından geçtiğine göre noktanın koordinatları denklemi sağlamalıdır.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} y &= 2x + n \\ 2 &= 2(-1) + n \text{ olup} \\ n &= 4 \text{ bulunur} \end{aligned}$$

y yerine 2 yazalım
x yerine -1 yazalım

Böylece istenen doğru $y = 2x + 4$ elde edilir.

ÖRNEK - 4

$A(-5, 4)$ noktasından geçen ve $2y + x - 5 = 0$ doğrusuna dik olan doğrunun kapalı denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

Aranan doğru $2y + x - 5 = 0$

doğrusuna dik olduğundan eğimi 2 olmalıdır.

Eğimi 2 olan doğrunun denklemi

$$y = 2x + n \text{ olup}$$

$A(-5, 4)$ noktasını da sağlayacağından,

Bu durumda,

$$\begin{aligned} y &= 2x + n \\ 4 &= 2(-5) + n \text{ olup} \\ n &= 14 \text{ bulunur} \end{aligned}$$

Böylece istenen doğru $y = 2x + 14$ elde edilir.

Bir Doğrunun Grafiği

$y = mx + n$ doğrusunun grafiği çizilirken;

1. Adım : $y = mx$ çizilir.

2. Adım : $y = mx$, y eksenini doğrultusunda $n > 0$ ise yukarı, $n < 0$ ise aşağı ötelenir.

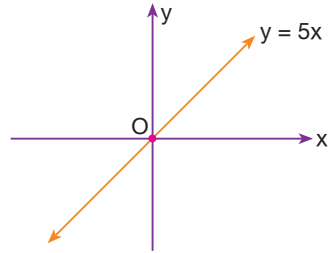
3. Adım : y yerine 0 yazılarak x eksenini kestiği nokta işaretlenir.

ÖRNEK - 1

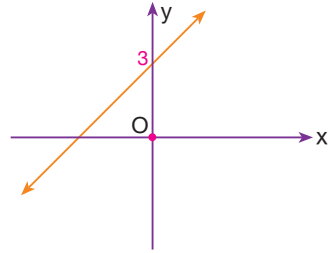
$y = 5x + 3$ doğrusunun grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM :

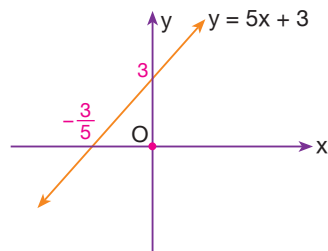
1. Adım : önce $y = 5x$ doğrusunu çizelim.



2. Adım : $y = 5x$ doğrusunu y ekseninde 3 birim yukarı öteleyelim.

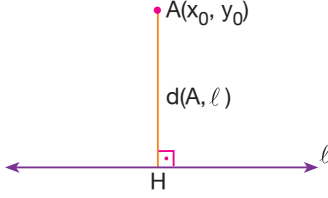


3. Adım : $y = 0$ için $x = -\frac{3}{5}$ bulunur.



Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Dik koordinat sisteminde $A(x_0, y_0)$ noktasının $\ell : ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığı,



$$d(A, \ell) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ ile hesaplanır.}$$

ÖRNEK - 1

$A(2, 5)$ noktasının $\ell : 3x + 4y + 4 = 0$ doğrusuna uzaklığını bulalım.

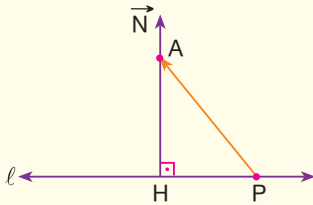
ÇÖZÜM :

$$d(A, \ell) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{30}{5} = 6 \text{ birim bulunur.}$$



NOT :

Bir noktanın bir doğruya uzaklığı vektörel olarak da bulunabilir.



P : Doğru üzerinde herhangi bir nokta

$\vec{N}$: Normal vektör

$$|AH| = d(A, \ell) = \frac{|\langle \vec{PA}, \vec{N} \rangle|}{\|\vec{N}\|}$$

Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

$$\ell_1 : ax + by + c_1 = 0$$

$$\ell_2 : ax + by + c_2 = 0$$

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ ile hesaplanır.}$$

➤ Kesişen iki doğru arasındaki uzaklık 0 birimdir.



NOT :

İki nokta arasındaki uzaklık formülünün uygulanabilmesi için denklemlerde x ve y nin katsayılarının eşit olması gerektiğine dikkat edelim.

ÖRNEK - 1

$$3x + 4y + 8 = 0 \text{ ve } 6x + 8y - 2 = 0$$

doğruları arasındaki uzaklığı bulalım.

ÇÖZÜM :

ℓ_1 doğrusu 2 ile çarpılırsa $6x + 8y + 16 = 0$ elde edilir.

$$\ell_1 : 6x + 8y + 16 = 0$$

$$\ell_2 : 6x + 8y - 2 = 0$$

$$\text{Böylece, } d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|16 - (-2)|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{9}{5} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

$$4x + 3y - 23 = 0 \text{ ve } 2x + y - 6 = 0$$

doğruları arasındaki uzaklığı bulalım.

ÇÖZÜM :

Verilen doğrular kesişen doğrular olduğundan aralarında uzaklık sıfırdır.

1. $A(1, 4)$ noktasından geçen ve $\vec{v} = (-3, 5)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x, y) = (1, 4) + k(4, -5)$
 B) $(x, y) = (1, 4) + k(-4, 5)$
 C) $(x, y) = (1, -4) + k(4, -3)$
 D) $(x, y) = (1, 4) - k(-4, -7)$
 E) $(x, y) = (1, 4) + k(-3, 5)$

2. $\vec{v} = (-4, -3)$ vektörü aşağıdaki doğrulardan hangisinin doğrultman vektörüdür?

A) $5x - 2y + 7 = 0$ B) $3x - 5y - 12 = 0$
 C) $3x - 4y + 4 = 0$ D) $7x - 3y + 1 = 0$
 E) $2x - y = 0$

3. Normal vektörü $\vec{N} = (4, 1)$ olan ve $A(-2, 3)$ noktasından geçen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y + 4x + 5 = 0$ B) $y - 3x - 1 = 0$
 C) $y + x + 2 = 0$ D) $y - 3x + 3 = 0$
 E) $y - 2x - 4 = 0$

4. Vektörel denklemi $(x, y) = (x_0, y_0) + k(2, 3)$ olan doğrunun normal vektörlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(2, 3)$ B) $(-2, -3)$ C) $(-3, -2)$
 D) $(2, -3)$ E) $(3, -2)$

5. $y - 8 = 0$ doğrusunun bir doğrultman vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\vec{a} = (1, 5)$ B) $\vec{b} = (0, 6)$ C) $\vec{c} = (1, 6)$
 D) $\vec{d} = (7, 0)$ E) $\vec{e} = (-5, 4)$

6. $ax + by + c = 0$ doğrusunun normal vektörü $\vec{N} = (2, -7)$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $7a = -2b$ B) $7a = b$ C) $3a = -4c$
 D) $4a = -5b$ E) $a + b = 6$

7. Parametrik denklemi,

$$\begin{aligned} x &= 6k + 8 \\ y &= 2k - 7 \end{aligned}$$

olan doğrunun doğrultman vektörü aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $(2, 7)$ B) $(-2, 7)$ C) $(-3, 2)$
 D) $(3, 1)$ E) $(-3, -2)$

8. Normal vektörleri $\vec{N}_1 = (2, 1)$ ve $\vec{N}_2 = (-3, 1)$ olan iki doğru arasındaki açı kaç derecedir?

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

9. $y - 3x + 1 = 0$ doğrusunun bir parametrik denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x = k + 1$ B) $x = k + 2$ C) $x = k - 2$
 $y = 3k + 2$ $y = 2k - 5$ $y = k + 3$
D) $x = 2k - 4$ E) $x = k$
 $y = 3k - 5$ $y = k - 4$

10. Bir vektörel denklemi $(x-6, y+2) = k(3, 5)$ olan doğrunun parametrik denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $x = 4k + 1$ B) $x = -k + 1$ C) $x = k - 2$
 $y = k - 2$ $y = 3k - 4$ $y = 4k + 1$
D) $x = -k - 4$ E) $x = 3k + 6$
 $y = k - 4$ $y = 5k - 2$

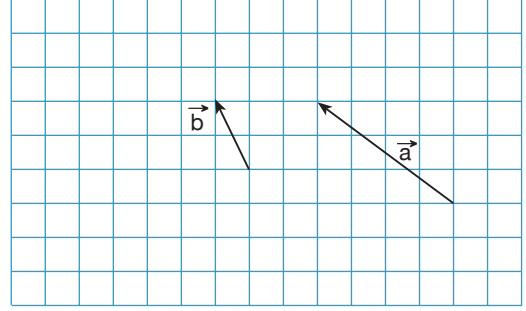
11. A(1, 4) ve B(5, -2) noktalarından geçen doğrunun bir vektörel denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x, y) = (3, 4) + k(-1, 5)$
B) $(x, y) = (1, -6) + k(1, 5)$
C) $(x, y) = (4, 9) + k(-3, 4)$
D) $(x, y) = (3, 1) + k(2, -3)$
E) $(x, y) = (3, -1) + k(2, 4)$

12. Doğrultman vektörleri $\vec{u} = (-3, 2)$ ve $\vec{v} = (6, 9)$ olan iki doğru arasındaki açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 30 B) 45 C) 60 D) 75 E) 90

- 13.



Yukarıdaki zeminde verilen vektörlere göre aşağıdakilerden hangisi $x + y - 13 = 0$ doğrusunun bir doğrultman vektörüdür?

A) $\vec{a} + \vec{b}$ B) $\vec{a} + 2\vec{b}$ C) $2\vec{a} - \vec{b}$
D) $\vec{a} - \vec{b}$ E) $\vec{a} - 2\vec{b}$

14. Analitik düzlemde bir ℓ doğrusuna dik olan doğrunun normal vektörü $\vec{N} = (-2, 3)$ dir.

A(6, 4) noktasından geçen ℓ doğrusunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x, y) = (6, 4) + k(-2, 3)$
B) $(x, y) = (4, 6) + k(2, 3)$
C) $(x, y) = (3, 1) + k(-3, 2)$
D) $(x, y) = (2, 3) + k(1, 3)$
E) $(x, y) = (1, 3) + k(4, -6)$

15. Analitik düzlemde A(3, 7), B(-6, 4) ve C(2, 5) noktaları veriliyor.

A noktasından geçen BC vektörüne paralel olan doğrunun vektörel denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x, y) = (3, 7) + k(2, -8)$
B) $(x, y) = (3, 7) + k(9, 2)$
C) $(x, y) = (3, 7) + k(8, 1)$
D) $(x, y) = (3, 7) + k(1, 2)$
E) $(x, y) = (3, 7) + k(2, 8)$

1. Normal vektörü $\vec{N} = (-3, 2)$ olan ve orijinden geçen doğru üzerindeki bir nokta $A(2, k)$ olduğuna göre, A noktasının k koordinatı kaçtır?

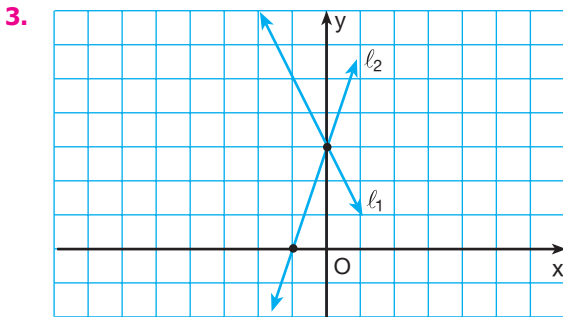
A) -4 B) -3 C) 3 D) 4 E) 6

2. Analitik düzlemde,

$$\begin{aligned} 5x - 12y + 4 &= 0 \\ -5x + 12y + 22 &= 0 \end{aligned}$$

doğruları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2



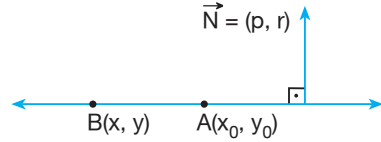
Yukarıdaki zeminde ℓ_1 ve ℓ_2 doğruları arasında kalan açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 75 B) 60 C) 45 D) 30 E) 15

4. İki kenarı $6x + 8y - 3 = 0$ ve $4y + 3x + 15 = 0$ doğruları üzerinde olan karenin çevre uzunluğu kaç birimdir?

A) 3,2 B) 4,8 C) 9,6 D) 13,2 E) 16

- 5.



Yukarıda A ve B noktalarından geçen ve $\vec{N} = (p, r)$ vektörüne dik olan doğrunun denkleminin vektörel ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\langle \vec{AN}, \vec{B} \rangle = 0$ B) $\langle \vec{AB}, \vec{N} \rangle = -1$
C) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 1$ D) $\langle \vec{AB}, \vec{N} \rangle = 0$
E) $\vec{AB} + \vec{N} = 1$

6. $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun vektörel denklemi,

$$(x, y) = A + k(B - A)$$

şeklinde veriliyor.

Buna göre, $k = 1$ için (x, y) noktası ile ilgili aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) A noktası ile B noktasının ortasıdır.
B) A noktası ile çakışıktır.
C) B noktası ile çakışıktır.
D) B noktasının sağındadır.
E) B noktasının solundadır.

7. Parametrik denklemi,

$$\begin{aligned}x &= 3k + 1 \\ y &= 6k + 5\end{aligned}$$

olan doğrunun vektörel denklemi aşağıdaki-
lerden hangisidir?

- A) $(x, y) = (5, 7) + k(1, 2)$
B) $(x, y) = (1, 5) - k(-1, 2)$
C) $(x, y) = (2, 4) + k(2, 1)$
D) $(x, y) = (4, 11) + k(1, 2)$
E) $(x, y) = (5, 1) + k(2, 1)$

8. Kapalı denklemi,

$$\frac{y}{12} - \frac{x}{4} = 1$$

olan doğrunun vektörel denklemi aşağıda-
kilerden hangisi olabilir?

- A) $(x, y) = (1, 9) + k(1, -3)$
B) $(x, y) = (2, 6) + k(-1, 3)$
C) $(x, y) = (0, 12) + k(1, -3)$
D) $(x, y) = (4, 0) + k(2, -6)$
E) $(x, y) = (-4, 0) + k(2, 6)$

9. Dik koordinat sisteminde,

$$y + 2x - 8 \geq 0$$

eşitsizliği için aşağıdaki ifadelerden hangileri
doğrudur?

- I. Kapalı yarı düzlem belirtir.
II. $P(6, 4)$ noktası bu yarı düzleme aittir.
III. $K(2, 5)$ noktası bu yarı düzleme ait değildir.

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) II ve III

10. Vektörel denklemleri,

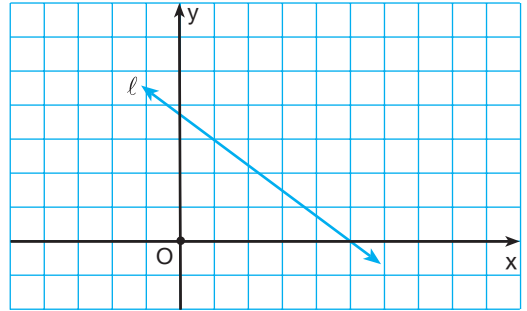
$$(x, y) = (5, 6) + k(1, 3)$$

$$(x, y) = (-2, 4) + k(3, m)$$

doğruları dik kesiştiğine göre, m kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

11.



Yukarıdaki analitik düzlemde ℓ doğrusunun
vektörel denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(x, y) = (1, 3) + k(4, -3)$
B) $(x, y) = (5, 0) - k(1, -2)$
C) $(x, y) = (-2, 5) + k(2, -1)$
D) $(x, y) = (3, 2) + k(5, -7)$
E) $(x, y) = (3, -2) + k(7, -5)$

12. Vektörel denklemleri,

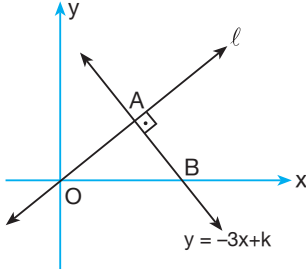
$$(x, y) = (1, 7) + k(-1, 2)$$

$$(x, y) = (-2, 5) + k(1, 3)$$

olan doğrular arasındaki açının ölçüsü kaç
derecedir?

- A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

1.

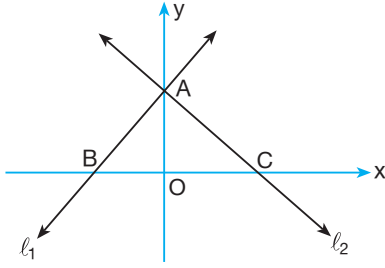


Denklemi $y = -3x + k$ doğrusu ile orijinden geçen ℓ doğrusu dik kesişmektedir.

Buna göre, ℓ doğrusunun kapalı denklemi nedir?

- A) $x = 3y$ B) $x = y$ C) $x - 2y = 0$
D) $2x = y$ E) $3x - 2y = 0$

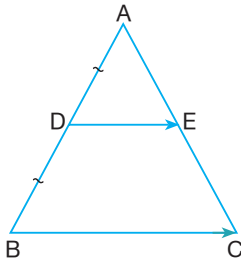
2.



ℓ_1 doğrusunun vektörel denklemi, $(x, y) = (1, 9) + k(1, 3)$ ve $\langle \vec{BA}, \vec{AC} \rangle = 0$ olduğuna göre, C noktasının apsisi kaçtır?

- A) 18 B) 16 C) 15 D) 12 E) 9

3.

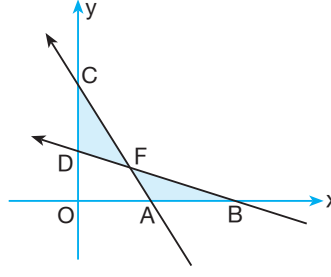


Analitik düzlemde $B(5, 4)$ ve $C(-1, -4)$ noktaları veriliyor. $|AD| = |DB|$

$\vec{DE}$ ile $\vec{BC}$ lineer bağımlı olduğuna göre, $\vec{DE}$ nün uzunluğu kaç birimdir?

- A) 10 B) 8 C) 6 D) 5 E) 3

4.

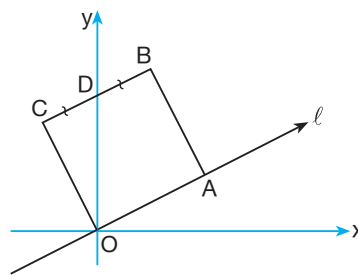


$AC \cap BD = \{F\}$
 $A(3, 0)$
 $B(6, 0)$
 $D(0, 2)$
 $C(0, 4)$

Buna göre, taralı alanlar toplamı kaç br^2 dir?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

5.



ABCO kare
 $|CD| = |DB|$

Buna göre, ℓ doğrusunun doğrultman vektörü aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $\vec{d} = (1, 2)$ B) $\vec{d} = (2, 1)$
C) $\vec{d} = (3, 4)$ D) $\vec{d} = (4, 3)$
E) $\vec{d} = (1, 3)$

6. Analitik düzlemde parametrik denklemi,

$$\begin{aligned} x &= -9k + 13 \\ y &= 8k - 11 \end{aligned}$$

olan doğrunun eğimi kaçtır?

- A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{7}{5}$ E) $-\frac{8}{9}$

7. $(k - 1)x + 3y + 8 = 0$
doğrusu x eksenini ile negatif yönde 150° açı yaptığına göre, k kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$ C) $1 - \sqrt{3}$
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3} - 1$

8. Aşağıdaki doğrulardan hangisinin eğimi en küçüktür?

A) $2y - x - 8 = 0$ B) $2x - 3y - 8 = 0$
C) $y + 3x - 4 = 0$ D) $2y - 3x - 6 = 0$
E) $y + 4x - 9 = 0$

9. Analitik düzlemde $A(-3, 3)$, $B(8, 5)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi nedir?

A) $7y - 3x - 11 = 0$ B) $9x - 5y - 6 = 0$
C) $4y - x - 18 = 0$ D) $5y - 2x + 19 = 0$
E) $11y - 2x - 39 = 0$

10. $y - x + 3 = 0$ ve $\sqrt{3}x + y + 8 = 0$
doğruları arasında kalan dar açı kaç derecedir?

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

11. Analitik düzlemde $A(2, 3)$ noktasından geçen ve Oy eksenine paralel olan doğrunun kapalı denklemi nedir?

A) $x - 4 = 0$ B) $x - 2 = 0$ C) $y - 4 = 0$
D) $2x - 9 = 0$ E) $x - 1 = 0$

12. Analitik düzlemde $A(-3, 5)$ noktasından geçen ve Ox eksenine paralel olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y - 5 = 0$ B) $4x - 6 = 0$ C) $x - 8 = 0$
D) $2x - 9 = 0$ E) $y - x - 14 = 0$

13. $x - y + 8 = 0$ doğrusu üzerindeki $A(x, y)$ noktası $P(1, 2)$ noktasına en yakın noktadır.

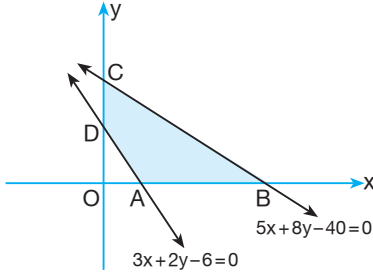
Buna göre, $A(x, y)$ noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1, 3)$ B) $(1, -3)$ C) $(3, 1)$
D) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ E) $\left(-\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$

14. Analitik düzlemde $A(-4, 7)$ noktasından geçen ve eğimi 2 olan doğrunun denklemi nedir?

A) $3y - x - 14 = 0$ B) $4y - x - 16 = 0$
C) $9y - x - 8 = 0$ D) $y - 2x - 15 = 0$
E) $y - 2x + 13 = 0$

1.



Buna göre, A(ABCD) kaç birim karedir?

- A) 12 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

2. A(-1, 3) noktasının $3x + 4y + 6 = 0$ doğrusuna uzaklığı kaç birimdir?

- A)
- $\frac{13}{5}$
- B)
- $\frac{12}{5}$
- C)
- $\frac{11}{5}$
- D) 2 E) 3

3. A(-1, 2) noktasının $4x - 3y - k = 0$ doğrusuna uzaklığı 2 birim olduğuna göre, k'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) 20 B) 10 C) 0 D) -10 E) -20

4. A(-3, k) noktasının $x + y + 9 = 0$ doğrusuna uzaklığı $5\sqrt{2}$ birim olduğuna göre, A noktasının k koordinatının alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) 12 B) 4 C) -1 D) -4 E) -12

5. A(a, 1) noktasının $4x - y + 5 = 0$ doğrusuna uzaklığı $\sqrt{17}$ birim olduğuna göre, A noktasının a koordinatının alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A)
- $\frac{13}{4}$
- B) 2 C) -2 D)
- $-\frac{13}{4}$
- E)
- $-\frac{21}{4}$

6. $x - 3y - \sqrt{10} = 0$ ve $x - 3y + 3\sqrt{10} = 0$ doğruları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

7. ABC ikizkenar dik üçgeninin [BC] hipotenüsü $3x + 4y + 8 = 0$ doğrusu üzerinde olup A(1, 1) olduğuna göre, ABC üçgensel bölgenin alanı kaç birim karedir?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 15

8. A(3, 4) noktasının $4x + 3y + 1 = 0$ doğrusuna uzaklığı kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

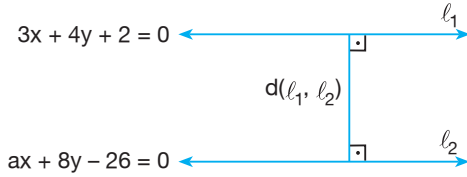
9. Analitik düzlemde $A(4, 4\sqrt{3})$ noktasının orijine uzaklığı kaç birimdir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

10. Analitik düzlemde $A(3, -4)$ noktasının ox eksenine olan uzaklığı kaç birimdir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

11.



Buna göre, l_1 ve l_2 doğruları arasındaki uzaklık $d(l_1, l_2)$ kaç birimdir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

12.

• $A(-4, 6)$

$$\ell \longleftrightarrow 6x + 8y + 11 = 0$$

Buna göre, A noktasının ℓ doğrusuna uzaklığı $d(A, \ell)$ kaç birimdir?

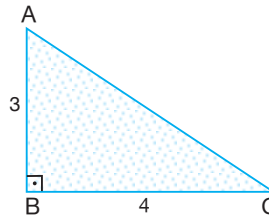
A) 5 B) 4,5 C) 4 D) 3,5 E) 3

13. $\ell_1 \longleftrightarrow 4x + 6y + 3 = 0$
 $\ell_2 \longleftrightarrow$ (dotted line)
 $\ell_3 \longleftrightarrow 8x + 12y + 22 = 0$

$\ell_1 \parallel \ell_2 \parallel \ell_3$ olduğuna göre, ℓ_2 doğrusunun denklemi nedir?

A) $4x + 6y + 7 = 0$ B) $4x + 6y - 13 = 0$
 C) $4x + 6y - 9 = 0$ D) $4x + 8y - 7 = 0$
 E) $4x + 8y - 17 = 0$

14.



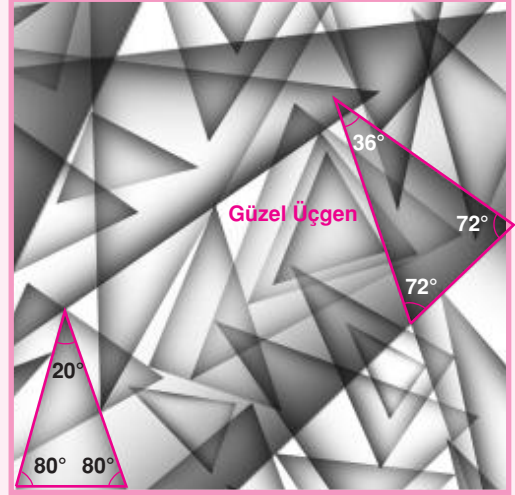
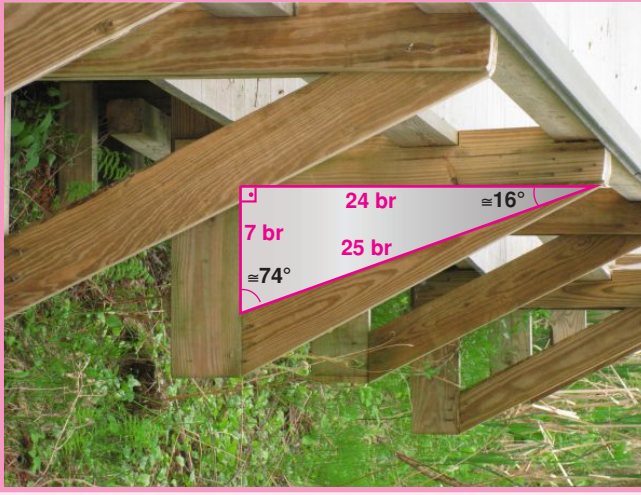
ABC dik üçgen
 $|AB| = 3$ metre
 $|BC| = 4$ metre

Yukarıdaki ABC dik üçgeni şeklindeki zemine bir kenarı 1 metre olan kare şeklindeki fayanslardan üst üste gelmeyecek şekilde en fazla kaç tane döşenebilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

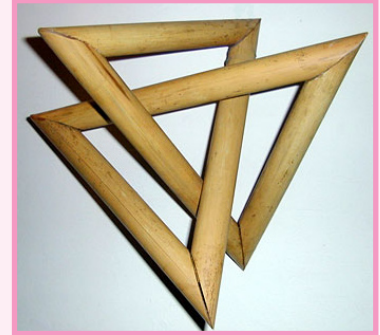
15. Analitik düzlemde $A(1, 3)$ noktasının $y = mx + n$ doğrusuna göre simetrisi olan nokta $B(2, -3)$ olduğuna göre, m kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$



ÜÇGENLER

5. ÜNİTE



- Üçgen Çeşitleri
- Üçgenin Yardımcı Elemanları
- Üçgende Açı Bağıntıları
- Üçgende Açılar ve Kenarları Arasındaki İlişkiler
- Sinüs Teoremi
- Bir Üçgenin Bir Kenarını Belli Bir Oranda Bölen Noktayı Bulma
- İç Açıortay Teoremi
- Dış Açıortay Teoremi
- Üçgende Kenarortay ve Açıortayların Kesim Noktaları
- Bir Üçgensel Bölgenin Alanı
- Carnot Teoremi

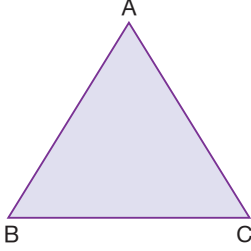
"İnsanoğlunun değeri bir kesirle ifade edilecek olursa; payı gerçek kişiliğini gösterir, paydası da kendisini ne zannettiğini, payda büyüdükçe kesrin değeri küçülür."

(TOLSTOY)

Tanım : Doğrusal olmayan üç nokta, A, B, C olsun.

[AB], [AC] ve [BC] doğru parçalarının birleştirilmesi ile elde edilen şekle **üçgen** denir.

Yani, $\triangle ABC = [AB] \cup [AC] \cup [BC]$



[AB], [AC], [BC] → Kenar

A, B, C → Köşe

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ → Açılar

Üçgenin Temel Elemanları

[AB], [AC], [BC]

A, B, C köşeleri

$\hat{BAC}, \hat{ABC}, \hat{ACB}$

üçgenin temel elemanlarıdır.

ÜÇGEN ÇEŞİTLERİ

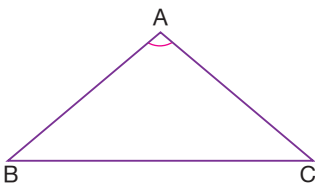
Açılarına göre
üçgenler

- Geniş açılı üçgen
- Dik açılı üçgen
- Dar açılı üçgen

Kenarlarına göre
üçgenler

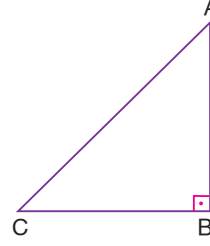
- Çeşitkenar üçgen
- İkizkenar üçgen
- Eşkenar üçgen

Geniş açılı üçgen : Bir açısı geniş açı olan üçgendir.

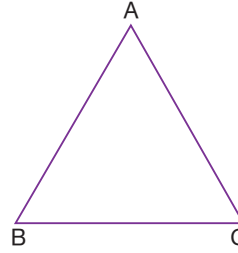


$m(\hat{BAC}) > 90^\circ$

Dik açılı üçgen : Bir açısı 90° olan üçgendir.



Dar açılı üçgen : Tüm açıları dar açı olan üçgendir.

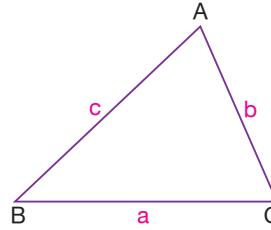


$m(\hat{A}) < 90^\circ$

$m(\hat{B}) < 90^\circ$

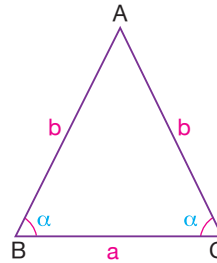
$m(\hat{C}) < 90^\circ$

Çeşitkenar üçgen : Kenar uzunlukları farklı olan üçgendir.



$a \neq b \neq c$

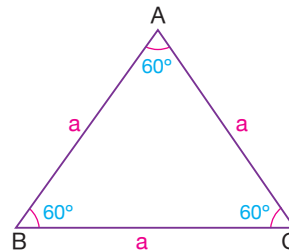
İkizkenar üçgen : İki kenar uzunluğu eşit olan üçgendir.



$\hat{A}$ → Tepe noktası
[BC] → Taban

Taban açıları eşittir.

Eşkenar üçgen : Kenar uzunlukları eşit olan üçgendir.



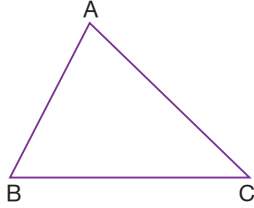
$|AB| = |AC| = |BC|$

ÖRNEK - 1

Bir ABC üçgeninde bir iç açının ölçüsü diğer iki iç açının ölçülerini toplamına eşittir.

Buna göre, bu üçgenin açılara göre adlandırılmasını bulalım.

ÇÖZÜM :



A açısının ölçüsü B ve C açılarının ölçülerini toplamına eşit olsun.

Bu durumda, $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C})$ olur.

Üçgenin iç açıları toplamından,

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ \text{ olup}$$

$$m(\hat{A}) + m(\hat{A}) = 180^\circ$$

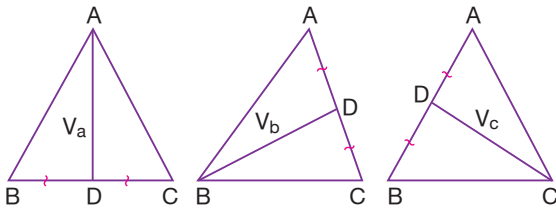
$$m(\hat{A}) = 90^\circ \text{ bulunur.}$$

O halde ABC dik açılı üçgendir.

ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI

Kenarortay :

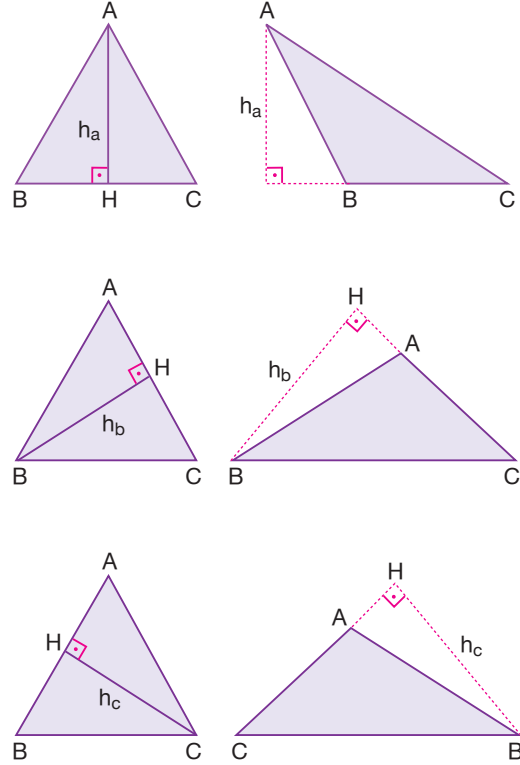
Bir üçgenin herhangi bir köşesini karşı kenarın orta noktasına birleştiren doğru parçasına o kenara ait kenarortay denir. V_a , V_b , V_c ile gösterilir.



Yükseklik :

Bir üçgenin herhangi bir köşesinden karşı kenara ya da karşı kenarın uzantısına indirilen dikmenin köşe ile kenar arasında kalan parçasına yükseklik denir.

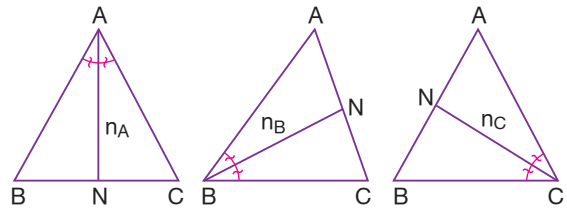
h_a , h_b , h_c ile gösterilir.



Açıortay :

Bir üçgenin herhangi bir açısının ölçüsü iki eşit açıya bölen doğru parçasına o açının açıortayı denir.

n_a , n_b , n_c ile gösterilir.



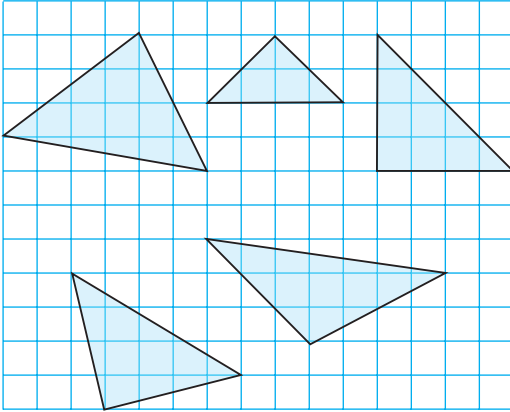
NOT :

Yukarıdaki yardımcı elemanlar birer doğru parçasıdır.

1. Bir üçgenin çizilebilmesi için iki açının yanında en az kaç tane uzunluk verilmelidir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

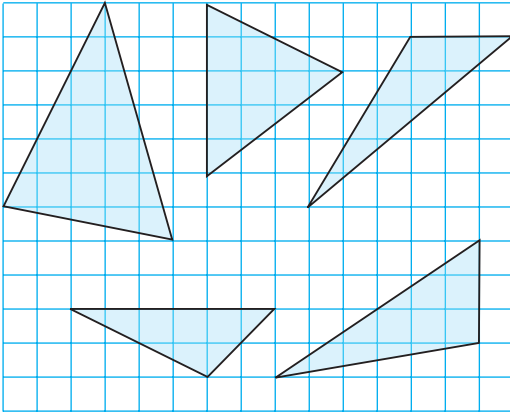
2.



Yukarıdaki üçgenlerden kaç tanesi dik üçgendir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.



Yukarıdaki üçgenlerden kaç tanesi geniş açıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

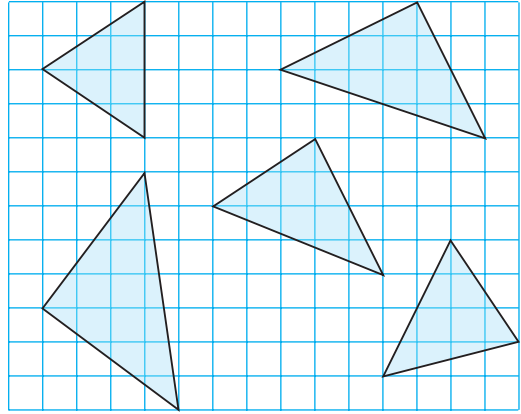
4. Bir ABC üçgeninde,

- Köşe
- Kenar
- Açıortay
- Kenarortay
- Yükseklik

ifadelerinden kaç tanesi yardımcı elemandır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

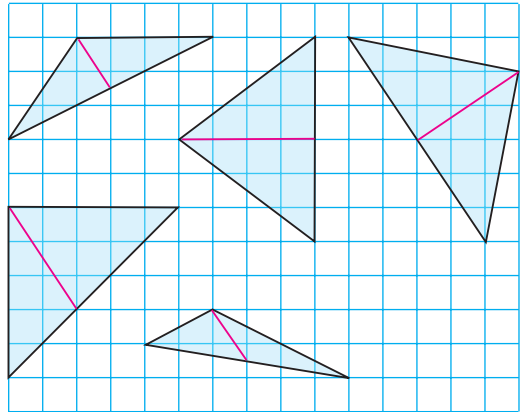
5.



Yukarıdaki üçgenlerden kaç tanesi ikizkenardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

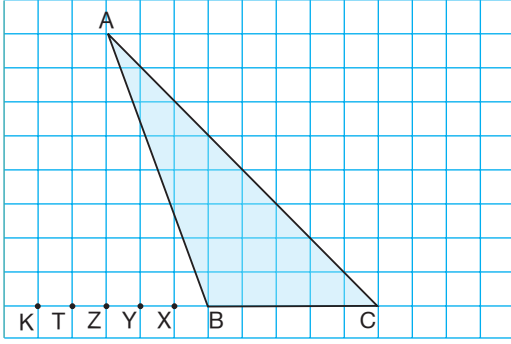
6.



Yukarıdaki üçgenlerden kaç tanesinin kenarortayı doğru çizilmiştir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

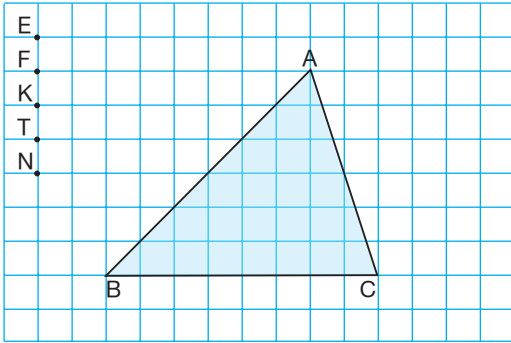
7.



Yukarıdaki ABC üçgeninin [BC] kenarına ait yükseklik ayağı hangi noktaya düşer?

- A) X B) Y C) Z D) T E) K

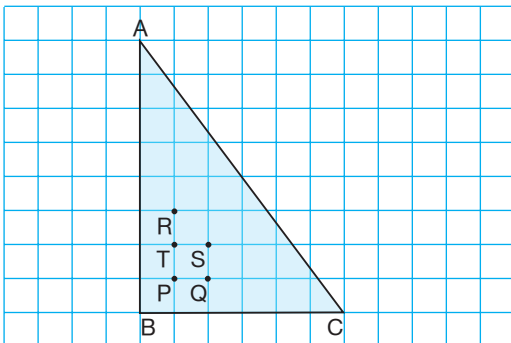
8.



Yukarıdaki ABC üçgeninin [AB] kenarına ait kenarortay doğrusu hangi noktadan geçer?

- A) N B) T C) K D) F E) E

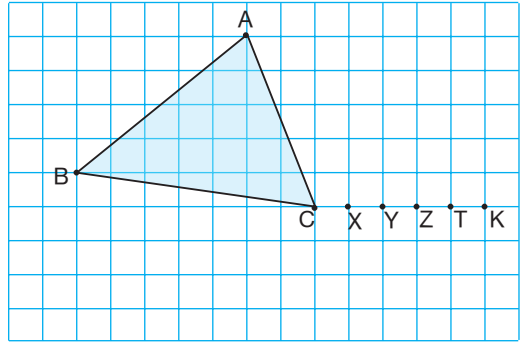
9.



Yukarıdaki ABC üçgeninin ACB açısına ait açıortay doğrusu hangi noktadan geçer?

- A) P B) Q C) R D) S E) T

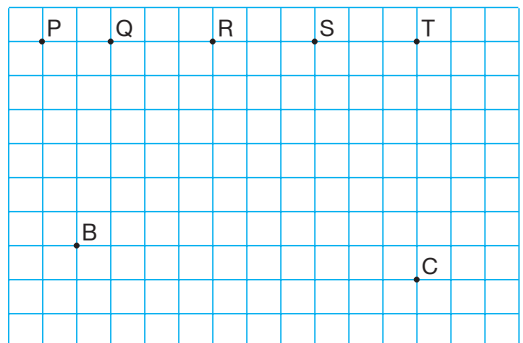
10.



Yukarıdaki ABC üçgeninin dik üçgen olması için C köşesi hangi noktaya kaydırılmalıdır?

- A) X B) Y C) Z D) T E) K

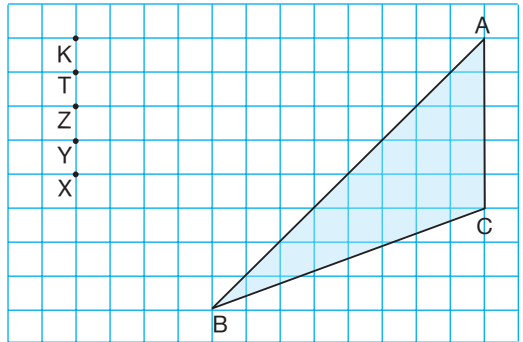
11.



Yukarıdaki zeminde verilen noktalara göre, aşağıdaki üçgenlerden hangisi geniş açılı üçgendir?

- A) $\triangle PBC$ B) $\triangle QBC$ C) $\triangle RBC$
D) $\triangle SBC$ E) $\triangle TBC$

12.

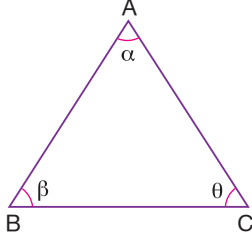


Yukarıdaki ABC üçgeninin [AB] kenarına ait kenarortay doğrusu hangi noktadan geçer?

- A) X B) Y C) Z D) T E) K

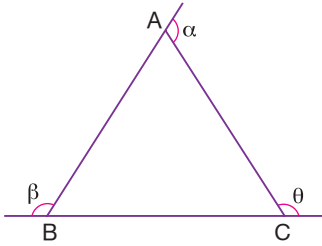
Üçgende Açı Bağıntıları

- Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.



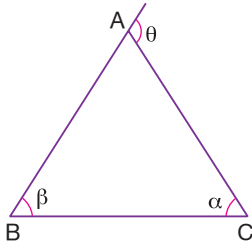
$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$

- Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.



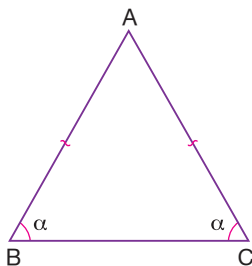
$$\alpha + \beta + \theta = 360^\circ$$

- Bir üçgenin bir dış açısının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açısının ölçülerinin toplamına eşittir.

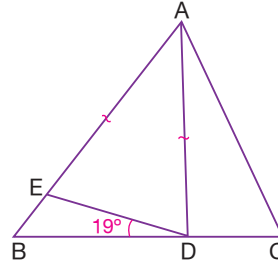


$$\theta = \alpha + \beta$$

- İkizkenar bir üçgenin taban açıları ölçüleri eşittir.



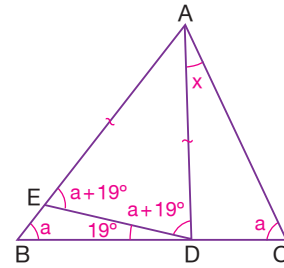
ÖRNEK - 1



ABC üçgen
 $|AE| = |AD|$
 $|AB| = |AC|$
 $m(\widehat{EDB}) = 19^\circ$

Buna göre, DAC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM



$\widehat{ABC}$ nde $|AB| = |AC|$ olduğundan,

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BCA}) = a$ olsun.

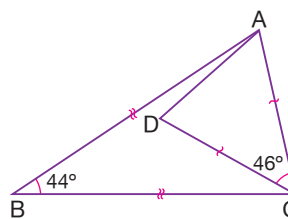
$m(\widehat{AED}) = a + 19^\circ$ ve $|AE| = |AD|$ olduğundan

$m(\widehat{EDA}) = a + 19^\circ$ olur.

$\widehat{ADC}$ nde $x + a = a + 19^\circ + 19^\circ$

$m(\widehat{DAC}) = x = 38^\circ$ bulunur.

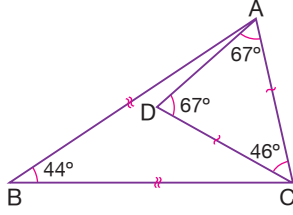
ÖRNEK - 2



ABC üçgen
 $|AB| = |BC|$
 $|AC| = |DC|$
 $m(\widehat{ABC}) = 44^\circ$
 $m(\widehat{ACD}) = 46^\circ$

Buna göre, BAD açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



$\widehat{ADC}$ nde $|AC| = |CD|$ olduğundan,

$$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ADC}) = 67^\circ \text{ ve}$$

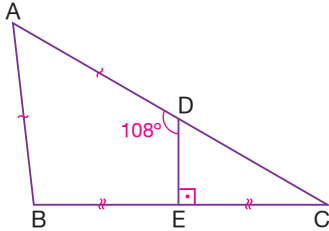
$\widehat{ABC}$ nde $|AB| = |BC|$ olduğundan,

$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = 68^\circ \text{ olur.}$$

Dolayısıyla, $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{BAC}) - m(\widehat{DAC})$

$$x = 68^\circ - 67^\circ \Rightarrow x = 1^\circ \text{ bulunur.}$$

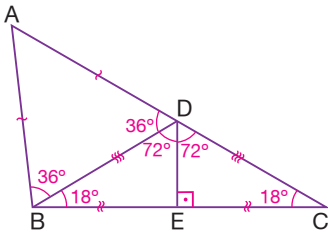
ÖRNEK - 3



ABC üçgen
 $[DE] \perp [BC]$
 $|AB| = |AD|$
 $|BE| = |EC|$
 $m(\widehat{ADE}) = 108^\circ$

Buna göre, ABC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



$[DE]$ hem kenarortay hem de yükseklik olduğundan B ile D noktalarını birleştirirsek BDC ikizkenar üçgeni elde edilir. $[DE]$ aynı zamanda açıortay olur.

$$m(\widehat{ADE}) = 108^\circ \text{ ise } m(\widehat{EDC}) = 72^\circ \text{ olur.}$$

$\widehat{EDC}$ nde $m(\widehat{BCD}) = 18^\circ$ dir.

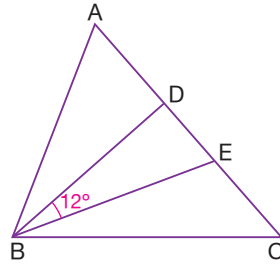
Dolayısıyla $m(\widehat{DBC}) = 18^\circ$, $m(\widehat{BDA}) = 36^\circ$ ve

$|AB| = |AD|$ olduğundan $m(\widehat{ABD}) = 36^\circ$ olur.

$$m(\widehat{ABC}) = 36^\circ + 18^\circ$$

$$m(\widehat{ABC}) = 54^\circ \text{ bulunur.}$$

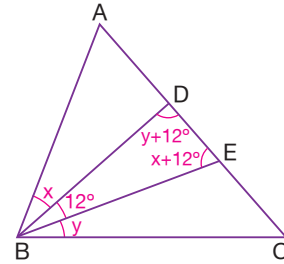
ÖRNEK - 4



ABC üçgen
 $|AE| = |AB|$
 $|BC| = |CD|$
 $m(\widehat{DBE}) = 12^\circ$

Buna göre, ABC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



$$m(\widehat{ABD}) = x \text{ ve } m(\widehat{EBC}) = y \text{ olsun.}$$

$|AE| = |AB|$ olduğundan $m(\widehat{BEA}) = x + 12^\circ$ ve

$|BC| = |CD|$ olduğundan $m(\widehat{BDC}) = y + 12^\circ$ olur.

$$\widehat{BDE} \text{ nde } 12^\circ + x + 12^\circ + y + 12^\circ = 180^\circ$$

$$x + y = 144^\circ \text{ dir.}$$

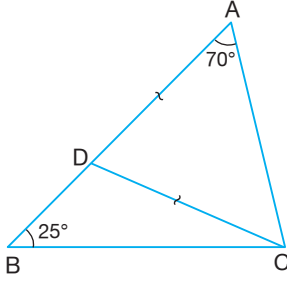
Dolayısıyla,

$$m(\widehat{ABC}) = x + y + 12^\circ$$

$$m(\widehat{ABC}) = 144^\circ + 12^\circ$$

$$m(\widehat{ABC}) = 156^\circ \text{ bulunur.}$$

1.

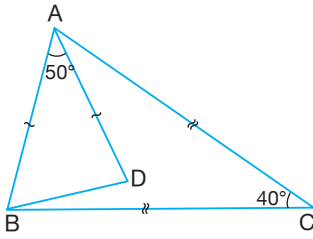


ABC üçgen
 $m(\widehat{ABC}) = 25^\circ$
 $m(\widehat{BAC}) = 70^\circ$
 $|AD| = |DC|$

Buna göre, $m(\widehat{BCD})$ kaç derecedir?

- A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

2.

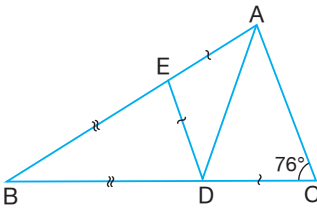


ABC üçgen
 $m(\widehat{BAD}) = 50^\circ$
 $m(\widehat{ACB}) = 40^\circ$
 $|AC| = |BC|$
 $|AB| = |AD|$

Buna göre, $m(\widehat{DBC})$ kaç derecedir?

- A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

3.

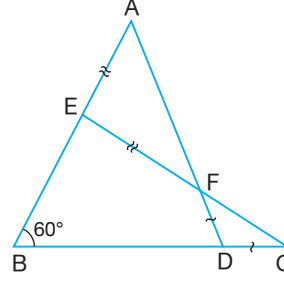


ABC üçgen
 $m(\widehat{ACB}) = 76^\circ$
 $|AE| = |ED| = |DC|$
 $|BE| = |BD|$

Buna göre, $m(\widehat{DAE})$ kaç derecedir?

- A) 23 B) 28 C) 33 D) 38 E) 48

4.

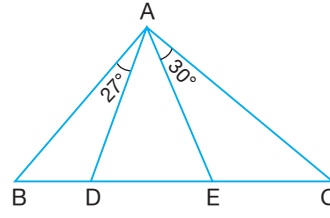


ABD üçgen
 EBC üçgen
 $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$
 $|AE| = |EF|$
 $|FD| = |DC|$

Buna göre, $m(\widehat{BEC})$ kaç derecedir?

- A) 65 B) 70 C) 75 D) 80 E) 65

5.

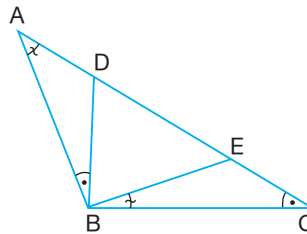


ABC üçgen
 $m(\widehat{BAD}) = 27^\circ$
 $m(\widehat{EAC}) = 30^\circ$
 $|AB| = |BE|$
 $|AC| = |CD|$

Buna göre, $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

- A) 87 B) 90 C) 98 D) 102 E) 107

6.

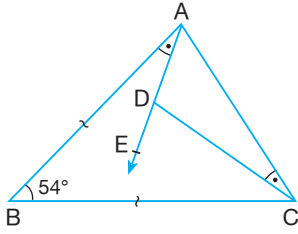


ABC üçgen
 $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EBC})$
 $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ECB})$
 $m(\widehat{ABC}) = 102^\circ$

Buna göre, $m(\widehat{EBD})$ kaç derecedir?

- A) 24 B) 30 C) 36 D) 42 E) 48

7.

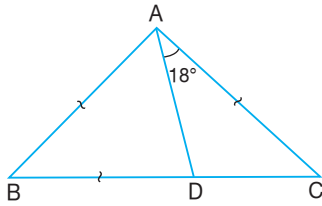


ABC üçgen
 $|AB| = |BC|$
 $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{ACD})$
 $m(\widehat{ABC}) = 54^\circ$

Buna göre, $m(\widehat{EDC})$ kaç derecedir?

- A) 38 B) 52 C) 63 D) 70 E) 87

8.

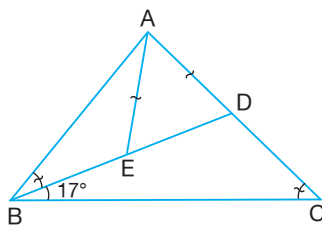


ABC üçgen
 $|AC| = |BA| = |BD|$
 $m(\widehat{DAC}) = 18^\circ$

Buna göre, $m(\widehat{BAD})$ kaç derecedir?

- A) 48 B) 56 C) 66 D) 72 E) 78

9.

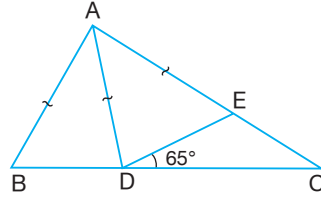


ABC üçgen
 $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ACB})$
 $m(\widehat{DBC}) = 17^\circ$
 $|AD| = |AE|$

Buna göre, $m(\widehat{BAE})$ kaç derecedir?

- A) 17 B) 20 C) 23 D) 26 E) 34

10.

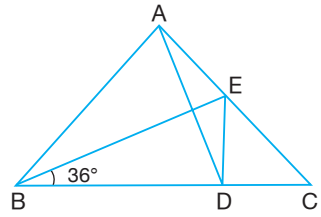


ABC üçgen
 $|AB| = |AD| = |AE|$
 $m(\widehat{EDC}) = 65^\circ$

Buna göre, $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

- A) 65 B) 80 C) 85 D) 115 E) 130

11.

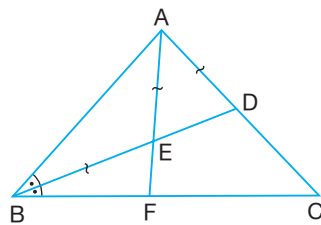


ABC üçgen
 $m(\widehat{CBE}) = 36^\circ$
 $|AB| = |BE| = |BD|$

Buna göre, $m(\widehat{DAC})$ kaç derecedir?

- A) 10 B) 15 C) 18 D) 20 E) 36

12.



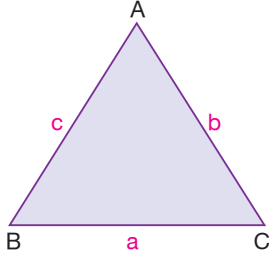
ABC üçgen
 $[BD]$ açıortay
 $|AE| = |EB| = |AD|$

Buna göre, $\frac{m(\widehat{AFC})}{m(\widehat{ACF})}$ oranı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

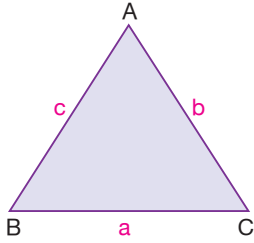
Üçgende Açılar ve Üçgenin Kenarları Arasındaki İlişkiler

➤ Bir ABC üçgeninde,



$$a > b > c \Rightarrow m(\hat{A}) > m(\hat{B}) > m(\hat{C})$$

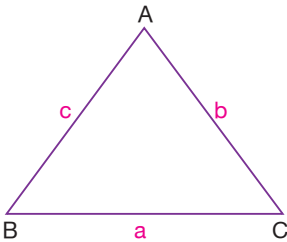
➤ Bir üçgenin herhangi bir kenarının uzunluğu, diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük, farkının mutlak değerinden büyüktür.



$$\left. \begin{array}{l} |b - c| < a < b + c \\ |a - c| < b < a + c \\ |a - b| < c < a + b \end{array} \right\} \text{üçgen eşitsizliği}$$

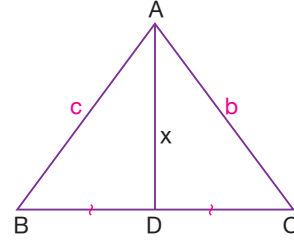
SONUÇLAR:

1.



b ve c tamsayı ve $b < c$ ise a'nın $2b - 1$ tane tamsayı değeri vardır.

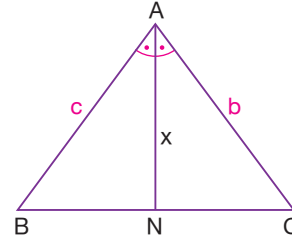
2.



ABC üçgen, [AD] kenarortay

$$\frac{|b - c|}{2} < x < \frac{b + c}{2}$$

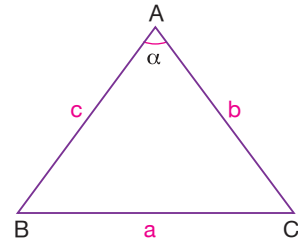
3.



ABC üçgen, [AN] açıortay ise

$$0 < x < \frac{2bc}{b + c}$$

4.



$$\alpha < 90^\circ \text{ ise } a^2 < b^2 + c^2$$

$$\alpha > 90^\circ \text{ ise } a^2 > b^2 + c^2$$

$$\alpha = 90^\circ \text{ ise } a^2 = b^2 + c^2$$

5. Bir üçgenin dış açıların ölçüleri α , β , θ ise

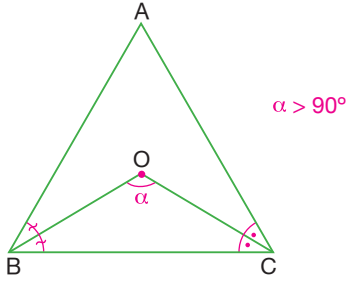
$$|\beta - \theta| < \alpha < \beta + \theta$$

$$|\alpha - \theta| < \beta < \alpha + \theta$$

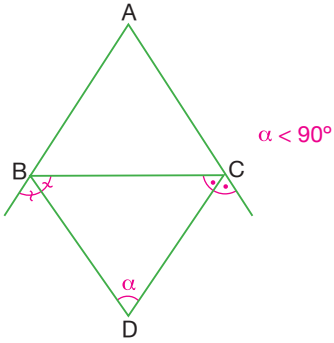
$$|\alpha - \beta| < \theta < \alpha + \beta$$

Aşağıdaki şekillerde elde edilen sonuçları irdelemeye çalışınız.

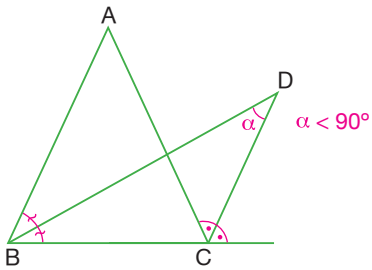
1



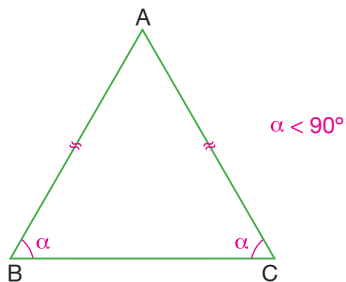
2



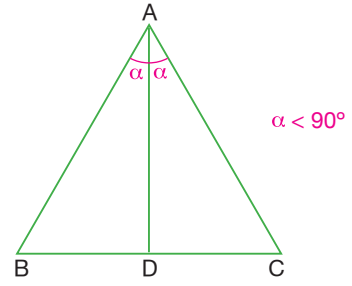
3



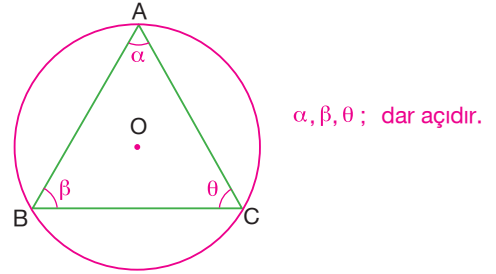
4



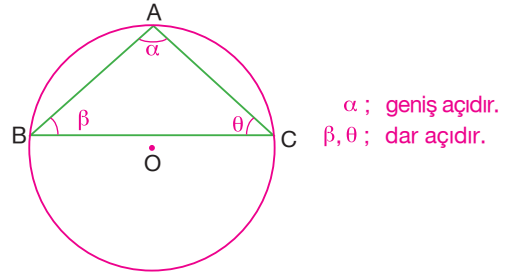
5



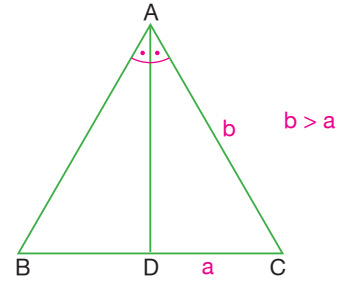
6



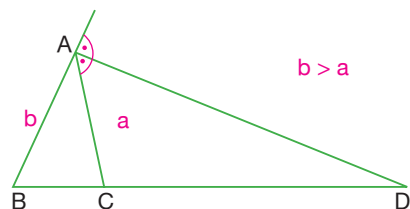
7



8

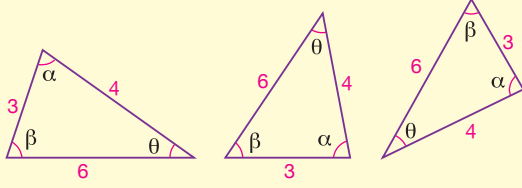


9

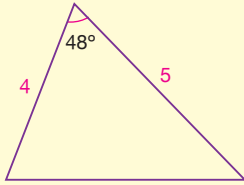


Üçgende Uygulamalar

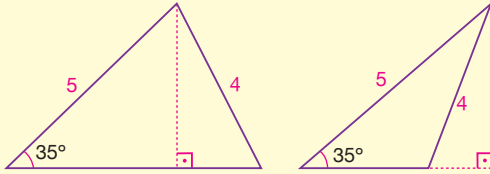
- Üç kenar uzunluğu belli olan yalnız bir üçgen vardır.



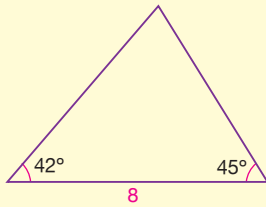
- İki kenar uzunluğu ve arasındaki açısı bilinen yalnız bir üçgen vardır.



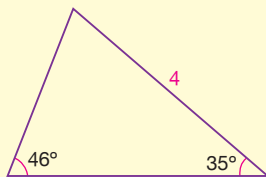
- İki kenarı ve bu kenarlar arasında olmayan açısı verilen birden fazla üçgen vardır.



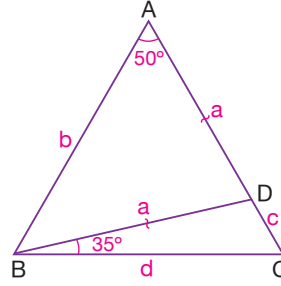
- Bir kenarı ve bu kenara ait iki açısı verilen yalnız bir üçgen vardır.



- İki açısı ve bunlardan birinin karşısındaki kenarı verilen yalnız bir üçgen vardır.



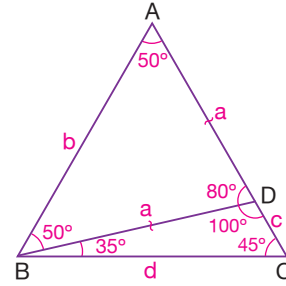
ÖRNEK - 1



ABC üçgen
 $|AD| = |DB|$
 $m(\widehat{BAD}) = 50^\circ$
 $m(\widehat{DBC}) = 35^\circ$
 $|AD| = |DB| = a$
 $|AB| = b$
 $|DC| = c$
 $|BC| = d$

Buna göre, a, b, c, d uzunlukları arasındaki ilişkiyi bulalım.

ÇÖZÜM



$\triangle ABD$ nde $|AD| = |BD|$ olduğundan,

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ABD}) = 50^\circ$ olur.

Dolayısıyla,

$m(\widehat{ADB}) = 80^\circ$

$m(\widehat{BDC}) = 100^\circ$

$m(\widehat{ACB}) = 45^\circ$ dir.

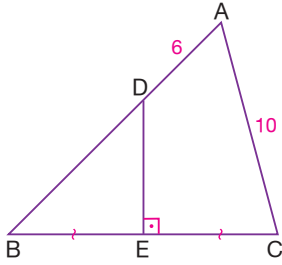
$\triangle ABD$ nde $m(\widehat{BAD}) < m(\widehat{ADB})$ olduğundan, $a < b$ dir.

$\triangle BDC$ nde $m(\widehat{DBC}) < m(\widehat{BCA}) < m(\widehat{BDC})$ olduğundan, $c < a < d$ dir.

$\triangle ABC$ nde $m(\widehat{ACB}) < m(\widehat{BAC})$ olduğundan, $b < d$ dir.

Dolayısıyla, $c < a < b < d$ olur.

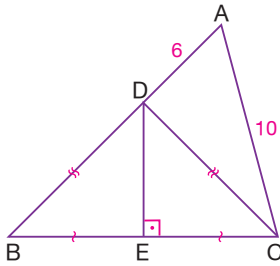
ÖRNEK - 2



ABC üçgen
 $[DE] \perp [BC]$
 $|BE| = |EC|$
 $|AD| = 6$ birim
 $|AC| = 10$ birim

Buna göre, $|BD|$ nin alabileceği en büyük ve en küçük tamsayı değerleri toplamını bulalım.

ÇÖZÜM



D ve C noktaları birleştirildiğinde oluşan $\triangle BDC$ nde $[DE]$ hem yükseklik hem de kenarortay olduğundan $|BD| = |DC|$ olur.

$\triangle ADC$ nde üçgen eşitsizliği yaparsak,

$$10 - 6 < |DC| < 10 + 6$$

$$4 < |BD| < 16$$

$$|BD| \in \{5, 6, 7, 8, \dots, 14, 15\}$$

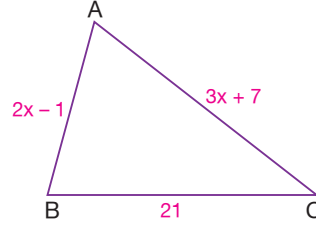
Dolayısıyla $|BD|$ nin alabileceği;

En küçük tamsayı değeri : 5 birim

Büyük tamsayı değeri : 15 birim dir.

Toplam : $5 + 15 = 20$ birim bulunur.

ÖRNEK - 3



ABC üçgen
 $|AB| = (2x - 1)$ birim
 $|AC| = (3x + 7)$ birim
 $|BC| = 21$ birim

Yukarıdaki verilere göre,

- a) $x \in \mathbb{Z}$ ise $\triangle ABC$ nin alabileceği kaç değer vardır?
- b) $\triangle ABC$ nin alabileceği kaç tamsayı değeri vardır?

sorularının cevaplarını bulalım.

ÇÖZÜM

Üçgen eşitsizliğinden :

$$(3x + 7) - (2x - 1) < 21 < (3x + 7) + (2x - 1)$$

$$x + 8 < 21 < 5x + 6$$

$$x + 8 < 21$$

$$x < 13 \dots ①$$

$$21 < 5x + 6$$

$$15 < 5x$$

$$3 < x \dots ②$$

① ve ② den $3 < x < 13$ bulunur.

- a) $x \in \mathbb{Z}$ olduğundan x kaç farklı tamsayı değeri

alır? $\triangle ABC$ de o kadar değer alır.

Yani, $13 - 3 - 1 = 9$ tanedir.

- b) $\triangle ABC = (3x + 7) + (2x - 1) + 21$

$$= 5x + 27 \text{ olup}$$

$$3 < x < 13$$

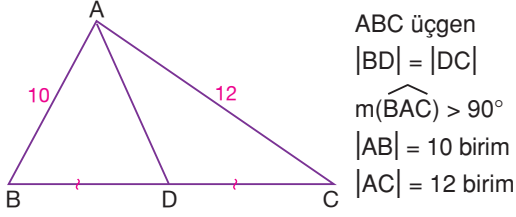
$$\Rightarrow 15 < 5x < 65$$

$$\Rightarrow 42 < 5x + 27 < 92$$

Dolayısıyla, $42 < \triangle ABC < 92$ dir.

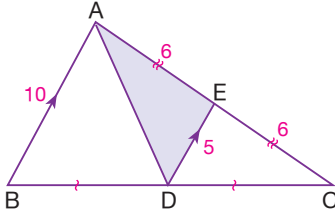
Yani $\triangle ABC$, $92 - 42 - 1 = 49$ tamsayı değeri alır.

ÖRNEK - 4



Buna göre, $|AD|$ nin alabileceği tamsayı değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM



$\triangle ABC$ nde D noktasından $[AB]$ ye paralel olacak şekilde $[DE]$ çizilirse,

$$|AE| = |EC| = 6 \text{ birim}$$

$$|DE| = 5 \text{ birim}$$

$$m(\widehat{AED}) < 90^\circ \text{ dir.}$$

$$\triangle AED \text{ nde } 6 - 5 < |AD| < 6 + 5$$

$$1 < |AD| < 11 \dots \textcircled{1}$$

$$|AD|^2 < 5^2 + 6^2$$

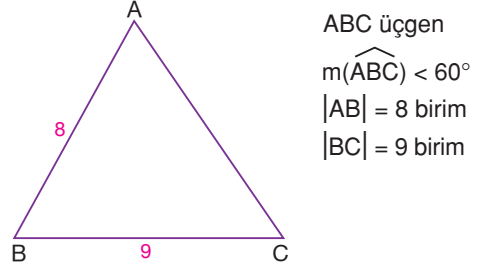
$$|AD| < \sqrt{61}$$

$$|AD| < 7, \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ den $1 < |AD| \leq 7$ bulunur.

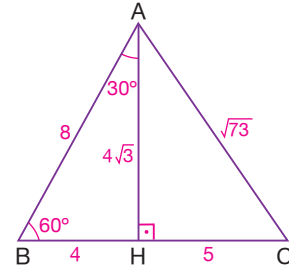
Dolayısıyla, $|AD|$ nun $7 - 1 = 6$ tane tamsayı değeri vardır.

ÖRNEK - 5



Buna göre, $|AC|$ nin alabileceği tamsayı değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM



$$m(\widehat{ABC}) = 60^\circ \text{ olsaydı,}$$

$[AH]$ dikmesi çizildiğinde $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni oluşur.

$$|BH| = 4 \text{ birim}$$

$$|AH| = 4\sqrt{3} \text{ birim}$$

$$|AC| = \sqrt{73} \text{ birim olurdu.}$$

Fakat $m(\widehat{ABC}) < 60^\circ$ olduğundan,

$$|AC| < \sqrt{73} \text{ birim olur.}$$

$$\text{Yani, } |AC| < 8, \dots \textcircled{1}$$

$$\triangle ABC \text{ nde } 9 - 8 < |AC| < 9 + 8$$

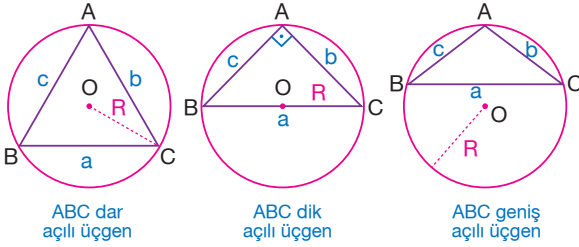
$$1 < |AC| < 17 \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ den $1 < |AC| \leq 8, \dots$ bulunur.

Dolayısıyla, $|AC|$ nun $8 - 1 = 7$ tane tamsayı değeri vardır.

Sinüs Teoremi

Bir üçgenin köşelerinden geçen çembere o üçgenin **çevrel çemberi** denir.

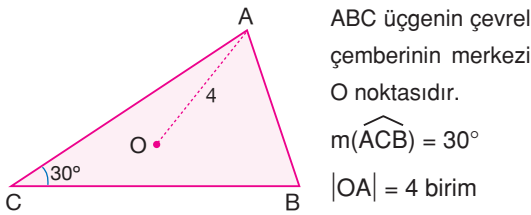


Kenar uzunlukları a, b, c , iç açılarının ölçüleri $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ ve çevrel çemberinin yarıçapı R olan bir üçgende,

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \text{ eşitliği yazılabilir.}$$

Bu eşitliğe **sinüs teoremi** denir.

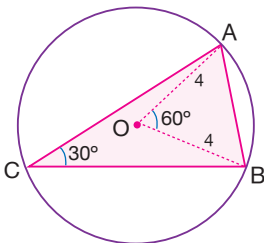
ÖRNEK - 1



ABC üçgenin çevrel çemberinin merkezi O noktasıdır.
 $m(\hat{ACB}) = 30^\circ$
 $|OA| = 4$ birim

Buna göre, $|AB|$ uzunluğunu hesaplayalım.

ÇÖZÜM

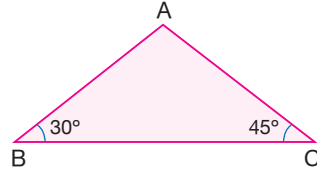


$\hat{ABC}$ nin çevrel çemberi çizilirse,
 $|OA| = 4$ birim
 $|OB| = 4$ birim olur.

$m(\hat{ACB}) = 30^\circ$ ise $m(\hat{AOB}) = 60^\circ$ olur.

Böylece AOB eşkenar üçgen olup $|AB| = 4$ br bulunur.

ÖRNEK - 2



ABC üçgen
 $m(\hat{ABC}) = 30^\circ$
 $m(\hat{ACB}) = 45^\circ$

Buna göre, $\frac{|AB|}{|AC|}$ oranını bulalım.

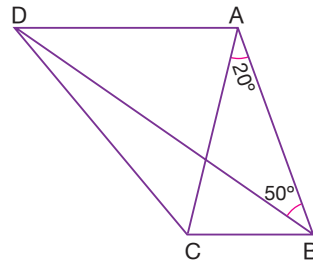
ÇÖZÜM

Sinüs teoreminden;

$$\frac{|AC|}{\sin 30^\circ} = \frac{|AB|}{\sin 45^\circ} \text{ yazılabilir.}$$

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

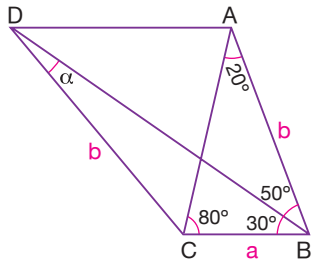
ÖRNEK - 3



ABCD dörtgen
 $|AB| = |AC| = |CD|$
 $m(\hat{BAC}) = 20^\circ$
 $m(\hat{ABD}) = 50^\circ$

Buna göre, BDC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM



Sinüs teoremi ile,
 ABC üçgeninde,

$$\frac{a}{\sin 20^\circ} = \frac{b}{\sin 80^\circ}$$

DBC üçgeninde,

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin 30^\circ}$$

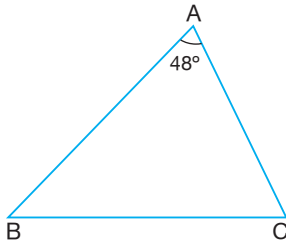
$$a = 2b \sin \alpha \text{ olup } \frac{2b \sin \alpha}{\sin 20^\circ} = \frac{b}{\sin 80^\circ} \text{ eşitliği ile}$$

$\sin \alpha = \sin 10^\circ$ dolayısıyla $\alpha = 10^\circ$ bulunur.

1. Çevresi 16 birim olan bir üçgenin yükseklikleri toplamı tamsayı olarak en fazla kaç birimdir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 15

2.

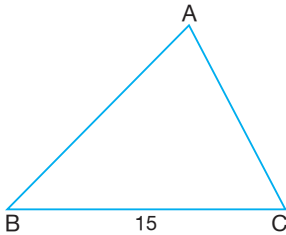


ABC üçgen
 $m(\widehat{BAC}) = 48^\circ$
 $|AB| > |AC|$

Buna göre, $m(\widehat{ACB})$ nin tamsayı değeri en az kaçtır?

A) 65 B) 66 C) 67 D) 68 E) 69

3.



ABC üçgen
 $2|AB| = 3|AC|$
 $|BC| = 15$ birim

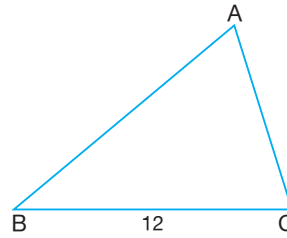
Buna göre, $|AC|$ nin kaç tamsayı değeri vardır?

A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

4. Çevresi 18 birim ve kenar uzunlukları tamsayı olan kaç tane ikizkenar üçgen çizilebilir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

5.

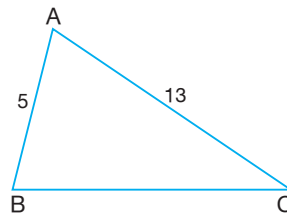


ABC üçgen
 $|AB| = 2|AC|$
 $|BC| = 12$ birim

Buna göre ABC üçgeninin çevresinin en büyük tamsayı değeri kaçtır?

A) 49 B) 48 C) 47 D) 46 E) 45

6.



ABC üçgen
 $|AB| = 5$ birim
 $|AC| = 13$ birim

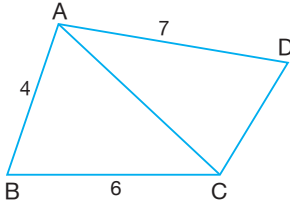
$m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ACB})$

Buna göre, $|BC|$ nin kaç tamsayı değeri vardır?

A) 10 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4



7.

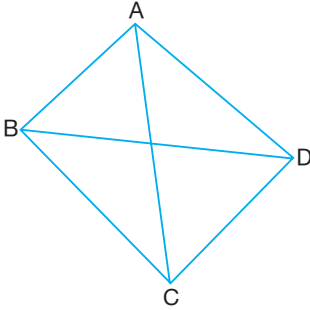


ABCD dörtgen
 $|AB| = 4$ birim
 $|AD| = 7$ birim
 $|BC| = 6$ birim
 $|AC|$ tamsayı

Buna göre, $|DC|$ nin en büyük tamsayı değeri kaçtır?

- A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

8.

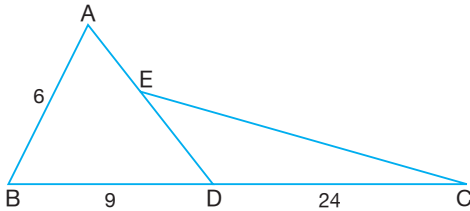


ABCD dörtgen
 $|AC| = 8$ birim
 $|BD| = 6$ birim

Buna göre, ABCD dışbükey dörtgeninin çevre uzunluğu tamsayı olarak en az kaçtır?

- A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

9.

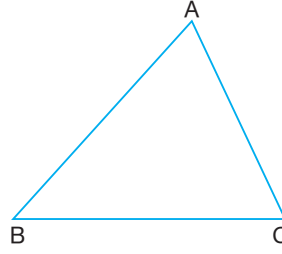


ABD üçgen, B, D, C doğrusal, $|DE| = 2|AE|$,
 $|DC| = 24$ birim, $|BD| = 9$ birim, $|AB| = 6$ birim

Buna göre, $|EC|$ nin kaç tamsayı değeri vardır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

10.

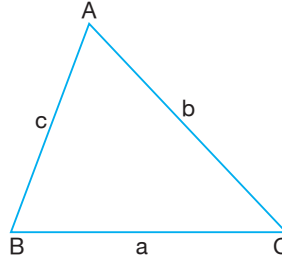


ABC üçgeninin kenarları tamsayıdır.

Buna göre, $|BC|$ nin alacağı değerler kümesinin eleman sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) 146 B) 151 C) 173 D) 195 E) 217

11.

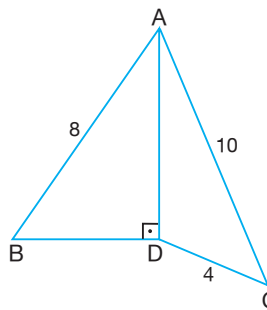


ABC üçgen
a, b, c tamsayı
 $|AC| = b$
 $|AB| = c$
 $|BC| = a$
 $c < b$

a nın 17 tane tamsayı değeri olduğuna göre, b en az kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

12.

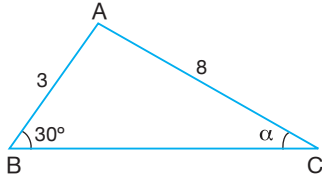


ABD üçgen
ADC üçgen
 $[AD] \perp [DB]$
 $|AC| = 10$ birim
 $|AB| = 8$ birim
 $|DC| = 4$ birim

Buna göre, $|AD|$ nin tamsayı değeri kaçtır?

- A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

1.

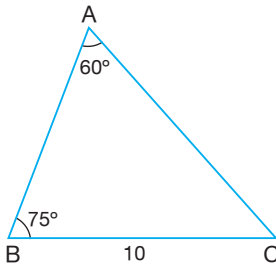


ABC üçgen
 $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$
 $m(\widehat{ACB}) = \alpha$
 $|AB| = 3$ birim
 $|AC| = 8$ birim

Buna göre, $\sin \alpha$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{3}{16}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

2.

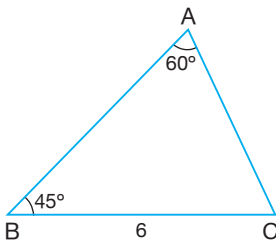


ABC üçgen
 $|BC| = 10$ birim
 $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$
 $m(\widehat{ABC}) = 75^\circ$

Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ B) 8 C) $\frac{9}{\sqrt{2}}$
D) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{11\sqrt{2}}{3}$

3.

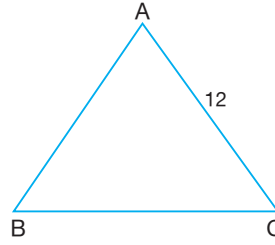


ABC üçgen
 $|BC| = 6$ birim
 $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$
 $m(\widehat{ABC}) = 45^\circ$

Buna göre, $|AC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $6\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{3}$

4.

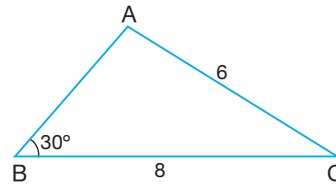


ABC üçgen
 $|AC| = 12$ birim
 $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{3}{4}$

Buna göre, ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

5.

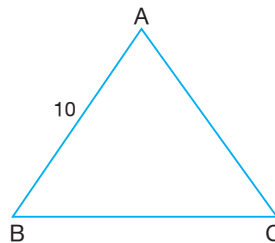


ABC üçgen
 $|BC| = 8$ birim
 $|AC| = 6$ birim
 $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$

Buna göre, $\sin(\widehat{A})$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

6.

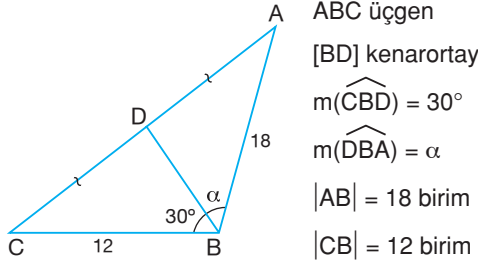


ABC üçgen
 $|AB| = 10$ birim

ABC üçgeninin çevrel çemberinin çap uzunluğu $10\sqrt{2}$ birim olduğuna göre, ACB dar açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

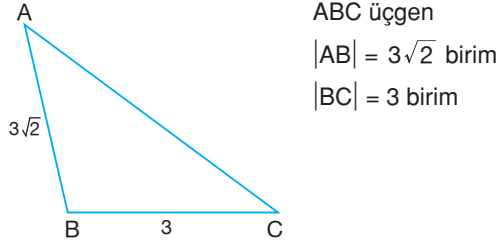
7.



Buna göre, $\sin \alpha$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

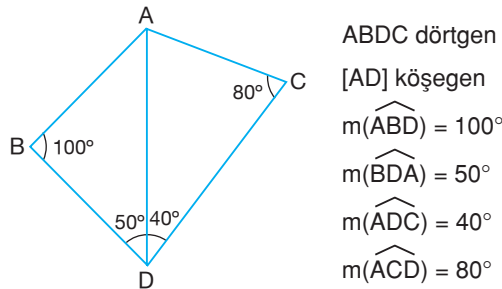
8.



ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu 3 birim olduğuna göre, $m(\widehat{ABC})$ kaç derece olabilir?

- A) 22,5 B) 30 C) 45 D) 67,5 E) 105

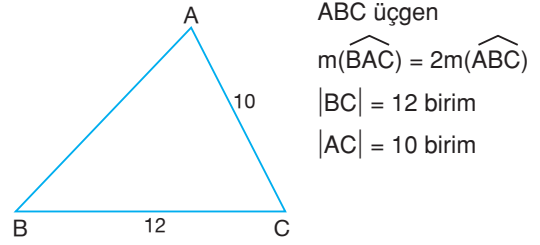
9.



Buna göre, $\frac{|DB|}{|DC|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

10.



Buna göre, $\cos(\widehat{ABC})$ değeri kaçtır?
($\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$)

- A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

11. Bir ABC üçgeninde

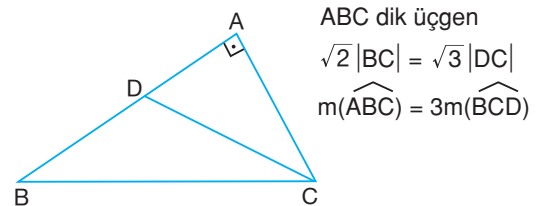
$$|BC| = 9 \text{ birim}$$

$$m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$$

Buna göre, ABC üçgeninin çevrel çemberinin çevresi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 36π B) 24π C) 20π D) 18π E) 15π

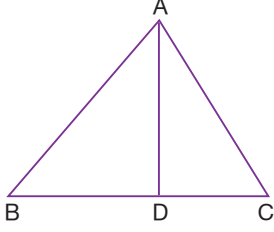
12.



Buna göre, $m(\widehat{ACD})$ kaç derecedir?

- A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

Bir Üçgenin Bir Kenarını Belli Bir Oranda Bölen Noktayı Bulma



ABC üçgeninde [BC] kenarını $\frac{|BD|}{|DC|} = k$ oranının

da bölen D noktası $D = \frac{B + k \cdot C}{1 + k}$ ile hesaplanır.

İspat :

$$\frac{|\vec{BD}|}{|\vec{DC}|} = k \text{ ise } \vec{BD} = k \cdot \vec{DC}$$

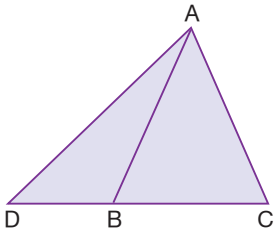
$$D - B = k(C - D)$$

$$D - B = kC - kD$$

$$D(k + 1) = B + kC$$

$$D = \frac{B + kC}{k + 1} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 1



Buna göre, $\frac{|CD|}{|BD|} = k$ olacak biçimde D noktasını bulalım.

ÇÖZÜM

$$\frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|\vec{CD}|}{|\vec{BD}|} = k \text{ ise } \vec{CD} = k \cdot \vec{BD}$$

$$D - C = k \cdot (D - B)$$

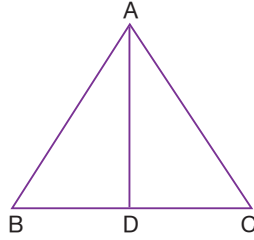
$$D - C = k \cdot D - k \cdot B$$

$$D(1 - k) = C - k \cdot B$$

$$D = \frac{C - k \cdot B}{1 - k} \text{ bulunur.}$$

SONUÇLAR :

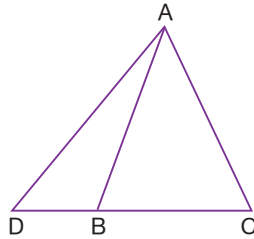
1. D noktası [BC] kenarı üzerinde ise



$$\frac{|BD|}{|DC|} = k \text{ ise}$$

$$D = \frac{B + kC}{1 + k}$$

2. D noktası [BC] kenarı uzantısında ise



$$D = \frac{C - kB}{1 - k}$$

ÖRNEK - 2

Analitik düzlemde,

$A(1, 5)$ ve $B(-5, 20)$

noktaları ile [AB] üzerinde $\frac{|AC|}{|CB|} = 2$ olacak

şekilde C noktasının koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM :

$$A(1, 5) \quad C \quad B(-5, 20)$$

$$\frac{|AC|}{|CB|} = 2 \text{ olduğundan } \|\vec{AC}\| = 2\|\vec{CB}\| \text{ yazabiliriz.}$$

Buradan,

$$C - A = 2(B - C)$$

$$C - A = 2B - 2C$$

$$3C = 2B + A$$

$$C = \frac{2B + A}{3}$$

$$C = \frac{2(-5, 20) + (1, 5)}{3}$$

$$C = (-3, 15) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

Analitik düzlemde,

$$A(5, 4) \text{ ve } B(-3, 12)$$

noktaları ve AB doğrultusunda, [AB] nin dışında bir C noktası alınıyor.

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{2} \text{ olduğuna göre, C noktasının koordinatlarını bulalım.}$$

ÇÖZÜM :

$$C(a, b) \quad A(5, 4) \quad B(-3, 12)$$

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{2} \text{ olduğundan } 2\vec{AC} = \vec{BC} \text{ yazabiliriz.}$$

Buradan,

$$2(C - A) = C - B$$

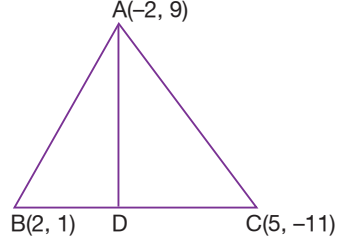
$$2C - 2A = C - B$$

$$C = 2A - B$$

$$C = 2(5, 4) - (-3, 12)$$

$$C = (13, -4) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 4



ABC üçgen
|DC| = 2|BD|

Buna göre, |AD| uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

Önce |DC| = 2|BD| eşitliğinden faydalanarak D noktasının koordinatlarını bulalım.

$$B(2, 1) \quad D \quad C(5, -11)$$

$$\|\vec{CD}\| = 2\|\vec{DB}\| \text{ olup}$$

$$D - C = 2(B - D)$$

$$3D = 2B + C$$

$$D = \frac{2B + C}{3} = \frac{(4, 2) + (5, -11)}{3} = (3, -3) \text{ bulunur.}$$

A(-2, 9) ve D(3, -3) noktaları ile

$$\vec{AD} = (5, -12) \text{ elde edilir.}$$

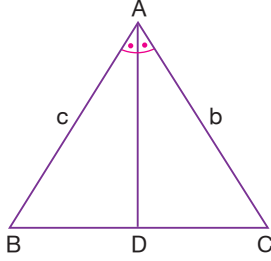
$$\|\vec{AD}\| = \sqrt{\langle \vec{AD}, \vec{AD} \rangle}$$

$$\|\vec{AD}\| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ birim bulunur.}$$

Böylece, |AD| = 13 birim bulunur.



İÇ AÇIORTAY TEOREMİ



ABC üçgeninde,

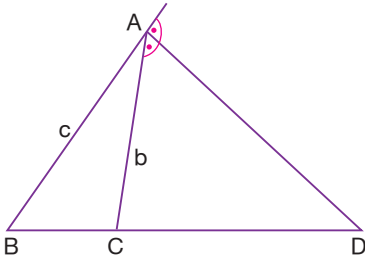
[AD] açıortay olmak üzere;

$$\frac{\|\overrightarrow{BD}\|}{\|\overrightarrow{DC}\|} = \frac{c}{b} \text{ eşitliğine iç açıortay teoremi denir.}$$

İç açıortayın uzunluğu :

$$|AD|^2 = |AB| \cdot |AC| - |BD| \cdot |DC|$$

DIŞ AÇIORTAY TEOREMİ



ABC üçgeninde,

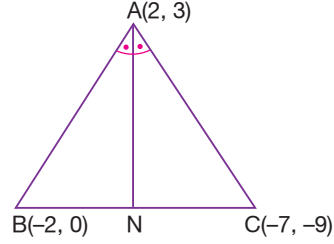
[AD] dış açıortay olmak üzere;

$$\frac{\|\overrightarrow{DC}\|}{\|\overrightarrow{DB}\|} = \frac{b}{c} \text{ eşitliğine dış açıortay teoremi denir.}$$

Dış açıortayın uzunluğu :

$$|AD|^2 = |DC| \cdot |DB| - |AB| \cdot |AC|$$

ÖRNEK – 1



ABC üçgen

A(2, 3)

B(-2, 0)

C(-7, -9)

veriliyor.

Buna göre, N noktasının koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM

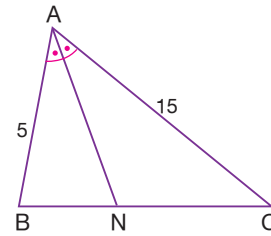
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, -3)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-9, -12) \text{ olup}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 5 \text{ birim ve } \|\overrightarrow{AC}\| = 15 \text{ birim olup}$$

Açıortay teoreminden

$$\frac{|BN|}{|NC|} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$



$$\|\overrightarrow{NC}\| = 3 \|\overrightarrow{BN}\|$$

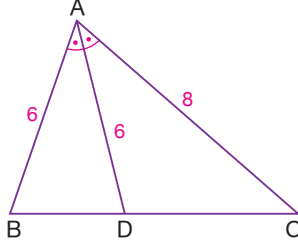
$$C - N = 3N - 3B$$

$$C + 3B = 4N$$

$$N = \frac{C + 3B}{4}$$

$$N = \frac{(-7, -9) + (-6, 0)}{4} = \left(-\frac{13}{4}, -\frac{9}{4}\right) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK – 2



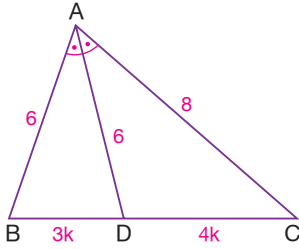
ABC üçgen
[AD] açıortay
 $|AB| = 6$ birim
 $|AD| = 6$ birim
 $|AC| = 8$ birim

Buna göre, $|DC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

İç açıortay teoreminden,

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{6}{8} = \frac{3k}{4k} \text{ yazılabilir.}$$

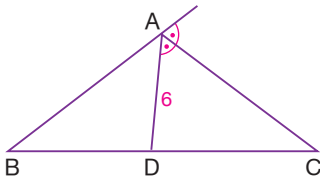


İç açıortay uzunluğundan,

$$6^2 = 6 \cdot 8 - 3k \cdot 4k \Rightarrow k = 1 \text{ olup}$$

$$|DC| = 4 \cdot 1 = 4 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK – 3



ABC üçgen
[AC] açıortay
 $2|DC| = 3|BD|$
 $|AD| = 6$ birim

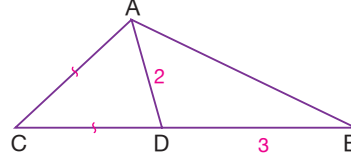
Buna göre, $|AB|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Dış açıortay teoreminden, $\frac{|CD|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|AB|}$ olup

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{|AB|} \text{ eşitliği ile } |AB| = 10 \text{ birim bulunur.}$$

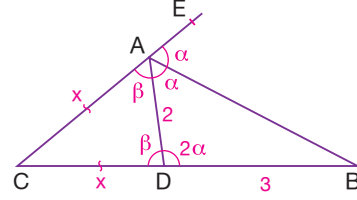
ÖRNEK – 4



ABC üçgen
 $m(\widehat{ADB}) = 2m(\widehat{BAD})$
 $|AD| = 2$ birim
 $|BD| = 3$ birim
 $|AC| = |CD|$

Buna göre, $|DC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



E, A, C doğrusal olacak şekilde, $E \in AC$ alalım.

$$m(\widehat{BAD}) = \alpha \text{ diyelim.}$$

Böylece, $m(\widehat{ADB}) = 2\alpha$ olup

$|AC| = |CD|$ olduğundan,

$$m(\widehat{ADC}) = \beta \Rightarrow m(\widehat{DAC}) = \beta \text{ dir.}$$

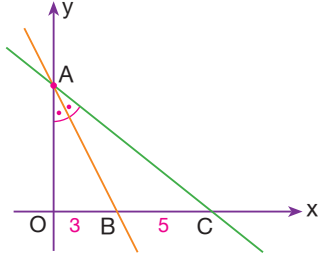
$$2\alpha + \beta = 180^\circ \text{ olduğundan, } m(\widehat{BAE}) = \alpha \text{ olup}$$

[AB] nın dış açıortay olduğu görülür.

Dış açıortay teoreminden,

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{3+x} \Rightarrow x = 6 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK – 5

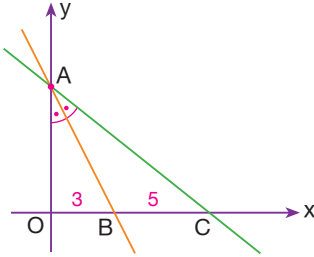


AB açıortay
B(3, 0)
C(8, 0)

Buna göre, $|AC|$ uzunluğunu bulalım.

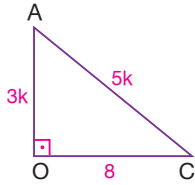
ÇÖZÜM

$|OB| = 3$ birim ve $|BC| = 5$ birim olup



$\triangle AOC$ nde iç açıortay teoreminden,

$$\frac{|AC|}{|AO|} = \frac{5}{3} \text{ olup } |AC| = 5k, |AO| = 3k \text{ diyelim.}$$



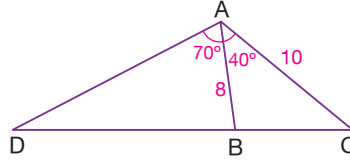
$\triangle AOC$ dik üçgeninde Pisagor teoremi ile,

$$25k^2 = 9k^2 + 64$$

$$16k^2 = 64$$

$$k = 2 \Rightarrow |AC| = 10 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK – 6

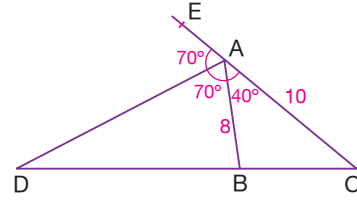


ABC üçgen
 $m(\widehat{BAC}) = 40^\circ$
 $m(\widehat{DAB}) = 70^\circ$
 $|AB| = 8$ birim
 $|AC| = 10$ birim

Buna göre, $\frac{|DB|}{|BC|}$ oranını bulalım.

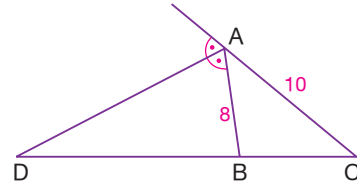
ÇÖZÜM

C, A, E doğrusal olacak şekilde, E noktası alalım.



$m(\widehat{DAE}) = 50^\circ$ olduğundan,

Dış açıortay teoremi ile,



$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DB|}{|DC|} \text{ olup}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{|DB|}{|DC|} \Rightarrow 5|DB| = 4|DC| \text{ eşitsizliğinden,}$$

$$|DB| = 4k, |DC| = 5k \Rightarrow |BC| = 9k$$

Böylece, $\frac{|DB|}{|BC|} = \frac{4k}{9k} = \frac{4}{9}$ bulunur.



ÖRNEK – 7

$3y - 5x + 15 = 0$ doğrusunun eksenlerle oluşturduğu üçgenin iç merkezinin koordinatları toplamını bulalım.

ÇÖZÜM

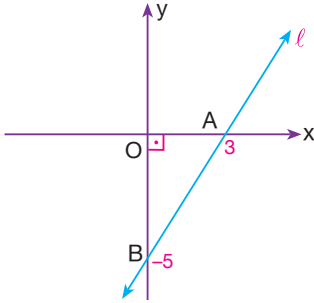
I. Yol :

Verilen doğrunun;

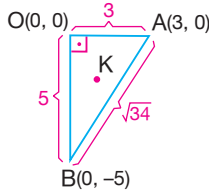
x eksenini $y = 0$ için $A(3, 0)$

y eksenini $x = 0$ için $B(0, -5)$

noktalarında kesişmektedir.



O halde,



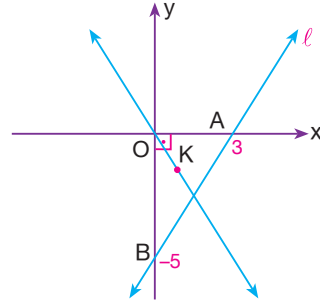
K noktası $\triangle OAB$ nin iç merkezi ise

$$K \left(\frac{\sqrt{34} \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 3(-5)}{3 + 5 + \sqrt{34}}, \frac{-5 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2\sqrt{34}}{3 + 5 + \sqrt{34}} \right)$$

$$K \left(\frac{15}{8 + \sqrt{34}}, \frac{-15}{8 + \sqrt{34}} \right) \text{ olup}$$

K noktasının koordinatları toplamı 0 bulunur.

II. Yol :



$\triangle OAB$ nin iç merkezi K noktası ise OK doğrusu açıortay olup

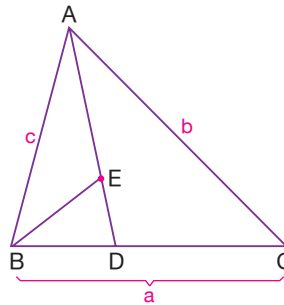
$OK : y = -x$ diyebiliriz.

O halde, $y = -x$ doğrusu üzerindeki K noktasının koordinatları $K(a, -a)$ olup

Koordinatları toplamı $a - a = 0$ bulunur.

ÖRNEK – 8

ABC üçgeni



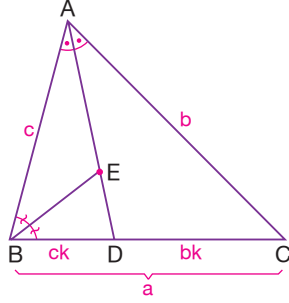
E iç merkez olduğuna göre, $\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{b+c}{a}$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM :

E noktası iç merkez ise [AD] açıortay olup

$\triangle ABC$ nde iç açıortay teoremi ile

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{c}{b} = \frac{ck}{bk} \text{ yazılabilir.}$$

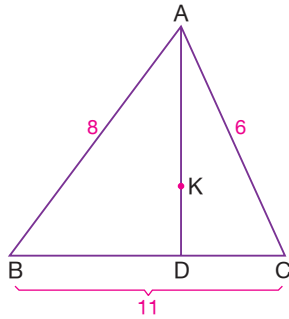


$$ck + bk = a \Rightarrow k = \frac{a}{b+c} \text{ olur.}$$

Aynı şekilde [BE] açıortay olduğundan,

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{c}{ck} = \frac{1}{k} = k^{-1} = \frac{b+c}{a} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 9



ABC üçgeninde K noktası iç merkez olduğuna

göre, $\frac{|AK|}{|KD|}$ oranını bulalım.

ÇÖZÜM :

$$\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{8+6}{11} = \frac{14}{11} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 10

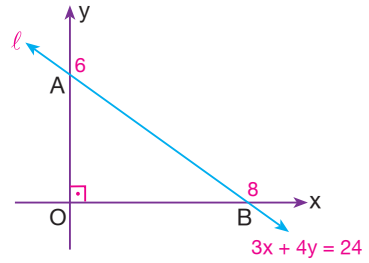
$3x + 4y = 24$ doğrusunun eksenlerle oluşturduğu üçgenin iç merkezinin koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM :

I. Yol :

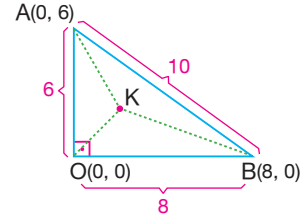
$x = 0$ için $y = 6$ olup doğru y eksenini $(0, 6)$ noktasında keser.

$y = 0$ için $x = 8$ olup doğru x eksenini $(8, 0)$ noktasında keser.



O halde, üçgenin köşe koordinatları,

$A(0, 6)$, $B(8, 0)$, $O(0, 0)$ olup

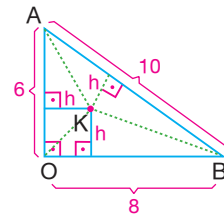


$$K\left(\frac{8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 8}{6 + 8 + 10}, \frac{8 \cdot 6 + 6 \cdot 0 + 10 \cdot 0}{6 + 8 + 10}\right)$$

$K(2, 2)$ bulunur.

II. Yol :

Bir üçgenin iç merkezi üçgenin kenarlarına eşit uzaklıkta bulunan noktadır.



$$A(ABC) = A(AKC) + A(BK) + A(BKC)$$



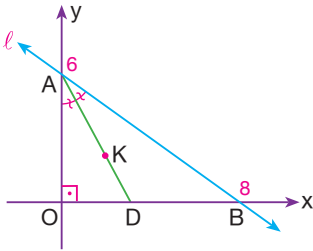
$$\frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{10 \cdot h}{2} + \frac{6 \cdot h}{2} + \frac{8 \cdot h}{2} \text{ eşitliğinden,}$$

$24 = 12h \Rightarrow h = 2$ birim olup $K(2, 2)$ bulunur.

II. Yol :

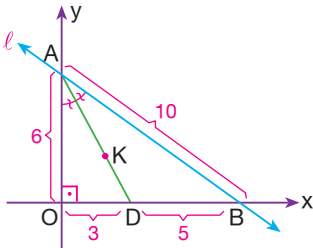
$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ olup}$$

İç açıortay teoremi ile,

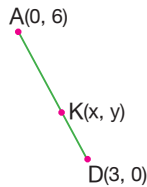


$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OD|}{|DB|} = \frac{3}{5} \text{ eşitliği ile,}$$

$|OD| = 3$ birim ve $|DB| = 5$ birim bulunur.



$$\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{6 + 10}{8} = 2 \text{ olup}$$



$$\frac{|AK|}{|KD|} = 2 \Rightarrow \vec{AK} = 2\vec{KD}$$

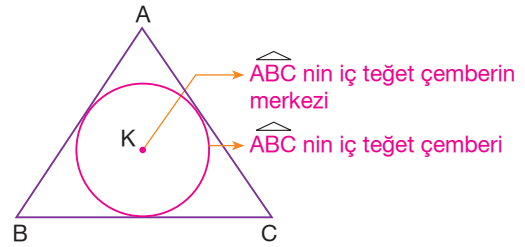
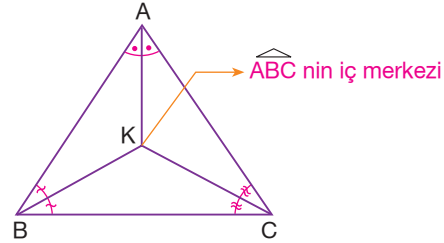
$$K - A = 2(D - K)$$

$$3K = A + 2D$$

$$3K = (6, 6) \Rightarrow K(2, 2) \text{ bulunur.}$$

Üçgenlerde Kenarortay ve Açıortayların Kesim Noktaları

- Bir üçgenin iç açıortayları bir noktada kesişir. Bu kesim noktasına üçgenin **iç merkezi** denir.
- İç merkez bir üçgenin kenarlarına içten teğet olan çemberin merkezidir.
- Bu çembere de iç teğet çemberi denir.

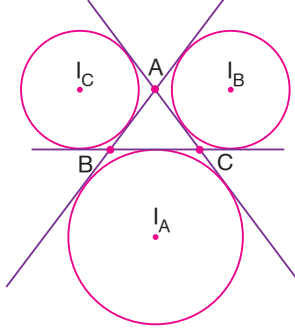
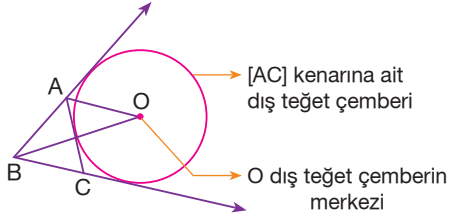


Köşe Koordinatları Belli Olan Bir Üçgenin İç Merkezinin Koordinatları

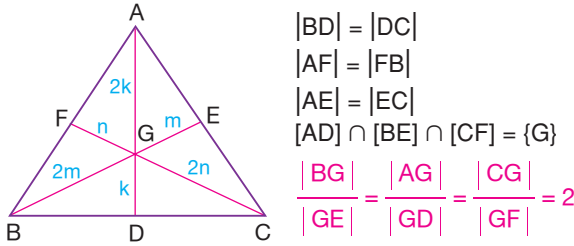
✓ Pratik Bilgi

$$K\left(\frac{a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3}{a + b + c}, \frac{a \cdot y_1 + b \cdot y_2 + c \cdot y_3}{a + b + c}\right)$$

- Bir üçgende bir iç açıortay ile bir dış açıortayın kesim noktasına üçgenin **dış merkezi** denir.
- Bu merkezler üçgeninin bir kenarına ve diğer iki kenarın uzantılarına teğet olan çemberlerin merkezleridir.
- Bu çemberlere dış teğet çemberi denir.



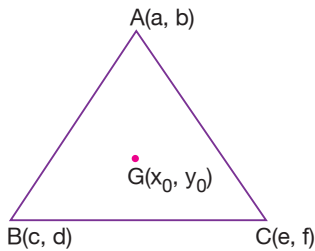
- Bir üçgenin üç kenarortayı aynı noktadan geçer.
- Bu noktaya üçgensel bölgenin ağırlık merkezi denir.
- Bu nokta genellikle G ile gösterilir.
- Bu nokta üçgenin kenarortaylarını köşeden 2 kat kenardan 1 kat olacak şekilde ayırır.



Köşelerinin koordinatları

- A(a, b), B(c, d), C(e, f)

olan ABC üçgeninin ağırlık merkezi G noktası ise;



$$x_0 = \frac{a+c+e}{3}$$

$$y_0 = \frac{b+d+f}{3}$$

ÖRNEK - 1

Köşe koordinatları,

$$A(-3, 5), B(4, 6), C(8, 7)$$

olan ABC üçgensel bölgesinin ağırlık merkezinin x eksenine uzaklığını bulalım.

ÇÖZÜM

Ağırlık merkezinin koordinatları,

$$G\left(\frac{-3+4+8}{3}, \frac{5+6+7}{3}\right)$$

G(3, 6) olup

x eksenine uzaklığı 6 birim bulunur.

ÖRNEK - 2

Analitik düzlemde vektörel denklemi,

$$(x, y) = (-4, 12) + k(-4, 3)$$

olan doğrunun eksenlerle oluşturduğu üçgenin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulalım.

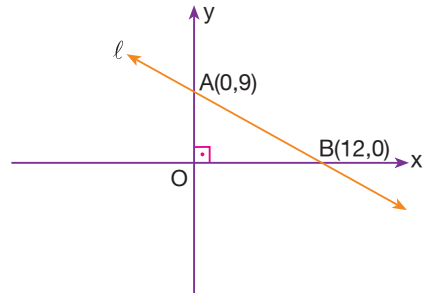
ÇÖZÜM

Vektörel denklemi,

$$(x, y) = (-4, 12) + k(-4, 3)$$

olan doğrunun kapalı denklemi,

$$3x + 4y - 36 = 0 \text{ dir.}$$

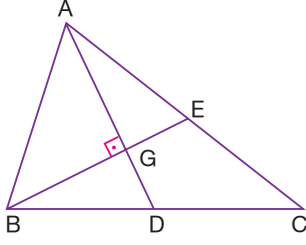


Ağırlık merkezinin koordinatları

$$G\left(\frac{0+0+12}{3}, \frac{0+0+9}{3}\right) \text{ olup}$$

G(4, 3) bulunur.

ÖRNEK – 3

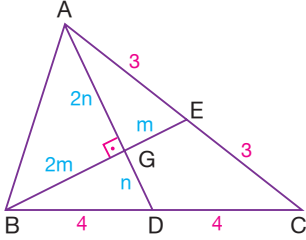


ABC üçgen
G, $\triangle ABC$ nin ağırlık
merkezi
 $[BE] \perp [AD]$
 $|AC| = 6$ birim
 $|BC| = 8$ birim

Verilenlere göre, $|AB|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

G noktası ağırlık merkezi olduğundan,
E ve D orta noktalar ve
 $|BG| = 2|GE|$, $|AG| = 2|GD|$ dir.



$\triangle AGE$ nde Pisagor teoremi ile,
 $m^2 + 4n^2 = 9 \dots \textcircled{1}$

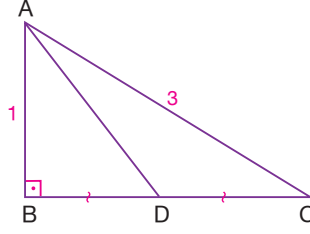
$\triangle BGD$ nde Pisagor teoremi ile,
 $4m^2 + n^2 = 16 \dots \textcircled{2}$

$\triangle ABG$ nde Pisagor teoremi ile,
 $4m^2 + 4n^2 = |AB|^2 \dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$. ve $\textcircled{2}$. denklemlerden,
 $5m^2 + 5n^2 = 25 \Rightarrow m^2 + n^2 = 5$

$\textcircled{2}$. denklemde, $|AB|^2 = 4(m^2 + n^2) = 20$ olup
 $|AB| = 2\sqrt{5}$ birim bulunur.

ÖRNEK – 4



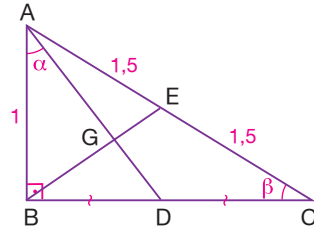
ABC dik üçgen
 $|BD| = |DC|$
 $|AB| = 1$ birim
 $|AC| = 3$ birim

Buna göre, $2m(\widehat{BAD}) - m(\widehat{ACB})$ farkını bulalım.

ÇÖZÜM

$m(\widehat{BAD}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ACB}) = \beta$ diyelim.

Hipotenüse ait kenarortay çizilirse,



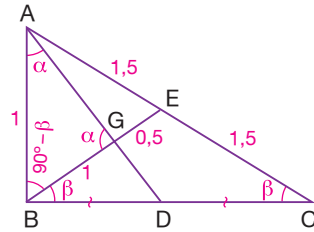
$[BE]$ ve $[AD]$ kenarortay olduğundan,

G noktası $\triangle ABC$ üçgensel bölgesinin ağırlık merkezi olup

muhteşem üçlünden dolayı,

$|BE| = 1,5$ birim olduğundan,

$|BG| = 1$ birim ve $|GE| = 0,5$ birim dir.



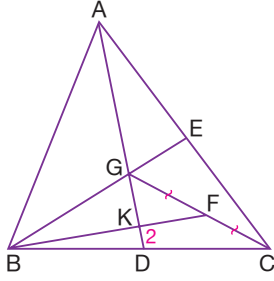
$|BA| = |BG|$ ve $|BE| = |EC|$ olduğundan,

gerekli açılar yazılırsa,

$\triangle ABG$ nde $90^\circ - \beta + 2\alpha = 180^\circ$ olup

$2\alpha - \beta = 90^\circ$ bulunur.

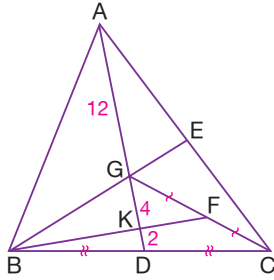
ÖRNEK - 5



ABC üçgen
[AD] kenarortay
[BE] kenarortay
 $|GF| = |FC|$
 $|KD| = 2$ birim

Verilenlere göre, $|AD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$\triangle ABC$ nde [AD] kenarortay olduğundan,
 $|BD| = |DC|$ dir.

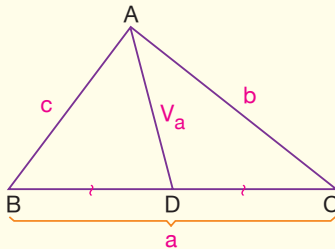
Dolayısıyla K; (BGC) nin ağırlık merkezi ve
 $|GK| = 4$ birim olur.

(ABC) nde G noktası ağırlık merkezi olduğundan
 $|AG| = 2|GD|$ yani; $|AG| = 12$ birim olur.

Dolayısıyla, $|AD| = 18$ birim bulunur.

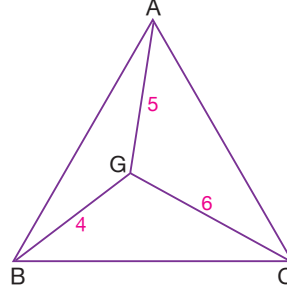


Kenarortay Teoremi



$$2(V_a)^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

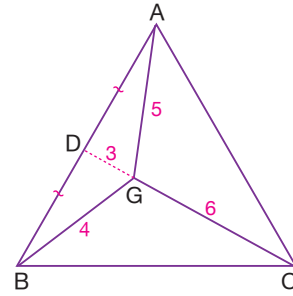
ÖRNEK - 6



ABC üçgen
G, (ABC) nin ağırlık merkezi
 $|AG| = 5$ birim
 $|GC| = 6$ birim
 $|BG| = 4$ birim

Verilenlere göre, $|AB|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



(ABC) nde G noktası ağırlık merkezi olduğundan
[CD] kenarortayını çizerseniz,

[GD] doğru parçası $\triangle ABG$ nde kenarortay olur.

$\triangle ABG$ nde kenarortay teoremini uygularsak,

$$2 \cdot 3^2 = 5^2 + 4^2 - \frac{|AB|^2}{2}$$

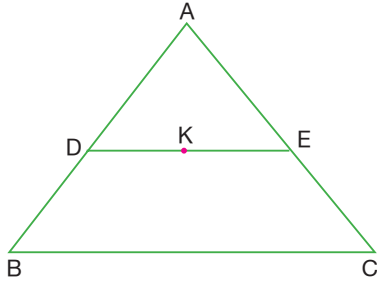
$$18 = 41 - \frac{|AB|^2}{2}$$

$$|AB|^2 = 46 \text{ olup}$$

$$|AB| = \sqrt{46} \text{ birim bulunur.}$$

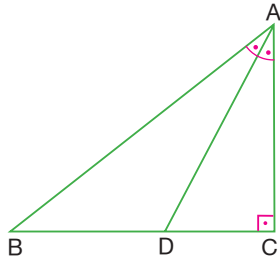
👉 Aşağıdaki özellikleri inceleyiniz.

1



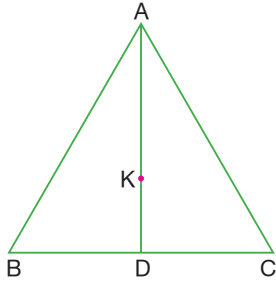
K : İç merkez ve $[DE] \parallel [BC]$ ise
 $|DE| = |DB| + |CE|$

2



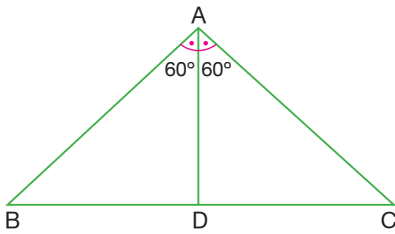
$$A(\widehat{ABC}) = |DC| \cdot \frac{|AB| + |AC|}{2}$$

3



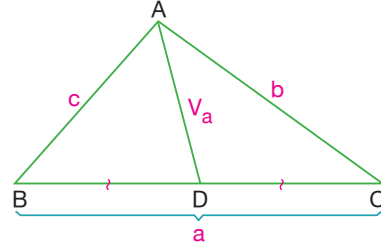
$$K : \text{İç merkez ise } \frac{|AK|}{|KD|} = \frac{|AB| + |AC|}{|BC|}$$

4



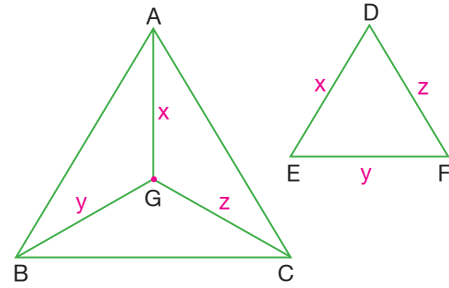
$$\frac{1}{|AD|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}$$

5



$$2(V_a)^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

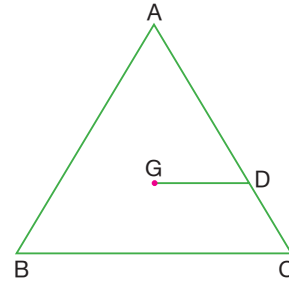
6



G : Ağırlık merkezi ise

$$A(\widehat{ABC}) = 3A(\widehat{DEF})$$

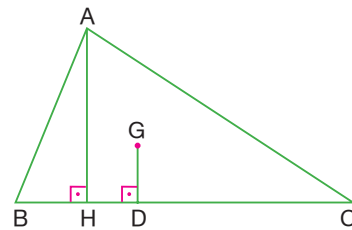
7



G : Ağırlık merkezi, $GD \parallel BC$ ise

$$|BC| = 3|GD|$$

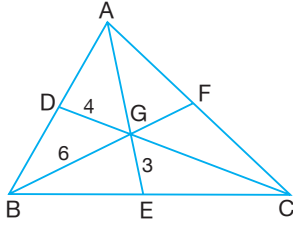
8



G : $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi ise

$$|AH| = 3|GD|$$

1.

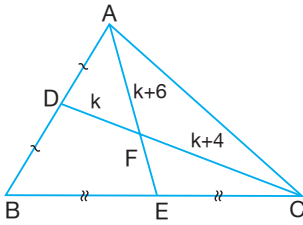


ABC üçgen
G, (ABC) nin
ağırlık merkezi
 $|DG| = 4$ birim
 $|BG| = 6$ birim
 $|GE| = 3$ birim

Buna göre, $|AE| + |BF| + |DC|$ toplamı kaç birimdir?

- A) 24 B) 26 C) 27 D) 28 E) 30

2.

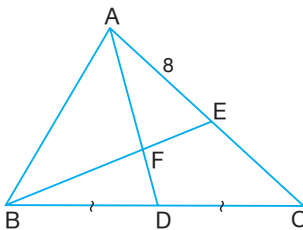


ABC üçgen
 $|AD| = |DB|$
 $|BE| = |EC|$
 $|AF| = k + 6$
 $|FC| = k + 4$
 $|DF| = k$

Buna göre, $|FE|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

3.

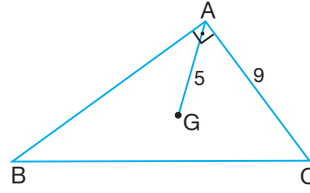


ABC üçgen
 $|BD| = |DC|$
 $3|AF| = 2|AD|$
 $|AE| = 8$ birim

Buna göre, $|EC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

4.

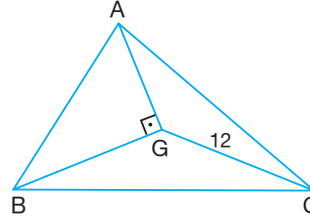


ABC dik üçgen
G, (ABC) nin
ağırlık merkezi
 $|AG| = 5$ birim
 $|AC| = 9$ birim

Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

5.

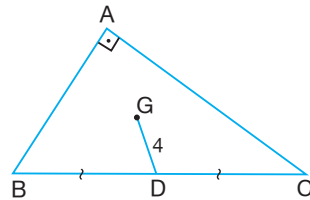


ABC üçgen
G, (ABC) nin
ağırlık merkezi
 $|AG| \perp |GB|$
 $|GC| = 12$ birim

Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

6.

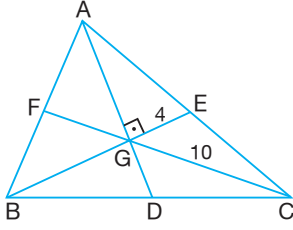


ABC dik üçgen
G, (ABC) nin
ağırlık merkezi
 $|BD| = |DC|$
 $|GD| = 4$ birim

Buna göre, $|BC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 26 B) 24 C) 22 D) 20 E) 18

7.

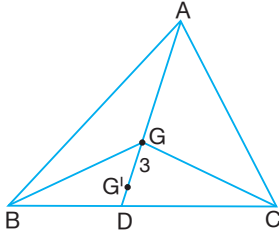


ABC üçgen
G, $\triangle ABC$ nin
ağırlık merkezi
 $[AD] \perp [BE]$
 $|GE| = 4$ birim
 $|GC| = 10$ birim

Buna göre, $|DG|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{5}$ B) $\sqrt{17}$ C) 4 D) 3 E) 2

8.

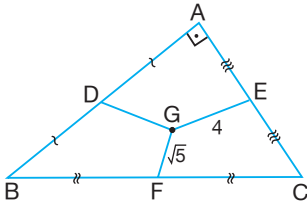


ABC üçgen
G, $\triangle ABC$ nin
G', $\triangle GBC$ nin
ağırlık merkezi
 $|GG'| = 3$ birim

Buna göre, $|AD|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 13,5 B) 14 C) 14,5 D) 15 E) 16

9.

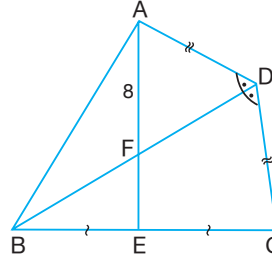


ABC dik üçgen
G, $\triangle ABC$ nin
ağırlık merkezi
 $|AE| = |EC|$
 $|CF| = |FB|$
 $|AD| = |DB|$
 $|EG| = 4$ birim
 $|GF| = \sqrt{5}$ birim

Buna göre, $|DG|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) 3 E) 4

10.

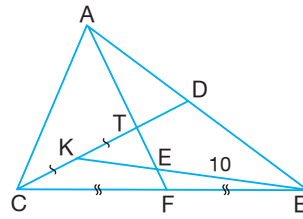


ABCD dörtgen
 $[BD]$ açıortay
 $|AD| = |DC|$
 $|BE| = |EC|$
 $|FE| = 8$ birim

Buna göre, $|AE|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

11.

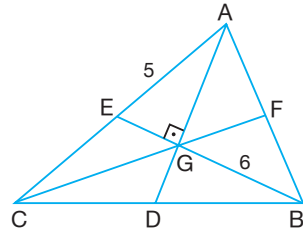


ABC üçgen
 $|BF| = |FC|$
 $|TK| = |KC|$
 $|BE| = 10$ birim

Buna göre, $|EK|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

12.

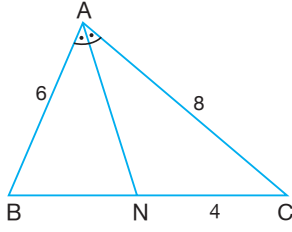


ABC üçgen
G, $\triangle ABC$ nin
ağırlık merkezi
 $[AD] \perp [BE]$
 $|AE| = 5$ birim
 $|BG| = 6$ birim

Buna göre, $|GC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{10}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 7
D) $5\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{13}$

1.

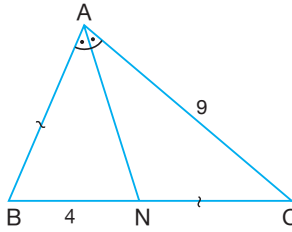


ABC üçgen
[AN] açıortay
 $|AC| = 8$ birim
 $|AB| = 6$ birim
 $|NC| = 4$ birim

Buna göre, $|AN| + |NB|$ toplamı kaç birimdir?

- A) 8 B) 9 C) 11 D) 12 E) 14

2.

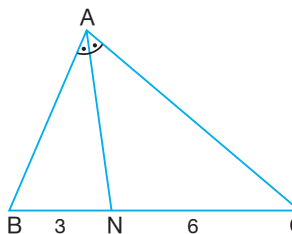


ABC üçgen
[AN] açıortay
 $|AB| = |NC|$
 $|AC| = 9$ birim
 $|BN| = 4$ birim

Buna göre, $\widehat{C(ABC)}$ kaç birimdir?

- A) 10 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

3.

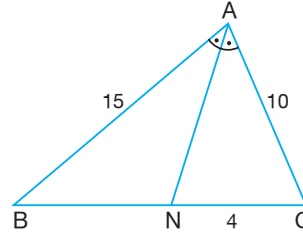


ABC üçgen
[AN] açıortay
 $|NC| = 6$ birim
 $|BN| = 3$ birim
 $\widehat{C(ABC)} = 21$ birim

Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

4.

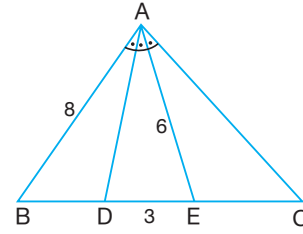


ABC üçgen
[AN] açıortay
 $|AB| = 15$ birim
 $|AC| = 10$ birim
 $|NC| = 4$ birim

Buna göre, $|AN|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 12 B) $5\sqrt{14}$ C) $4\sqrt{14}$
D) $3\sqrt{14}$ E) $2\sqrt{14}$

5.



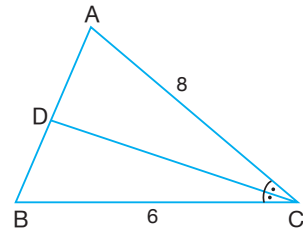
ABC üçgen
 $|AB| = 8$ birim
 $|AC| = 6$ birim
 $|DE| = 3$ birim

BAC açısı üç eşit açıya bölünmüştür.

Buna göre, $\widehat{C(ADC)}$ kaç birimdir?

- A) 24 B) 23 C) 22 D) 21 E) 20

6.

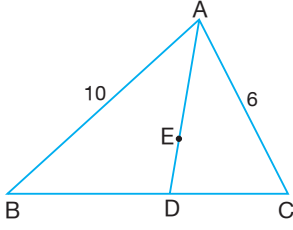


ABC üçgen
[CD] açıortay
 $|AC| = 8$ birim
 $|AB| = 7$ birim
 $|BC| = 6$ birim

Buna göre, $|CD|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

7.

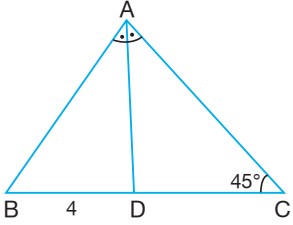


ABC üçgen
E: İç teğet çemberin merkezi
 $|AB| = 10$ birim
 $|BC| = 8$ birim
 $|AC| = 6$ birim

Buna göre, $\frac{|AE|}{|ED|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{3}$ D) 3 E) 4

8.

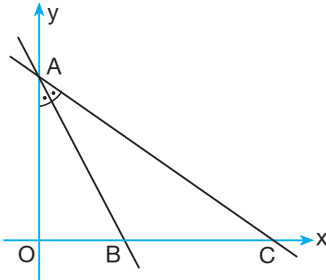


ABC üçgen
[AD] açıortay
 $m(\widehat{BAD}) = 52,5^\circ$
 $m(\widehat{ACD}) = 45^\circ$
 $|BD| = 4$ birim

Buna göre, $|DC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $6\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

9.

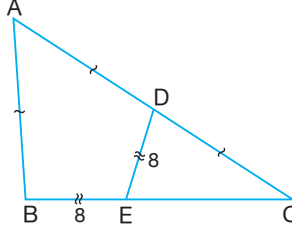


AB açıortay
B(3, 0)
C(8, 0)

Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\sqrt{5}$ B) $10\sqrt{5}$ C) $6\sqrt{5}$
D) $4\sqrt{5}$ E) $3\sqrt{5}$

10.

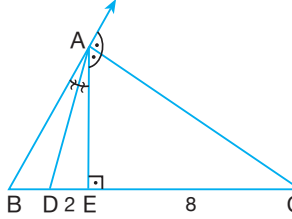


ABC üçgen
 $|AD| = |DC| = |AB|$
 $|DE| = 8$ birim
 $|BE| = 8$ birim

Buna göre, $|EC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

11.

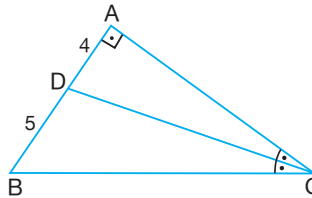


ABE üçgen
[AD] iç açıortay
[AC] dış açıortay
 $|AE| \perp |BC|$
 $|EC| = 8$ birim
 $|DE| = 2$ birim

Buna göre, $|AD|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{5}$

12.

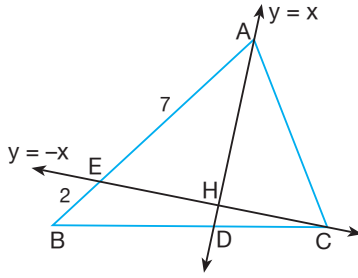


ABC dik üçgen
[CD] açıortay
 $|BD| = 5$ birim
 $|DA| = 4$ birim

Buna göre, $|BC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 30 B) 25 C) 20 D) 15 E) 10

1.

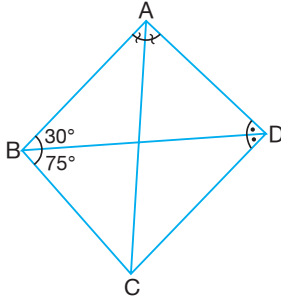


ABC üçgen
|AE| = 7 birim
|EB| = 2 birim

|AB| · |DC| = |AC| · |BD| olduğuna göre, $\frac{|BD|}{|DC|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{11}{6}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{9}{7}$ D) $\frac{13}{3}$ E) $\frac{11}{3}$

2.

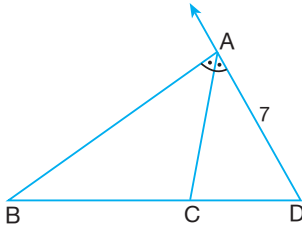


ABCD dörtgen
[AC] açıortay
[DB] açıortay
 $m(\widehat{DBC}) = 75^\circ$
 $m(\widehat{ABD}) = 30^\circ$

Buna göre, $m(\widehat{BCD})$ kaç derecedir?

- A) 85 B) 80 C) 70 D) 60 E) 45

3.

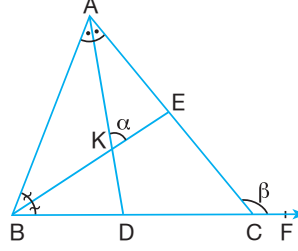


ABD üçgen
[AC] açıortay
|AD| = 7 birim
|CD| tamsayı

Buna göre, |CD| uzunluğu en fazla kaç birimdir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4.

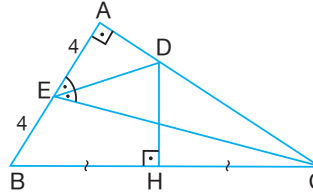


ABC üçgen
[AD] açıortay
[BE] açıortay
 $m(\widehat{AKE}) = \alpha$
 $m(\widehat{ACF}) = \beta$

Buna göre, $\frac{\alpha}{\beta}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

5.

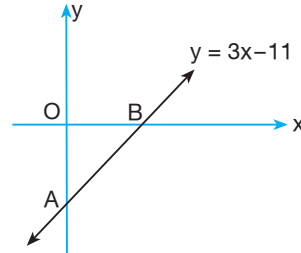


ABC dik üçgen
 $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{DEC})$
[DH] ⊥ [BC]
|BH| = |HC|
|EB| = 4 birim
|AE| = 4 birim

Buna göre, |EC| uzunluğu kaç birimdir?

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

6.

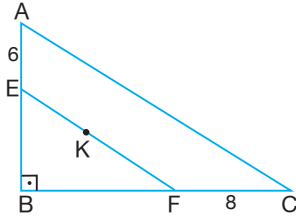


Yukarıdaki dik koordinat sisteminde $y = 3x - 11$ doğrusunun eksenlerle oluşturduğu üçgen AOB dir.

Buna göre, AOB nin iç (teğet çemberinin) merkezinin koordinatları toplamı kaçtır?

- A) 0 B) -1 C) -2 D) -3 E) -4

7.

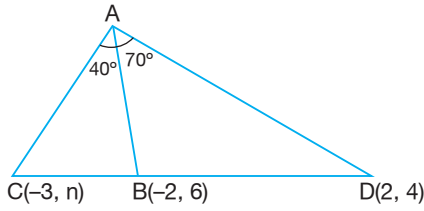


ABC dik üçgen
[EF] // [AC]
K; iç teğet çemberin merkezi
|AE| = 6 birim
|FC| = 8 birim

Buna göre, |AC| – |EF| farkı kaçtır?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

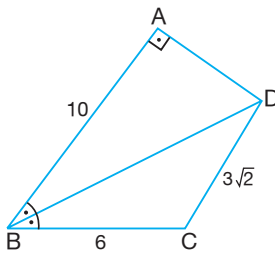
8.



Yukarıdaki ADC üçgeninde $\frac{|AB|}{|AC|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{6}{5}$ B) 1 C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

9.

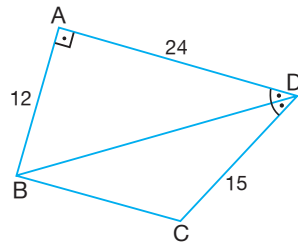


ABCD dörtgen
[BD] açıortay
[AD] ⊥ [AB]
|AB| = 10 birim
|BC| = 6 birim
|DC| = $3\sqrt{2}$ birim

Buna göre, |AD| uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) 6 E) 8

10.

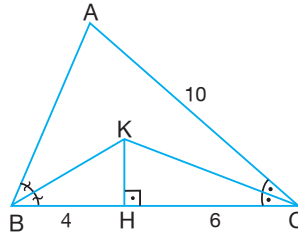


ABCD dörtgen
[DB] açıortay
[AD] ⊥ [AB]
|AD| = 24 birim
|CD| = 15 birim
|AB| = 12 birim

Buna göre, |BC| uzunluğu kaç birimdir?

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

11.

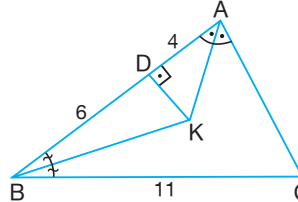


ABC üçgen
[BK] açıortay
[CK] açıortay
[KH] ⊥ [BC]
|AC| = 10 birim
|HC| = 6 birim
|BH| = 4 birim

Buna göre, |AB| uzunluğu kaç birimdir?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

12.



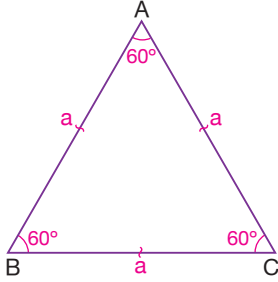
ABC üçgen
[AK] açıortay
[BK] açıortay
[KD] ⊥ [AB]
|BC| = 11 birim
|BD| = 6 birim
|AD| = 4 birim

Buna göre, |AC| uzunluğu kaç birimdir?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

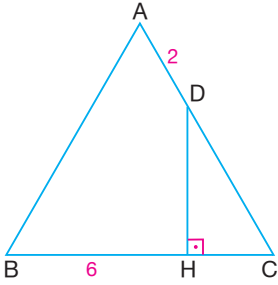
Eşkenar Üçgen :

Tüm kenar uzunlukları birbirine eşit olan üçgendir. Dolayısıyla tüm iç açıların ölçüleri 60° dir.



$$\begin{aligned}\widehat{C}(ABC) &= 3a \\ \widehat{A}(ABC) &= \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

ÖRNEK - 1

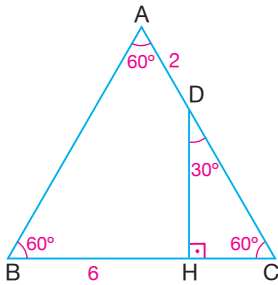


ABC eşkenar üçgen
 $[DH] \perp [BC]$
 $|AD| = 2$ birim
 $|BH| = 6$ birim

Verilenlere göre, $|DH|$ uzunluğunu bulalım.

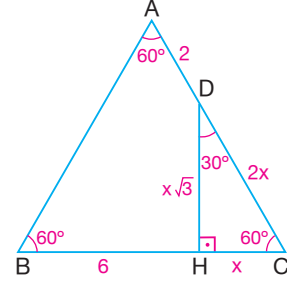
ÇÖZÜM :

Tüm açılar 60° olduğundan,



$\widehat{DHC}$ nin $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ dik üçgeni olduğu görülür.

$|HC| = x$ dersek $|DC| = 2x$ ve $|DH| = x\sqrt{3}$ olup



$|AC| = |CB|$ eşitliğinden,

$$2x + 2 = x + 6 \Rightarrow x = 4 \text{ birim}$$

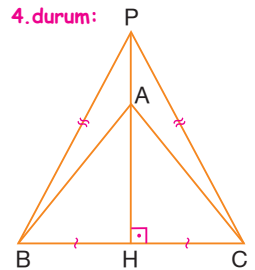
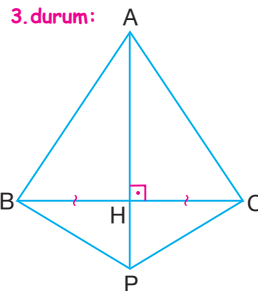
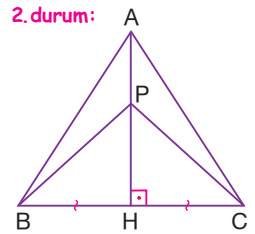
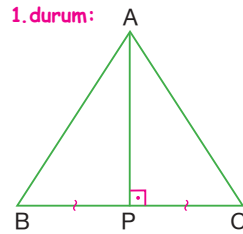
O halde, $|DH| = 4\sqrt{3}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 2

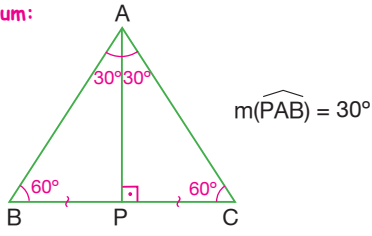
Bir ABC eşkenar üçgeninin bulunduğu düzlemde bir P noktasının B ve C köşelerine uzaklıkları eşittir.

Buna göre, PAB açısının ölçüsünün alacağı değerleri bulalım.

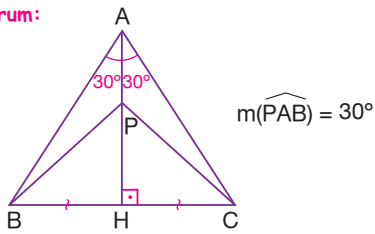
ÇÖZÜM :



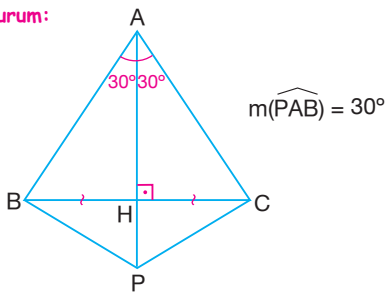
1. durum:



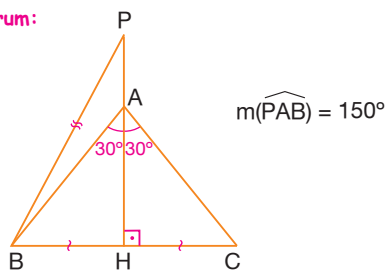
2. durum:



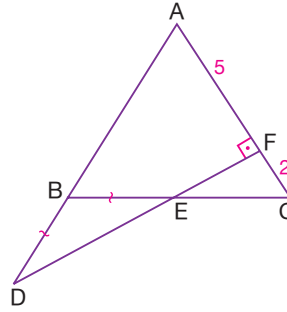
3. durum:



4. durum:



ÖRNEK - 3

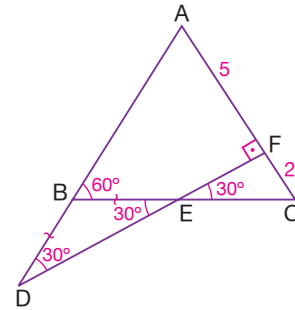


ABC eşkenar üçgen
ADF üçgen
 $|BD| = |BE|$
 $|AF| = 5$ birim
 $|FC| = 2$ birim

Verilenlere göre, $|AD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

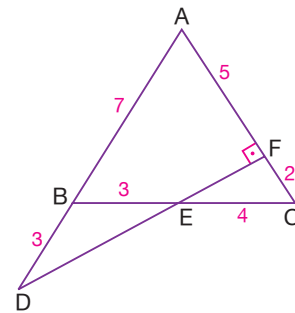
$m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$ ve $|BD| = |BE|$ olduğundan,
 $m(\widehat{ADH}) = m(\widehat{BED}) = 30^\circ$ dir.



O halde, $m(\widehat{DFC}) = 90^\circ$ olup

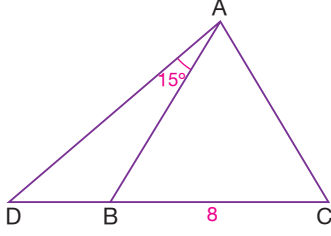
EFC dik üçgeninde $(30^\circ - 60^\circ - 90^\circ)$

$|EC| = 4$ birim ve $|BE| = 3$ birim olup



$|AD| = 10$ birim bulunur.

ÖRNEK - 4

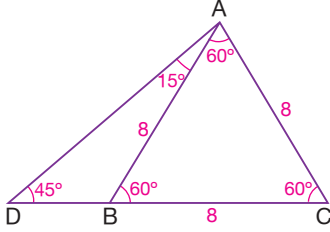


ABC eşkenar
üçgen
 $m(\widehat{DAB}) = 15^\circ$
 $|BC| = 8$ birim

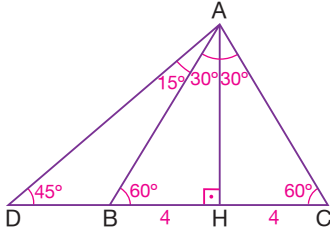
Verilenlere göre, $|AD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

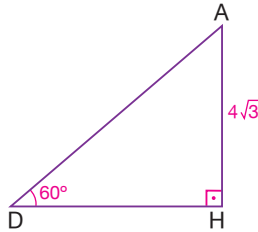
ABC eşkenar üçgeninde tüm açılar 60° olup



$[AH] \perp [BC]$ ile $[BC]$ eşit parçaya bölünür.



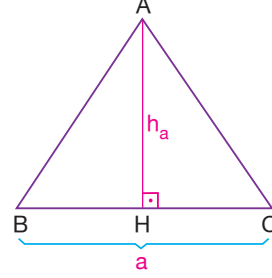
$\widehat{ABH}$ nde $|AH| = 4\sqrt{3}$ birim ve



$\widehat{ADH}$ nde $|AD| = 4\sqrt{6}$ birim bulunur.

BİR ÜÇGENSEL BÖLGENİN ALANI

Bir üçgensel bölgenin alanı herhangi bir kenarın uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısına eşittir.

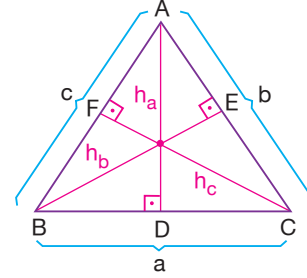


$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

SONUÇLAR :

Aşağıdaki sonuçları inceleyip nasıl elde edildiklerini anlamaya çalışınız.

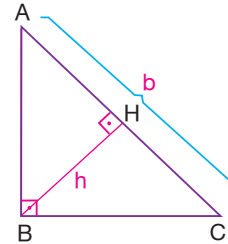
1.



$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \text{ eşitliğinden}$$

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c \text{ elde edilir.}$$

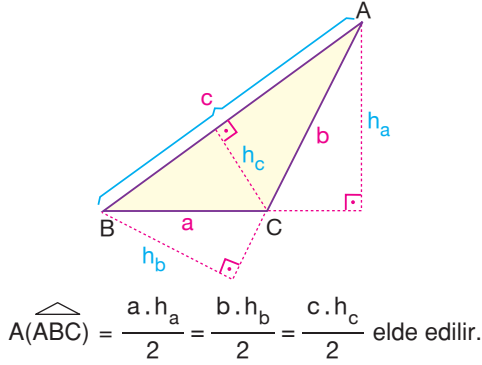
2. Dik üçgenin alanı dik kenarın uzunluklarının çarpımının yarısı kadardır.



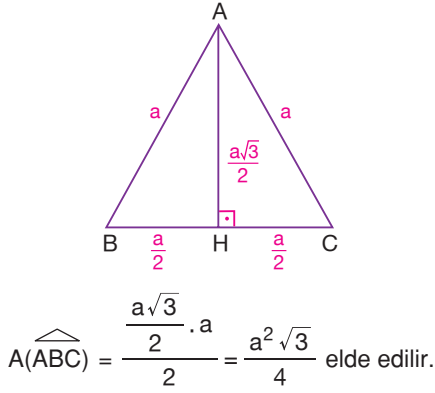
$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|AB| \cdot |BC|}{2} = \frac{h \cdot b}{2} \text{ eşitliğinden}$$

$$|AB| \cdot |BC| = h \cdot b \text{ elde edilir.}$$

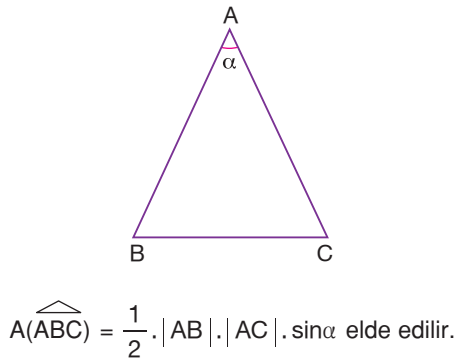
3. Geniş açılı üçgende iki yükseklik üçgenin dışına düşer.



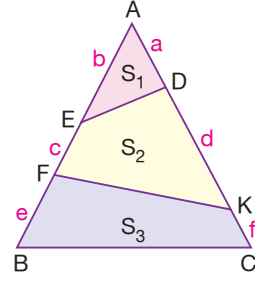
4. Bir kenarı a birim olan eşkenar üçgenin alanı,



5. İki kenarı ile bu kenarları arasındaki açısı belli olan üçgenin alanı,

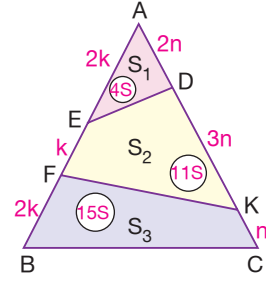


6.



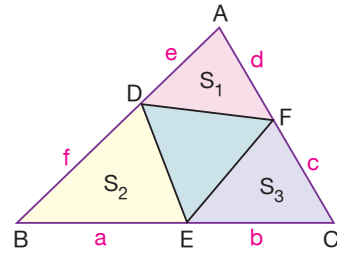
$$\begin{aligned} S_1 &= a \cdot bS \\ S_1 + S_2 &= (b + c) \cdot (a + d)S \\ S_1 + S_2 + S_3 &= (b + c + e) \cdot (a + d + f)S \end{aligned}$$

Örnek :



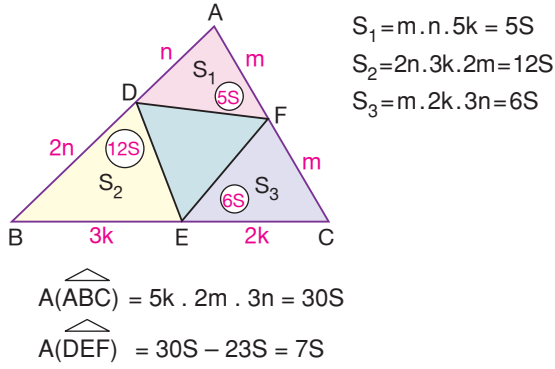
$$\begin{aligned} S_1 &= 2k \cdot 2n = 4S \\ S_1 + S_2 &= 3k \cdot 5n = 15S \\ S_1 + S_2 + S_3 &= 5k \cdot 6n = 30S \end{aligned}$$

7.

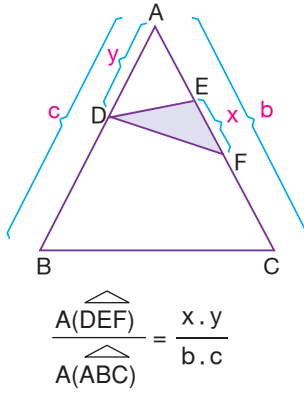


$$\begin{aligned} S_1 &= e \cdot d \cdot (a + b) \cdot S \\ S_2 &= a \cdot f \cdot (d + c) \cdot S \\ S_3 &= b \cdot c \cdot (e + f) \cdot S \\ \widehat{A(ABC)} &= (a + b) \cdot (c + d) \cdot (e + f) \cdot S \end{aligned}$$

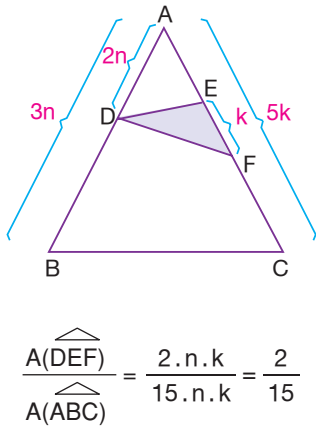
Örnek :



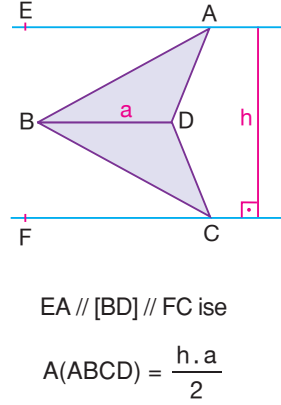
8.



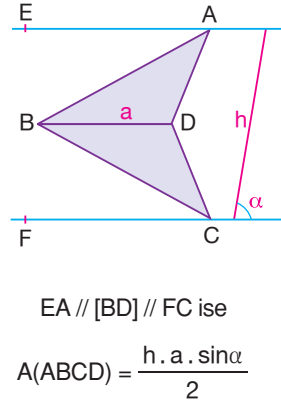
Örnek :



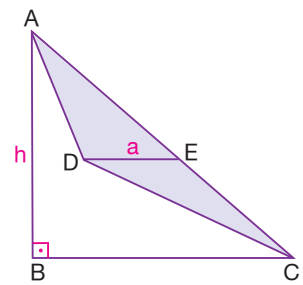
9.



10.



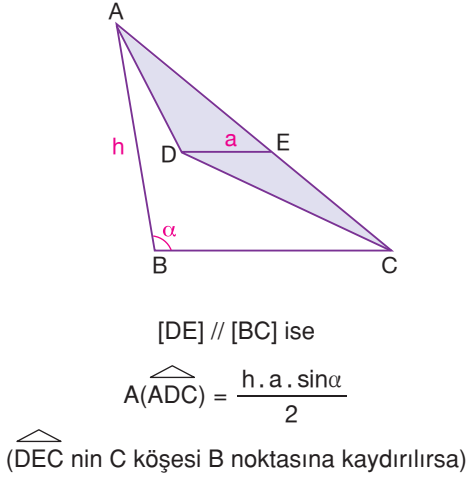
11.



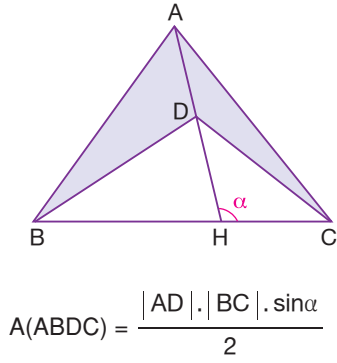
(DEC nin C köşesi B noktasına kaydırılırsa)



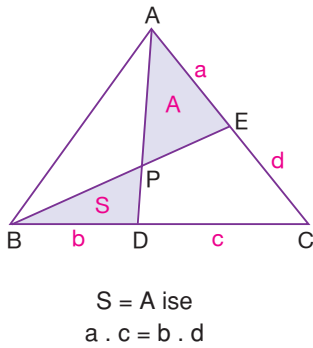
12.



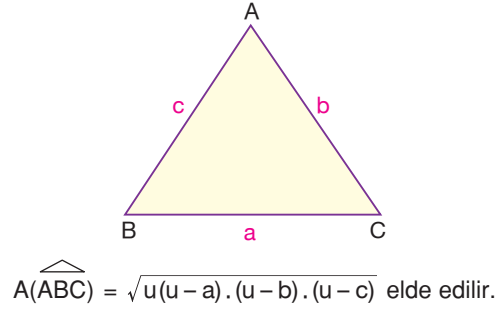
13.



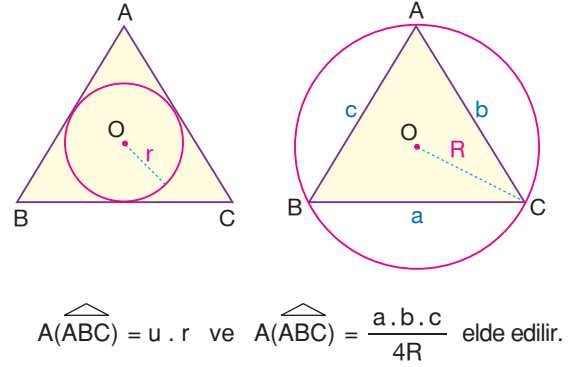
14.



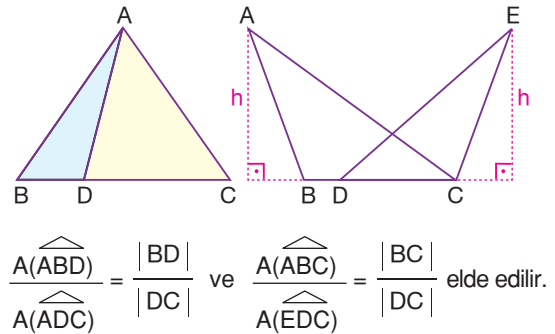
15. Bir ABC üçgeninde kenar uzunlukları a, b, c ve $a + b + c = 2u$ olmak üzere,



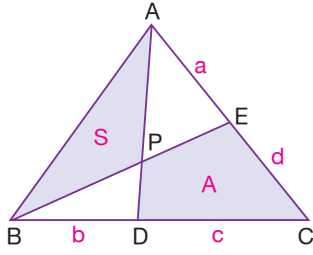
16. Bir ABC üçgeninde çevrel çemberin yarıçapı R ve iç teğet çemberin yarıçapı r ise,



17. Yükseklikleri eşit üçgenlerin alanları oranı tabanları oranına eşittir.

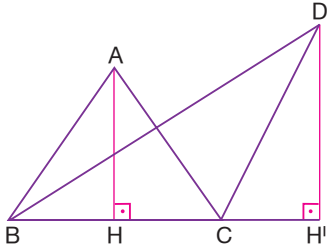


18.



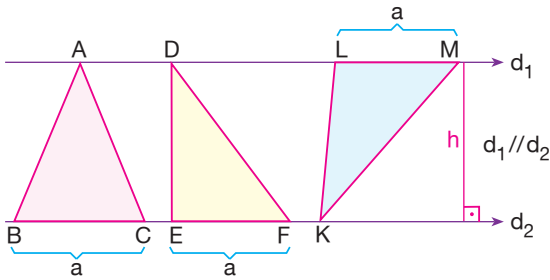
$$S = A \text{ ise} \\ a \cdot b = c \cdot d$$

19. Taban uzunlukları eşit olan üçgenlerin alanları oranını yükseklikleri oranına eşittir.



$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBC})} = \frac{|AH|}{|DH'|} \text{ elde edilir.}$$

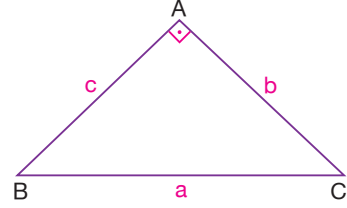
20. Taban uzunlukları ve yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları eşittir.



Yukarıdaki üçgenlerin yükseklikleri eşit olup h kadardır.

$$\text{O halde } A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{DEF}) = A(\widehat{KLM}) \text{ dir.}$$

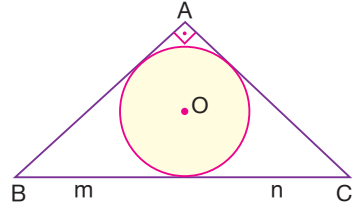
21.



ABC dik üçgen

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a^2 - (b - c)^2}{4} = \frac{|a^2 - (b + c)^2|}{4}$$

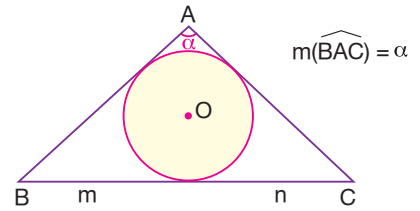
22.



ABC dik üçgeninin O merkezli iç teğet çemberinin hipotenüs üzerinde ayırdığı uzunluklar çarpımı üçgenin alanını verir.

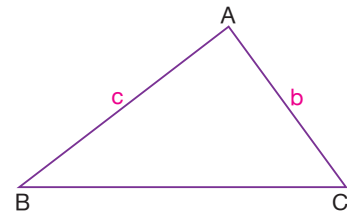
$$A(\widehat{ABC}) = m \cdot n$$

★



$$A(\widehat{ABC}) = m \cdot n \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$$

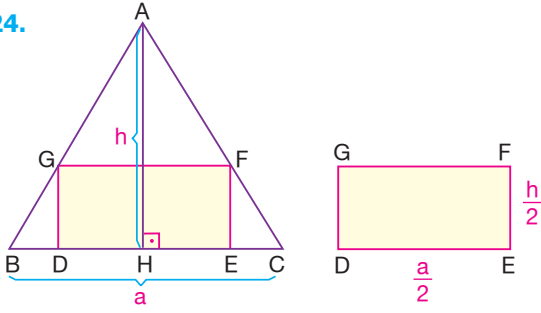
23.



$$A(\widehat{ABC}) \text{ nin en büyük değeri } \frac{b \cdot c}{2} \text{ dir.}$$

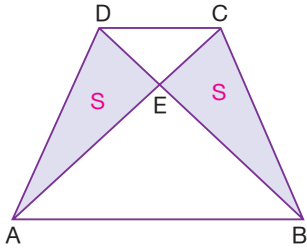


24.



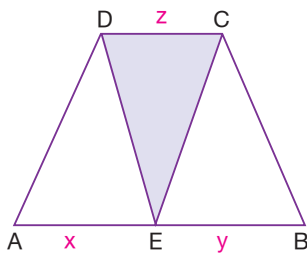
ABC üçgeninin içine çizilebilen en büyük alanlı dikdörtgen yanındaki gibidir.

25. (Yamuğun akciğerleri)



$[AB] \parallel [DC]$ ise $\widehat{A(DAE)} = \widehat{A(CEB)}$ dir.

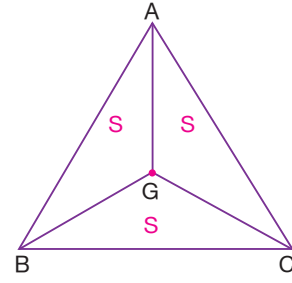
26.



$[AB] \parallel [DC]$ ise

$\widehat{A(ADE)} : \widehat{A(CEB)} : \widehat{A(DEC)} = x : y : z$ dir.

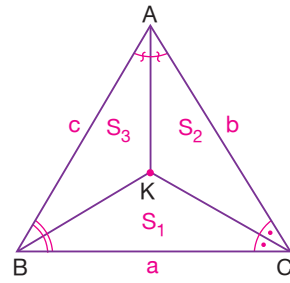
27.



G : Ağırlık merkezi

$\widehat{A(ABG)} = \widehat{A(BGC)} = \widehat{A(AGC)}$

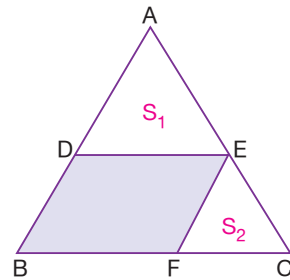
28.



K : İç merkez

$S_1 : S_2 : S_3 = a : b : c$

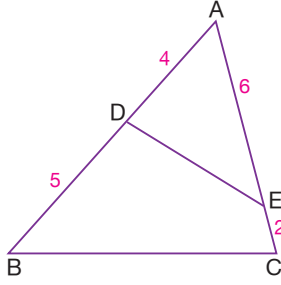
29.



ABC üçgen, $[DE] \parallel [BC]$ ve $[FE] \parallel [AB]$ ise

$\widehat{A(ABC)} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$

ÖRNEK - 1



ABC üçgen
 $|AD| = 4$ birim
 $|AE| = 6$ birim
 $|EC| = 2$ birim
 $|BD| = 5$ birim

Verilenlere göre, $\frac{A(\widehat{ADE})}{A(\widehat{BDEC})}$ oranını bulalım.

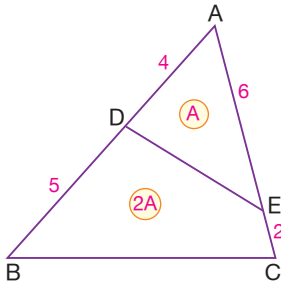
ÇÖZÜM :

$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ olsun.

$$A(\widehat{ADE}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin \alpha$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{A(\widehat{ADE})}{A(\widehat{ABC})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \sin \alpha} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

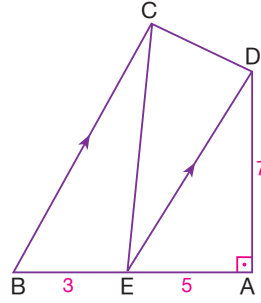


$A(\widehat{ADE}) = A$ ve $A(\widehat{ABC}) = 3A$ diyelim.

$A(\widehat{BDEC}) = 2A$ olur.

Dolayısıyla, $\frac{A(\widehat{ADE})}{A(\widehat{BDEC})} = \frac{1}{2}$ bulunur.

ÖRNEK - 2

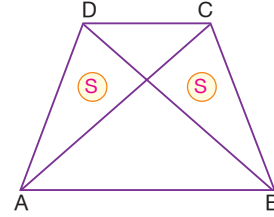


ABCD dörtgen
 $[AD] \perp [AB]$
 $[DE] \parallel [BC]$
 $|AD| = 7$ birim
 $|AE| = 5$ birim
 $|EB| = 3$ birim

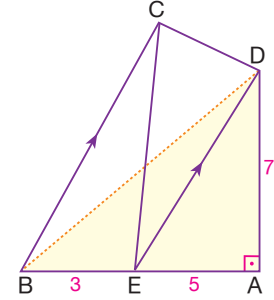
Verilenlere göre, AECD dörtgenel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

Bir yamukta köşegenler çizilirse paralel çizgilere değmeyen alanlar eşittir. (Yamuğun akciğerleri)



$[DB]$ çizilirse,



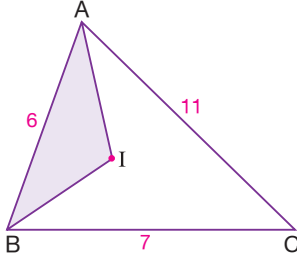
$[DE] \parallel [BC]$ olduğundan,

$A(\widehat{CDE}) = A(\widehat{DBE})$ dir.

Dolayısıyla $A(\widehat{AECD}) = A(\widehat{ABD})$ olur.

O halde, $A(\widehat{ABD}) = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ br}^2$ bulunur.

ÖRNEK - 3



ABC üçgen
I iç teğet çemberi-
nin merkezi
|AB| = 6 birim
|AC| = 11 birim
|BC| = 7 birim

Verilenlere göre, ABI üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

$$u = \frac{6+7+11}{2} \Rightarrow u = 12 \text{ birim (yarı çevre)}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \sqrt{u \cdot (u-a) \cdot (u-b) \cdot (u-c)} \text{ olduğundan}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \sqrt{12 \cdot (12-6) \cdot (12-7) \cdot (12-11)}$$

$$= \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 6} = 6\sqrt{10} \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

I iç açıortayların kesim noktası olduğundan,

I noktasının tüm kenarlara uzaklıkları eşittir.

O halde,

$$A(\widehat{ABI}) = 6A, A(\widehat{AIC}) = 11A \text{ ve } A(\widehat{BIC}) = 7A$$

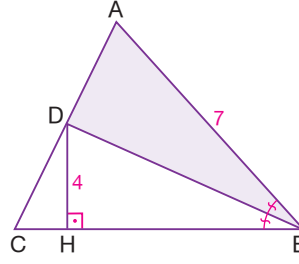
$$\text{Yani, } A(\widehat{ABC}) = 24A \text{ dır.}$$

$$24A = 6\sqrt{10} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{10}}{4} \text{ br}^2$$

$$\text{Dolayısıyla, } A(\widehat{ABI}) = 6A$$

$$A(\widehat{ABI}) = 6 \cdot \frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

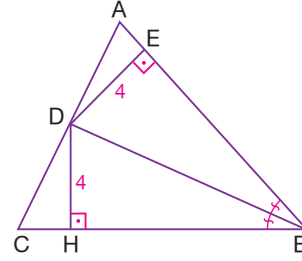
ÖRNEK - 4



ABC üçgen
[BD] açıortay
[DH] $\perp$ [BC]
|DH| = 4 birim
|AB| = 7 birim

Verilenlere göre, ABD üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

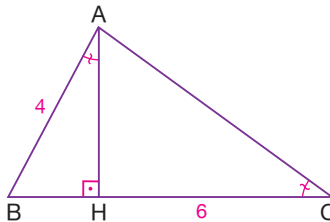


Açıortay üzerindeki herhangi bir noktadan açının kollarına indirilen dikmelerin uzunlukları birbirine eşit olduğundan, |DE| = 4 birim olur.

$$A(\widehat{ABD}) = \frac{|AB| \cdot |DE|}{2} = \frac{7 \cdot 4}{2} \text{ olup}$$

$$A(\widehat{ABD}) = 14 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

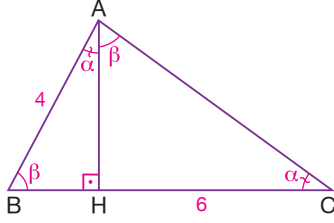
ÖRNEK - 5



ABC üçgen
[AH] $\perp$ [BC]
 $m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{BCA})$
|AB| = 4 birim
|HC| = 6 birim

Verilenlere göre, ABC üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

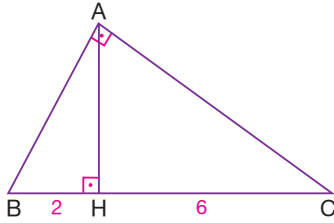
ÇÖZÜM :



$$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{BCA}) = \alpha \text{ ise}$$

$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{HAC}) = \beta \text{ ve } \alpha + \beta = 90^\circ \text{ olur.}$$

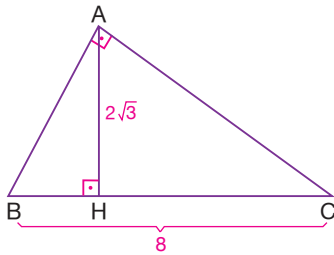
O halde, $[AB] \perp [AC]$ bulunur.



$$|AB|^2 = |BH| \cdot |BC| \text{ (Öklid bağıntısı)}$$

$$4^2 = |BH| \cdot (BH + 6) \Rightarrow |BH| = 2 \text{ birim}$$

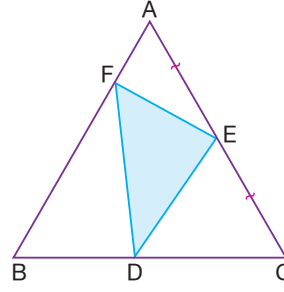
$$|AH|^2 = 2 \cdot 6 \Rightarrow |AH| = 2\sqrt{3} \text{ birim}$$



$$\text{Dolayısıyla, } A(\widehat{ABC}) = \frac{|AH| \cdot |BC|}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \cdot 8}{2} = 8\sqrt{3} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 6



ABC üçgen

$$|BF| = 3|AF|$$

$$|DC| = 2|BD|$$

$$|AE| = |EC|$$

$$A(\widehat{DEC}) = 16 \text{ br}^2$$

Verilenlere göre, DEF üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

$$A(\widehat{AFE}) = |AF| \cdot |AE| \cdot |BC| = k \cdot a \cdot 3t \Rightarrow 3A$$

$$A(\widehat{BDF}) = |BF| \cdot |BD| \cdot |AC| = 3k \cdot t \cdot 2a \Rightarrow 6A$$

$$A(\widehat{DEC}) = |DC| \cdot |EC| \cdot |AB| = 2t \cdot a \cdot 4k \Rightarrow 8A$$

$$A(\widehat{ABC}) = |AB| \cdot |AC| \cdot |BC| = 4k \cdot 3t \cdot 2a \Rightarrow 24A$$

$$\text{O halde, } A(\widehat{DEC}) = 7A \text{ ve}$$

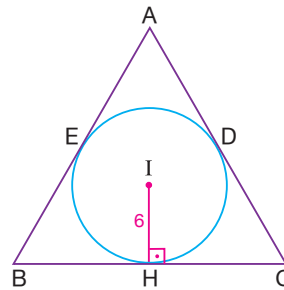
$$A(\widehat{DEC}) = 16 \Rightarrow 8A = 16$$

$$A = 2 \text{ br}^2 \text{ olup}$$

$$A(\widehat{DEF}) = 7A \Rightarrow 7 \cdot 2$$

$$A(\widehat{DEF}) = 14 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 7



ABC üçgen

I iç teğet çemberi-
nin merkezi

$$[IH] \perp [BC]$$

$$|IH| = 6 \text{ birim}$$

$$\widehat{Ç(ABC)} = 32 \text{ br}^2$$

Verilenlere göre, ABC üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

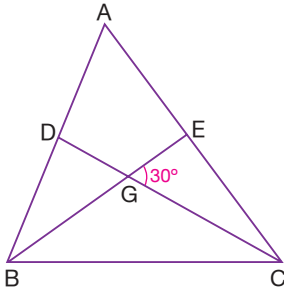
$$u = \frac{\widehat{Ç(ABC)}}{2} \text{ ve}$$

r : iç teğet çemberinin yarıçapı ise

$$\widehat{A(ABC)} = u \cdot r \text{ dir.}$$

$$\text{O halde, } \widehat{A(ABC)} = \frac{32}{2} \cdot 6 = 96 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

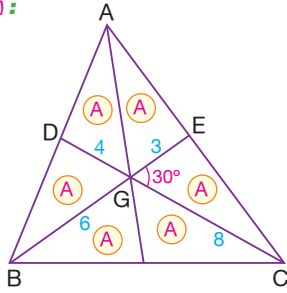
ÖRNEK - 8



G , $\widehat{(ABC)}$ nin ağırlık merkezi
 $[CD] \cap [BE] = \{G\}$
 $|BE| = 9$ birim
 $|CD| = 12$ birim

Verilenlere göre, ABC üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :



Bir üçgende tüm kenarlar çizildiğinde $\widehat{(ABC)}$ nin alanı 6 eşit parçaya bölünür.

$$|BE| = 9 \text{ birim ise } |GE| = 3 \text{ birim}$$

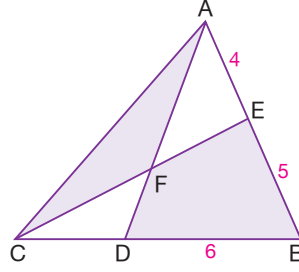
$$|CD| = 12 \text{ birim ise } |GC| = 8 \text{ birim olur.}$$

$$\text{O halde, } \widehat{A(GEC)} = A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ$$

$$A = 6 \text{ br}^2 \text{ olur.}$$

$$\text{Dolayısıyla, } \widehat{A(ABC)} = 6A = 6 \cdot 6 = 36 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 9



ABC üçgen

$$[AD] \cap [EC] = \{F\}$$

$$|AE| = 4 \text{ birim}$$

$$|EB| = 5 \text{ birim}$$

$$|BD| = 6 \text{ birim}$$

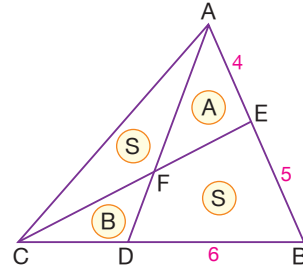
$$\widehat{A(AFC)} = \widehat{A(BEFD)}$$

Buna göre, $|DC|$ uzunluğunu bulalım.

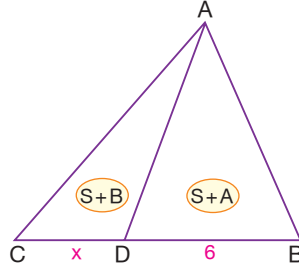
ÇÖZÜM :

$$\widehat{A(BEFD)} = \widehat{A(AFC)} = S$$

$$\widehat{A(AEF)} = A, \widehat{A(DFC)} = B \text{ diyelim.}$$

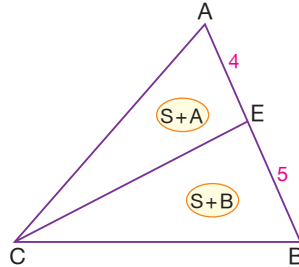


ABD ve ADC üçgenlerinin yükseklikleri eşit olduğundan,



$$\frac{S+A}{S+B} = \frac{6}{x} \dots \textcircled{1}$$

Aynı şekilde AEC ve BEC üçgenlerinin yükseklikleri eşit olduğundan,

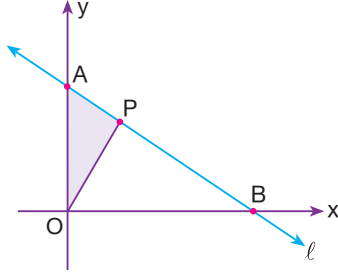


$$\frac{S+A}{S+B} = \frac{4}{5} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}. \text{ ve } \textcircled{2}. \text{ eşitliklerden, } \frac{6}{x} = \frac{4}{5} \text{ orantısı ile}$$

$$4x = 30 \Rightarrow x = \frac{15}{2} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 10



$$l : \frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$$

$$A(\widehat{OAP}) = 9 \text{ br}^2$$

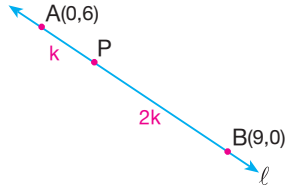
Buna göre, P noktasının koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM :

I. Yol : $A(\widehat{AOB}) = \frac{6 \cdot 9}{2} = 27 \text{ br}^2$ olup

$A(\widehat{OAP}) = 9 \text{ br}^2 \Rightarrow A(\widehat{OPB}) = 18 \text{ br}^2$ ve

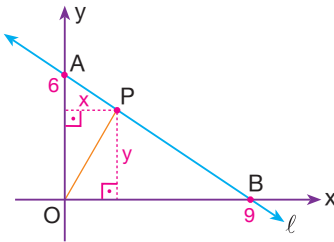
$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{A(\widehat{OAP})}{A(\widehat{OPB})} = \frac{1}{2} \text{ yazılabilir.}$$



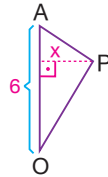
$\vec{BP} = 2\vec{PA}$ eşitliği ile

$3P = 2A + B \Rightarrow P(3, 4)$ bulunur.

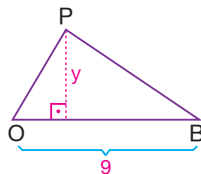
II. Yol : $P(x, y)$ diyelim.



$$A(\widehat{AOP}) = \frac{6x}{2} = 9 \Rightarrow x = 3$$

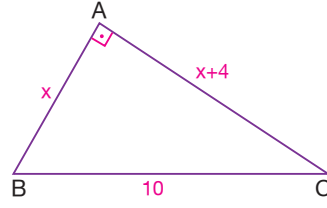


$$A(\widehat{POB}) = \frac{9y}{2} = 18 \Rightarrow y = 4$$



$P(x, y) = P(3, 4)$ bulunur.

ÖRNEK - 11



ABC dik üçgen
 $|AB| = x$ birim
 $|AC| = x + 4$ br
 $|BC| = 10$ birim

Buna göre, ABC üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

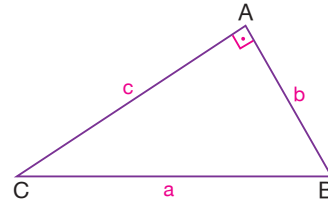
ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısı ile

$$x^2 + (x + 4)^2 = 10^2 \Rightarrow 2x^2 + 8x = 84$$

$$x^2 + 4x = 42 \text{ olup}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{x(x + 4)}{2} = \frac{x^2 + 4x}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

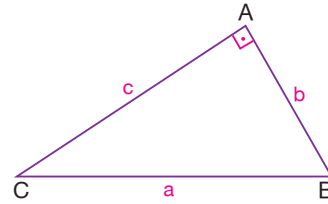
✓ Pratik Bilgi



$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|a^2 - (c - b)^2|}{4}$$

Bir dik üçgensel bölgenin alanı hipotenüs uzunluğunun karesinden dik kenar uzunlukları farkının karesinin farkının dörtte birine eşittir.

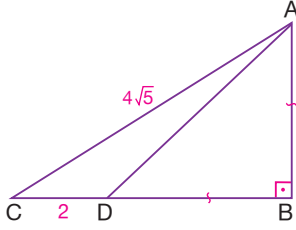
YA DA



$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|a^2 - (c + b)^2|}{4}$$

Bir dik üçgensel bölgenin alanı hipotenüs uzunluğunun karesinden dik kenar uzunlukları toplamının karesinin farkının dörtte birine eşittir.

ÖRNEK - 12



ABC dik üçgen
 $|AB| = |BD|$
 $|AC| = 4\sqrt{5}$ br
 $|DC| = 2$ birim

Buna göre, ABC üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

Dik kenar uzunlukları farkı,

$|BC| - |AB| = 2$ birim olup

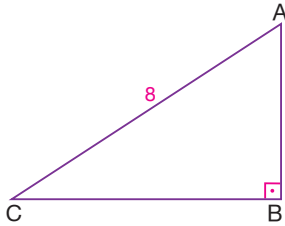
$$A(\triangle ABC) = \frac{(4\sqrt{5})^2 - 2^2}{4} = 19 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 13

Hipotenüs uzunluğu 8 birim olan bir dik üçgensel bölgenin alanının en fazla kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

$$A(\triangle ABC) = \frac{|8^2 - (|AB| - |BC|)^2|}{4} \text{ yazılabilir.}$$



$A(\triangle ABC)$ nin en büyük olması için,

$|AB| - |BC| = 0$ olmalıdır.

O halde,

$$A(\triangle ABC) = \frac{8^2}{4} = 16 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 14

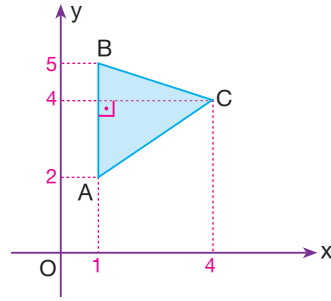
Koordinat sisteminde köşelerinin koordinatları,

- A(1, 2)
- B(1, 5)
- C(4, 4)

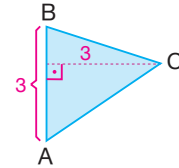
ABC üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

Verilen koordinatları koordinat sistemine yerleştiririm.



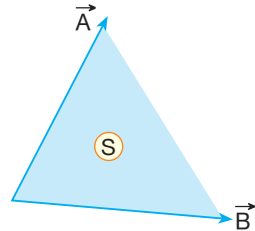
Böylece,



$$A(\triangle ABC) = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

✓ Pratik Bilgi

$\vec{A} = (a, b)$ ve $\vec{B} = (c, d)$ vektörleri üzerine kurulan üçgensel bölgenin alanı,



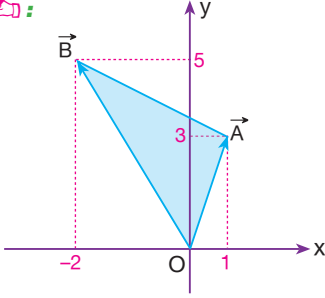
$$S = \frac{1}{2} \cdot |ad - bc| \text{ (determinant gibi)}$$

ÖRNEK - 15

$$\vec{A} = (1, 3) \text{ ve } \vec{B} = (-2, 5)$$

vektörleri üzerine kurgulanmış üçgensel bölgenin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :



$$A(\angle AOB) = \frac{1}{2} \cdot |1 \cdot 5 - 3(-2)| = \frac{11}{2} \text{ bulunur.}$$

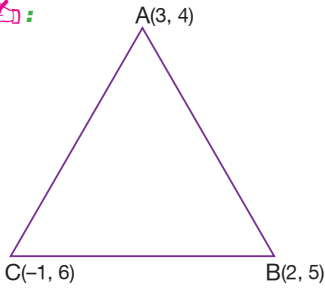
ÖRNEK - 16

Koordinat düzleminde köşelerinin koordinatları,

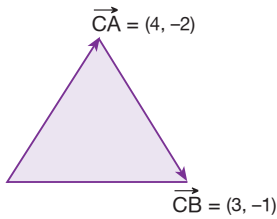
- A(3, 4)
- B(2, 5)
- C(-1, 6)

ABC üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :



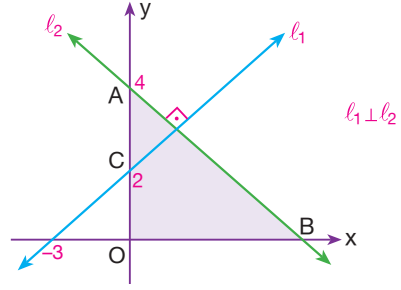
$$\vec{CA} = A - C = (4, -2) \text{ ve } \vec{CB} = B - C = (3, -1) \text{ olup}$$



$$A(\angle ABC) = \frac{1}{2} \cdot |4(-1) - 3(-2)|$$

$$\frac{1}{2} \cdot |-4 + 6| = 1 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

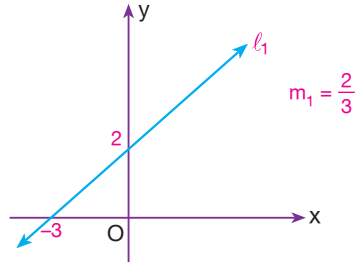
ÖRNEK - 17



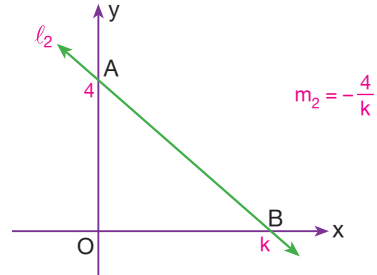
Buna göre, AOB üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

l_1 doğrusunun eğimi,

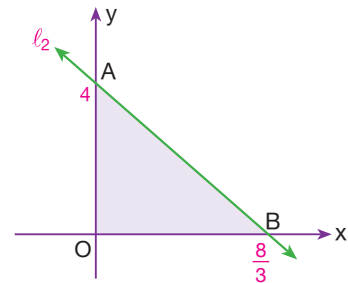


l_2 doğrusunun eğimi,



$l_1 \perp l_2 = 1$ olduğundan $m_1 \cdot m_2 = -1$ olmalıdır.

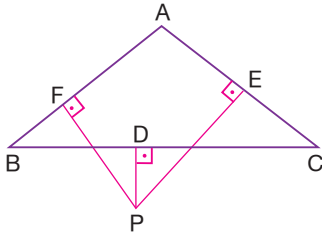
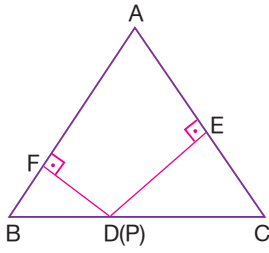
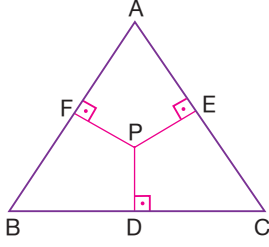
$$\text{O halde, } \frac{2}{3} \cdot \frac{-4}{k} = -1 \Rightarrow k = \frac{8}{3} \text{ olup}$$



$$A(\angle AOB) = \frac{4 \cdot \frac{8}{3}}{2} = \frac{16}{3} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

CARNOT (Karnot) TEOREMİ

Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde, dış bölgesinde ya da üzerinde alınan bir P noktasından kenarlara çizilen dikme ayakları D, E, F noktaları olsun.



Carnot üçgenleri

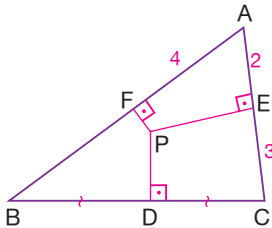
Yukarıdaki Carnot üçgenlerinde

$$|BD|^2 + |EC|^2 + |AF|^2 = |DC|^2 + |AE|^2 + |FB|^2$$

bağıntısı vardır.

Bu bağıntıya **Carnot teoremi** denir.

ÖRNEK - 1



ABC üçgen
|AF| = 4 birim
|AE| = 2 birim
|EC| = 3 birim
|BD| = |DC|

Buna göre, |FB| uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$|BD| = |DC| = a$ birim olsun. Carnot teoremi ile,

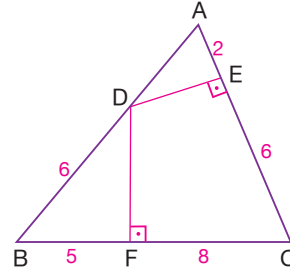
$$a^2 + 3^2 + 4^2 = a^2 + 2^2 + |FB|^2$$

$$25 = 4 + |FB|^2$$

$$|FB|^2 = 21$$

$|FB| = \sqrt{21}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 2



ABC üçgen
|AE| = 2 birim
|EC| = 6 birim
|CF| = 8 birim
|FB| = 5 birim
|BD| = 6 birim

Buna göre, |AD| uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

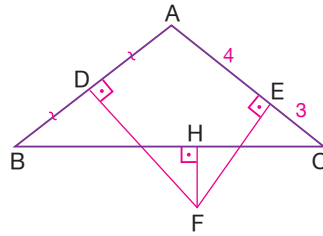
ABC üçgeninde Carnot teoremi gereğince,

$$5^2 + 6^2 + |AD|^2 = 8^2 + 2^2 + 6^2$$

$$|AD|^2 = 43$$

$|AD| = \sqrt{43}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 3



ABC üçgen
|AE| = 4 birim
|EC| = 3 birim
|CH| = 5 birim
|AD| = |DB|

Buna göre, |BH| uzunluğunu bulalım.

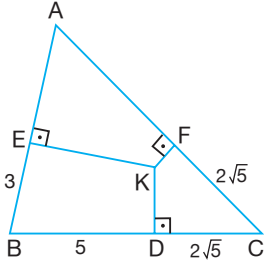
ÇÖZÜM

ABC üçgeninde Carnot teoremi gereğince,

$$|AD|^2 + 3^2 + |BH|^2 = 5^2 + 4^2 + |DB|^2$$

$|BH| = 4\sqrt{2}$ birim bulunur.

1.

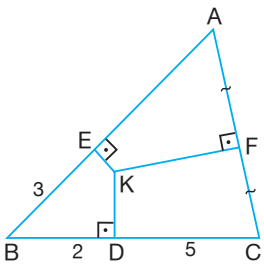


ABC üçgen
 $[KE] \perp [AB]$
 $[KF] \perp [AC]$
 $[KD] \perp [BC]$
 $|EB| = 3$ birim
 $|BD| = 5$ birim
 $|AF| = |AE| + 2$ birim
 $|FC| = 2\sqrt{5}$ birim
 $|DC| = 2\sqrt{5}$ birim

Buna göre, $|AE|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

2.

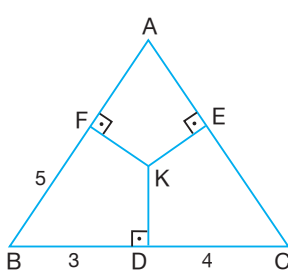


ABC üçgen
 $[KE] \perp [AB]$
 $[KF] \perp [AC]$
 $[KD] \perp [BC]$
 $|AF| = |FC|$
 $|EB| = 3$ birim
 $|BD| = 2$ birim
 $|DC| = 5$ birim

Buna göre $|AE|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{7}$ B) $\sqrt{30}$ C) $4\sqrt{2}$ D) 6 E) $2\sqrt{10}$

3.

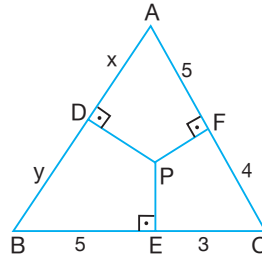


ABC üçgen
 $|BF| = 5$ birim
 $|BD| = 3$ birim
 $|DC| = 4$ birim
 $|FK| = |KE|$

Buna göre, $|EC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) 5 D) $4\sqrt{2}$ E) 6

4.

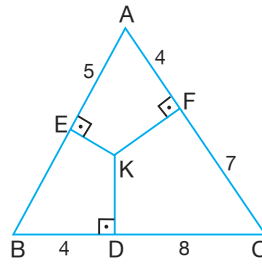


ABC üçgen
 $|BE| = 5$ birim
 $|EC| = 3$ birim
 $|FC| = 4$ birim
 $|AF| = 5$ birim
 $y - x = 2$ birim

Buna göre, $x + y$ toplamı kaç birimdir?

- A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

5.

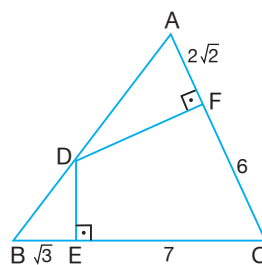


ABC üçgen
 $[KE] \perp [AB]$
 $[KF] \perp [AC]$
 $[KD] \perp [BC]$
 $|AF| = 4$ birim
 $|BD| = 4$ birim
 $|DC| = 8$ birim
 $|FC| = 7$ birim
 $|AE| = 5$ birim

Buna göre, $|EB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{10}$ C) 3 D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}$

6.

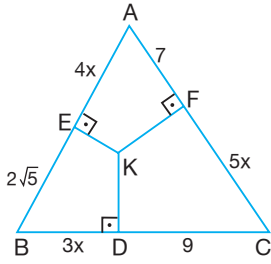


ABC üçgen
 $[DE] \perp [BC]$
 $[DF] \perp [AC]$
 $|FC| = 6$ birim
 $|EC| = 7$ birim
 $|AF| = 2\sqrt{2}$ birim
 $|BE| = \sqrt{3}$ birim

Buna göre, $|AD|^2 - |BD|^2$ kaç birimkare dir?

- A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

7.

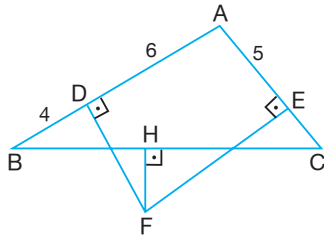


ABC üçgen
 $[KE] \perp [AB]$
 $[KF] \perp [AC]$
 $[KD] \perp [BC]$
 $|AE| = 4x$ birim
 $|EB| = 2\sqrt{5}$ birim
 $|BD| = 3x$ birim
 $|DC| = 9$ birim
 $|CF| = 5x$ birim
 $|FA| = 7$ birim

Buna göre, $|AE|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $3\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{2}$
 D) $5\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{6}$

8.

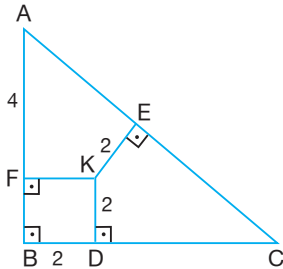


ABC üçgen
 $|AD| = 6$ birim
 $|DB| = 4$ birim
 $|AE| = 5$ birim
 $|BH| = |HC|$

Buna göre, $|EC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 2 B) 3 C) $\sqrt{11}$
 D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$

9.

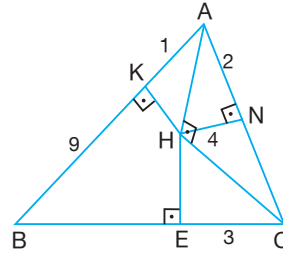


ABC dik üçgen
 $[KE] \perp [AC]$
 $[KF] \perp [AB]$
 $[KD] \perp [BC]$
 $|AF| = 4$ birim
 $|KE| = 2$ birim
 $|KD| = 2$ birim
 $|DB| = 2$ birim

Buna göre, $|EC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10.

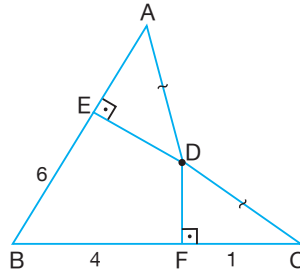


ABC üçgen
 AHC dik üçgen
 $|AN| = 2$ birim
 $|AK| = 1$ birim
 $|HN| = 4$ birim
 $|EC| = 3$ birim
 $|BK| = 9$ birim

Buna göre, $|BE|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\sqrt{30}$ B) $\sqrt{29}$ C) 5
 D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{7}$

11.

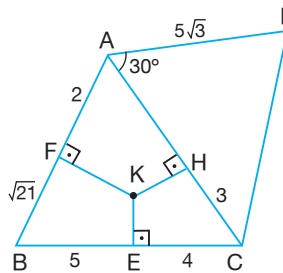


ABCD konkav
 çokgen
 $|BE| = 6$ birim
 $|BF| = 4$ birim
 $|FC| = 1$ birim

Buna göre, $|AE|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{3}$ B) 4 C) $3\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{5}$ E) $\sqrt{21}$

12.



ABC üçgen
 ADC üçgen
 $|AF| = 2$ birim
 $|BF| = \sqrt{21}$ birim
 $|HC| = 3$ birim
 $|BE| = 5$ birim
 $|EC| = 4$ birim
 $|AD| = 5\sqrt{3}$ birim
 $m(\widehat{CAD}) = 30^\circ$

Buna göre, $|DC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\sqrt{31}$ B) $\sqrt{26}$ C) $\sqrt{17}$ D) 3 E) 2



DÖRTGENLER



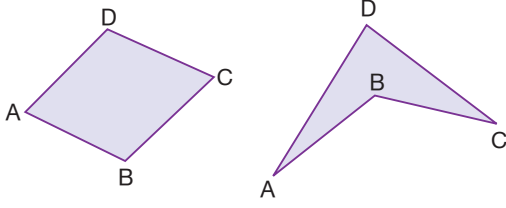
ÜNİTE – 6

- Dörtgenin Temel Elemanları
- Bir Dörtgenin Orta Tabanı
- Dış Bükey Dörtgen, İç Bükey Dörtgen
- Dörtgensel Bölgenin Alan Hesabı
- Bir Dörtgensel Bölgenin Alanının Vektörel İfadesi
- PICK Teoremi

Bilinmeyeni simgelemek için kullanılan x harfi nereden geliyor?

Bu harfin kökeni arapça "şey" kelimesine dayanıyor. Daha sonra İspanyolcaya çevrilen cebir kaynaklarında xey olarak gözüken ifade x olarak kısaltıldı ve cebirin bilinmeyeni simgelemede kullanılan en popüler harf haline geldi.

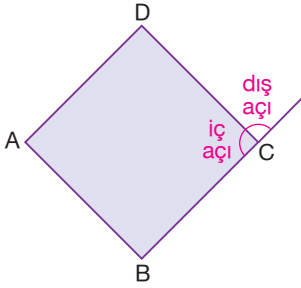
Tanım : Herhangi üçü doğrusal olmayan dört noktayı birleştiren, dört doğru parçası ile oluşturulan kapalı şekillere **dörtgen** denir.



$$[AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA] = ABCD \text{ dörtgeni}$$

Dörtgenin Temel ve Yardımcı Elemanları

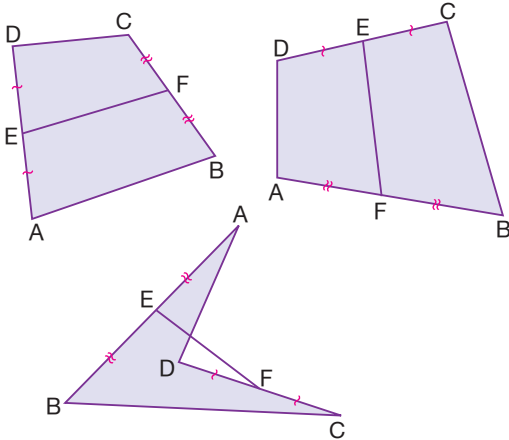
Bir dörtgenin temel elemanları **açılar**, **köşeler** ve **kenarlar**dır.



Dörtgenin yardımcı elemanları **köşegen** ve **orta tabandır**.

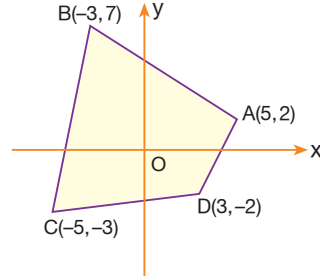
Bir Dörtgenin Orta Tabanı

Bir dörtgenin komşu olmayan iki kenarının orta noktalarını birleştiren doğru parçasına **orta taban** denir.



[EF] orta taban

ÖRNEK - 1



Yukarıda köşelerinin koordinatları verilen ABCD dörtgeninin orta tabanlarının kesim noktasının koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM

Bir dörtgende orta tabanların kesim noktası, bir orta tabanın orta noktasıdır.

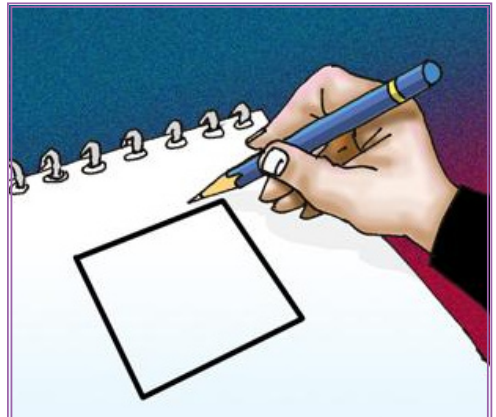
O halde,

$$[AB] \text{ nın orta noktası } E\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{7+2}{2}\right) = \left(1, \frac{9}{2}\right)$$

$$[CD] \text{ nın orta noktası } F\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{-3-2}{2}\right) = \left(-1, -\frac{5}{2}\right)$$

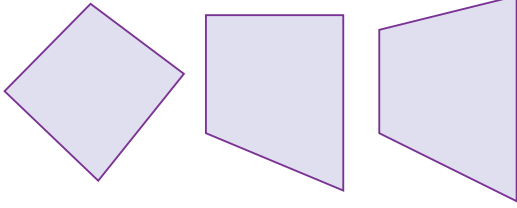
$$[EF] \text{ nın orta noktası } K\left(\frac{1-1}{2}, \frac{\frac{9}{2}-\frac{5}{2}}{2}\right)$$

Böylece, **K(0, 1)** bulunur.



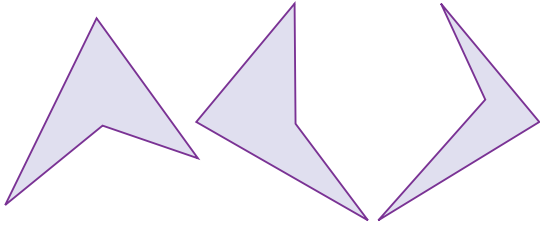
Dışbükey Dörtgen

Tüm iç açılarının ölçüleri 180° den küçük olan dörtgene **dışbükey dörtgen** denir.



İçbükey Dörtgen

Herhangi bir iç açısının ölçüsü 180° den büyük olan dörtgene **içbükey dörtgen** denir.

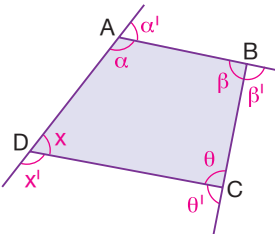


NOT :

Dörtgen denilince dışbükey olduğu anlaşılacaktır.

HATIRLATMA

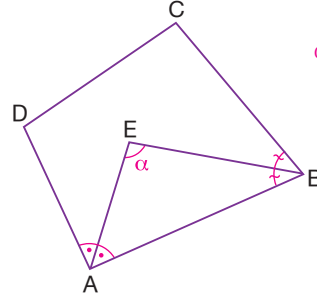
Bir dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 360° , dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.



ABCD dörtgeninde
 $x + \alpha + \beta + \theta = 360^\circ$
 $x' + \alpha' + \beta' + \theta' = 360^\circ$ dir.
 $\alpha' + \theta' = x + \beta$
 $\beta' + x' = \alpha + \theta$

Teorem :

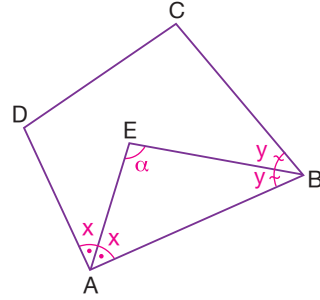
Bir ABCD dörtgeninde komşu iki açının açıortay doğrularının kesişmesi ile oluşan açının ölçüsü diğer iki açının ölçüleri toplamının yarısına eşittir.



$$\alpha = \frac{m(\hat{D}) + m(\hat{C})}{2} \text{ dir.}$$

Yukarıdaki teoremi paragraf ispat biçimini kullanarak ispatlayalım.

İspat :



$m(\widehat{DAE}) = x$ ve $m(\widehat{CBE}) = y$ diyelim.

EAB üçgeninde,

$$x + y + \alpha = 180^\circ \dots \textcircled{1}$$

ABCD dörtgeninde,

$$2x + 2y + m(\hat{D}) + m(\hat{C}) = 360^\circ \dots \textcircled{2}$$

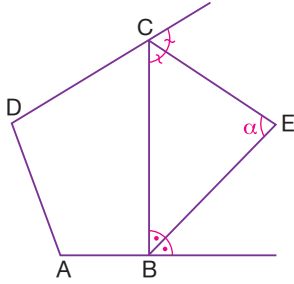
①. denklemde $\alpha = 180^\circ - x - y$ yazılabilir.

Bu ifade ②. denklemde yerine yazılırsa,

$$\alpha = \frac{m(\hat{D}) + m(\hat{C})}{2} \text{ bulunur.}$$

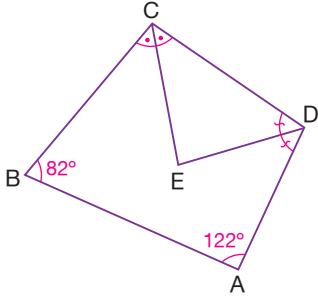
UYARI

Verilen teorem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.



$$\alpha = 180^\circ - \frac{m(\hat{D}) + m(\hat{A})}{2}$$

ÖRNEK - 1



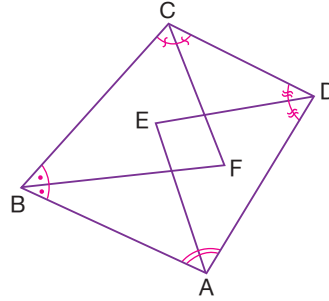
ABCD dörtgen
[CE] açıortay
[DE] açıortay
 $m(\hat{DAB}) = 122^\circ$
 $m(\hat{ABC}) = 82^\circ$

Buna göre, DEC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} m(\hat{DEC}) &= \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{B})}{2} \text{ olup} \\ &= \frac{122^\circ + 82^\circ}{2} \\ &= 102^\circ \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK - 2



ABCD dörtgen
[DE] açıortay
[AE] açıortay
[CF] açıortay
[BF] açıortay

Buna göre, $m(\hat{DEA}) + m(\hat{CFB})$ toplamını bulalım.

ÇÖZÜM

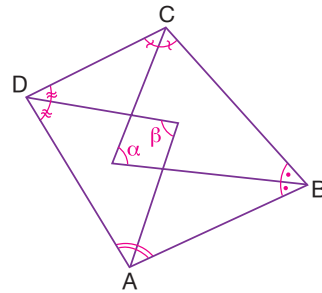
$$m(\hat{DEA}) = \frac{m(\hat{C}) + m(\hat{B})}{2}$$

$$m(\hat{CFB}) = \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{D})}{2}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

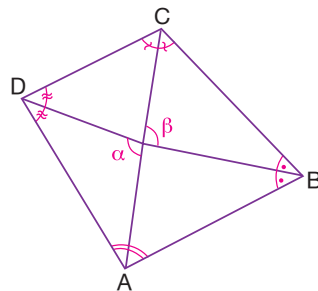
$$\begin{aligned} m(\hat{DEA}) + m(\hat{CFB}) &= \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D})}{2} \\ &= \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

SONUÇ :



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

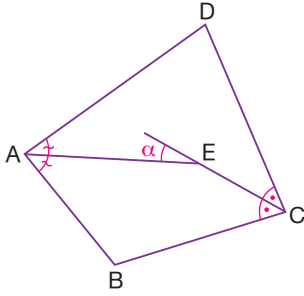
ya da



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Teorem :

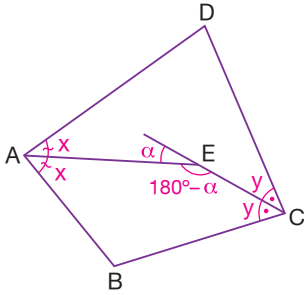
Bir ABCD dörtgeninde karşılıklı iki iç açının açıortayları arasındaki dar açının ölçüsü diğer iki açının ölçüleri farkının mutlak değerinin yarısına eşittir.



ABCD dörtgen
[CE] açıortay
[AE] açıortay
 $\alpha = \frac{|m(\hat{B}) - m(\hat{D})|}{2}$ dir.

Yukarıdaki teoremi paragraf ispat biçimini kullanarak ispatlayalım.

İspat :



ABCD dörtgeninde,

$$2x + 2y + m(\hat{B}) + m(\hat{D}) = 360^\circ \dots \textcircled{1}$$

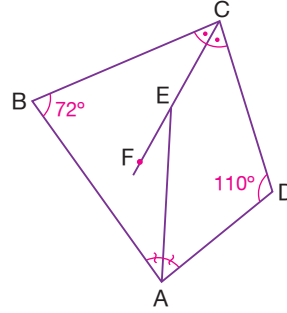
ABCE dörtgeninde,

$$x + y + m(\hat{B}) + 180^\circ - \alpha = 360^\circ \dots \textcircled{2}$$

olup ①. ve ②. denklemlerden

$$\alpha = \frac{m(\hat{B}) - m(\hat{D})}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 1



ABCD dörtgen
[CF] açıortay
[AE] açıortay
 $m(\hat{ADC}) = 110^\circ$
 $m(\hat{CBA}) = 72^\circ$

Buna göre, AEC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :

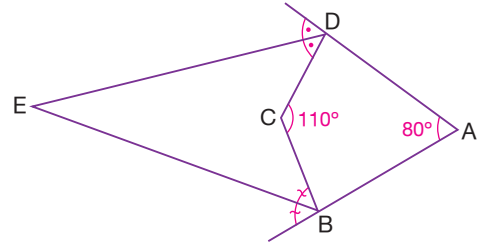
$$m(\hat{AEF}) = \frac{110^\circ - 72^\circ}{2} \text{ eşitliğinden}$$

$$m(\hat{AEF}) = 19^\circ \text{ olup}$$

Böylece,

$$m(\hat{AEC}) = 180^\circ - 19^\circ = 161^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

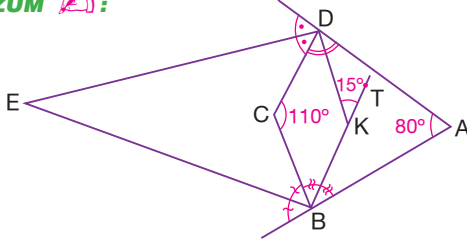


ABCD dörtgen, [DE] açıortay, [BE] açıortay

$$m(\hat{DCB}) = 110^\circ \text{ ve } m(\hat{DAB}) = 80^\circ$$

Buna göre, BED açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



ABCD dörtgeninde karşılıklı D ve B köşelerinin iç açıortayları çizilirse,

$$m(\widehat{DKT}) = \frac{110^\circ - 80^\circ}{2} = 15^\circ \text{ bulunur.}$$

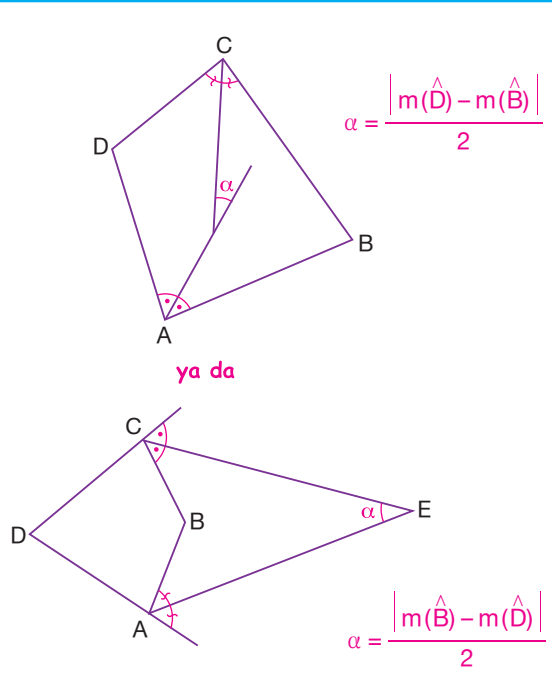
Böylece, $m(\widehat{DKB}) = 165^\circ$ olup

$m(\widehat{KDE}) = m(\widehat{KBE}) = 90^\circ$ olduğundan,

BEDK dörtgeninde iç açılar toplamından,

$$m(\widehat{BED}) = 15^\circ \text{ bulunur.}$$

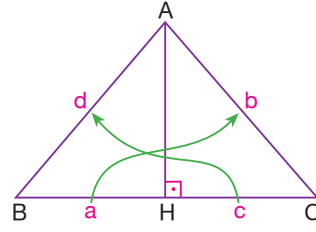
✓ Pratik Bilgi



ARAŞTIRMA

Dışbükey dörtgenlerde kullanılan teoremlerin iç bükey dörtgenlerde de kullanılıp kullanılmayacağını arkadaşlarınızla tartışıp, öğretmeninize değerlendirin.

Teorem :



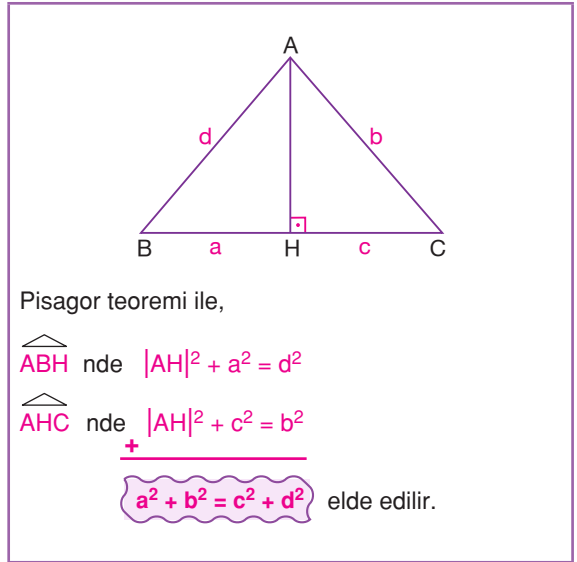
ABC üçgen

$[AH] \perp [BC]$

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

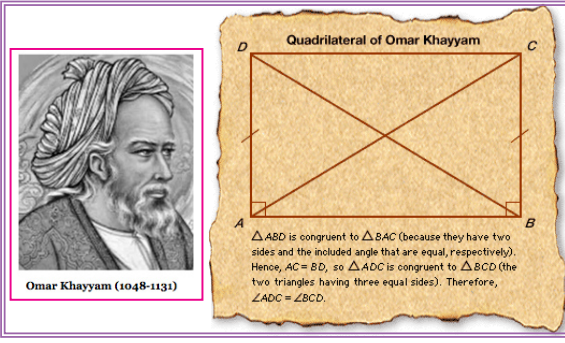
Yukarıdaki teoremi Pisagor teoremini kullanarak ispatlayalım.

İspat :

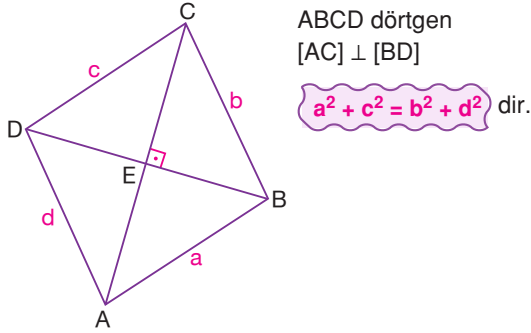


Yukarıdaki teoremi : "Birbirine en uzak parçaların uzunluklarının kareleri toplamı eşittir." şeklinde aklımızda tutabiliriz.

➤ Şimdi bu özelliği köşegenleri dik kesişen dörtgenlere (dikgen dörtgen) uygulayalım.

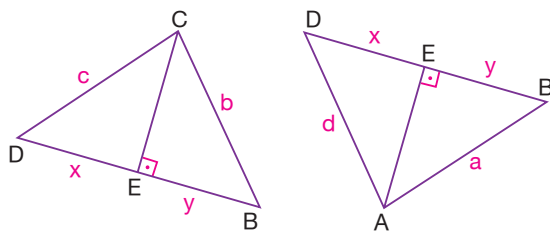


Teorem :



Yukarıdaki teoremi Pisagor teoremini kullanarak ispatlayalım.

İspat :



$$x^2 + b^2 = y^2 + c^2$$

$$d^2 + y^2 = x^2 + a^2$$

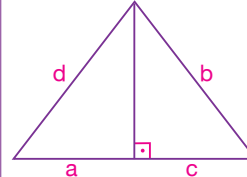
$$\begin{aligned} x^2 + b^2 &= y^2 + c^2 \\ + d^2 + y^2 &= x^2 + a^2 \\ \hline x^2 + b^2 + d^2 + y^2 &= y^2 + c^2 + x^2 + a^2 \end{aligned}$$

$$b^2 + d^2 = a^2 + c^2 \text{ bulunur.}$$

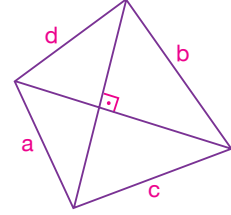
Bu teoremi "Birbirine en uzak parçaların uzunluklarının kareleri toplamı eşittir." şeklinde aklımızda tutabiliriz.

UYARI

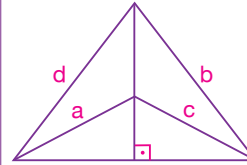
Aşağıdaki formüllerin birbirinden elde edildiklerini anlamaya çalışınız.



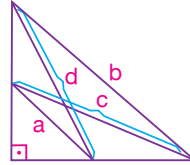
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$



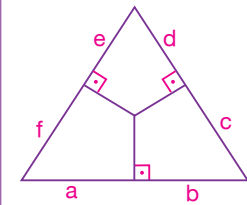
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$



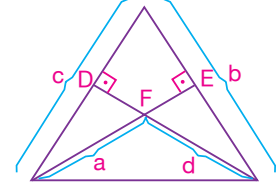
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$



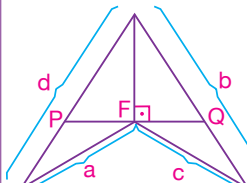
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$



$$a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2$$

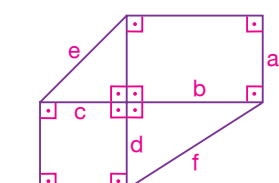


$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

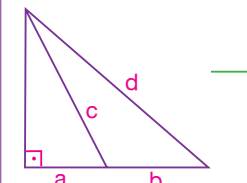


$$PQ \parallel RT$$

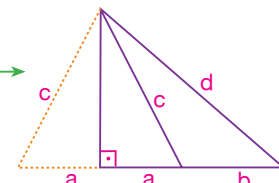
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$



$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2$$

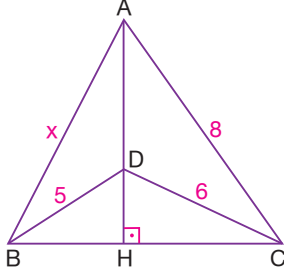


$$a^2 + d^2 = c^2 + (a + b)^2$$



$$a^2 + d^2 = c^2 + (a + b)^2$$

ÖRNEK - 1

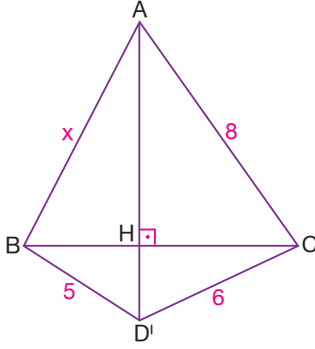


ABC üçgen
 $[AH] \perp [BC]$
 $|AC| = 8$ birim
 $|CD| = 6$ birim
 $|DB| = 5$ birim

Buna göre, $|AB| = x$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$\widehat{DBC}$ nin $[BC]$ na göre yatay yansıması alınırsa,

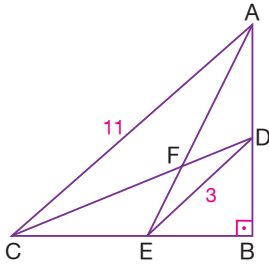


$ABD'C$ dörtgeninde,
 $x^2 + 6^2 = 5^2 + 8^2$
 $x^2 + 36 = 89$
 $x^2 = 53$
 $x = \sqrt{53}$ birim
 bulunur.

Cebreyleme cebir ile ilim köprüsünden geçemezsin, cebirsiz bir bakışla koca taşı bile seçemezsin.

İhsan İRK

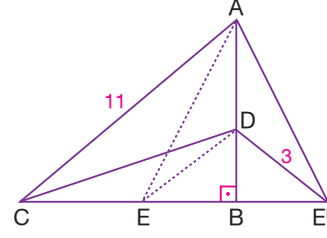
ÖRNEK - 2



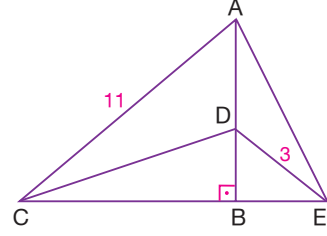
ABC dik üçgen
 $[AE] \cap [CD] = \{F\}$
 $|AC| = 11$ birim
 $|DE| = 3$ birim

Buna göre, $|AE|^2 + |CD|^2$ toplamını bulalım.

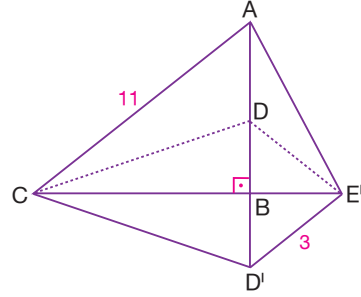
ÇÖZÜM



$\widehat{ABE}$ nin $[AB]$ na göre dikey yansımasını çizelim.

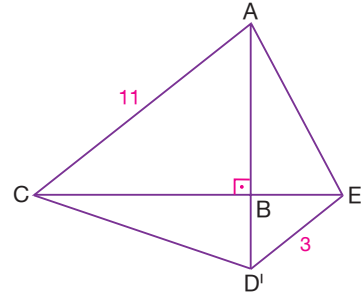


Şimdide $DE'C$ üçgenin $[E'C]$ na göre yatay yansımasını çizelim.



Yansıma dönüşümü uzunlukları koruduğundan,

$|E'D| = |E'D'|$, $|CD| = |CD'|$ olur.



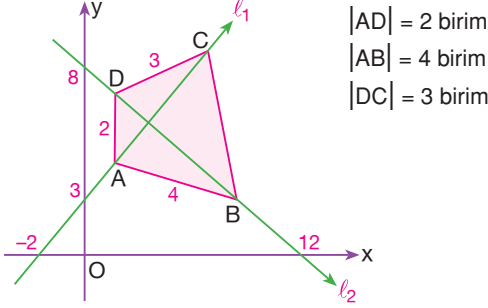
Son durumda köşegenleri dik kesişen bir dörtgen elde edilir.

Böylece, "Birbirine en uzak parçaların uzunluklarının kareleri toplamı eşit olduğundan"

$$|AE|^2 + |DC|^2 = 3^2 + 11^2 = 130 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

Analitik düzlemde ℓ_1 ve ℓ_2 doğruları üzerine kurulmuş ABCD dörtgeninde,



Buna göre, $|BC|$ uzunluğunu bulalım.

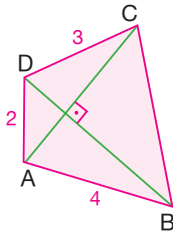
ÇÖZÜM

ℓ_1 doğrusu eksenleri $(-2, 0)$ ve $(0, 3)$ noktalarında kestiğinden eğimi $m_{\ell_1} = \frac{3}{2}$

ℓ_2 doğrusu eksenleri $(12, 0)$ ve $(0, 8)$ noktalarında kestiğinden eğimi $m_{\ell_2} = -\frac{2}{3}$ bulunur.

Dolayısıyla $m_{\ell_1} \cdot m_{\ell_2} = -1$ olduğundan doğrular dik kesişmektedir.

O halde ABCD dörtgeni köşegenleri dik kesişen bir dörtgendir.



Böylece, "Birbirine en uzak parçaların uzunluklarının kareleri toplamı eşit olduğundan"

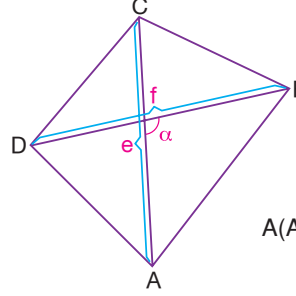
$$2^2 + |BC|^2 = 3^2 + 4^2 \text{ eşitliği ile}$$

$$|BC| = \sqrt{21} \text{ birim bulunur.}$$

DÖRTGENSEL BÖLGENİN ALAN HESABI

Teorem :

Dışbükey bir dörtgensel bölgenin alanı köşegen uzunlukları ile köşegenler arasındaki açının sinüsünün çarpımının yarısına eşittir.



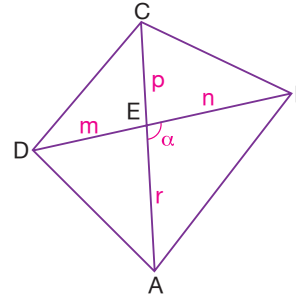
ABCD dörtgen

$$|AC| = e$$

$$|BD| = f$$

$$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin \alpha$$

İspat 1 :

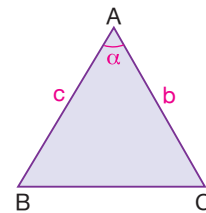


$$e = p + r$$

$$f = m + n \text{ diyelim.}$$

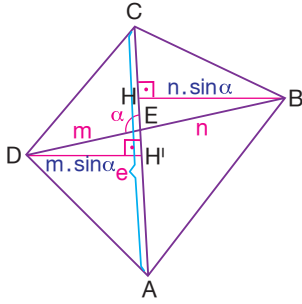
$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(\triangle ABE) + A(\triangle BEC) + A(\triangle CED) + A(\triangle AED) \\ &= \frac{1}{2} \cdot n \cdot r \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot p \cdot n \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot p \cdot m \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot m \cdot r \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sin \alpha (m+n) + \frac{1}{2} \cdot p \cdot \sin \alpha (n+m) \\ &= \frac{1}{2} (p+r) \cdot (n+m) \cdot \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} e \cdot f \cdot \sin \alpha \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

HATIRLATMA



$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

İspat 2 :



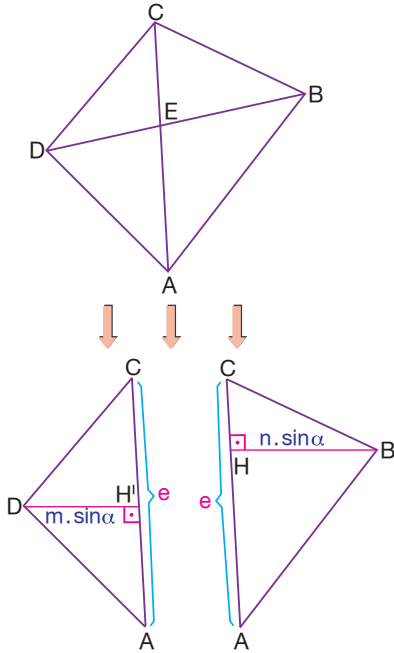
$f = m + n$ diyelim.

$[BH] \perp [AC]$ dikmesi ile BEH üçgeninde,

$|BH| = n \cdot \sin \alpha$ ve

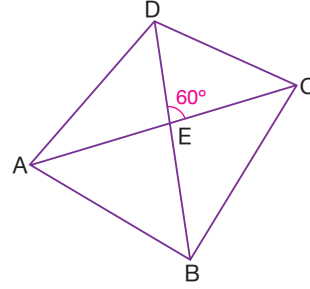
$[DH'] \perp [AC]$ dikmesi ile DEH' üçgeninde,

$|DH'| = m \cdot \sin \alpha$ bulunur. O halde,



$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(\widehat{ADC}) + A(\widehat{ABC}) \\ &= \frac{m \cdot \sin \alpha \cdot e}{2} + \frac{n \cdot \sin \alpha \cdot e}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot e \cdot \sin \alpha \cdot (m + n) \\ f &= m + n \text{ olduğundan,} \\ &= \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin \alpha \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK - 1



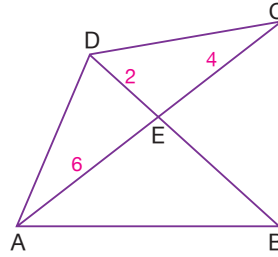
ABCD dörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
 $|AC| = 8$ birim
 $|BD| = 6$ birim
 $m(\widehat{DEC}) = 60^\circ$

Buna göre, ABCD dörtgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |AC| \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 12\sqrt{3} \text{ br}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

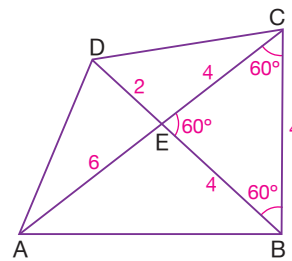
ÖRNEK - 2



ABCD dörtgen
BEC eşkenar üçgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
 $|DE| = 2$ birim
 $|EC| = 4$ birim
 $|EA| = 6$ birim

Buna göre, ABCD dörtgensel bölgesinin alanını bulalım.

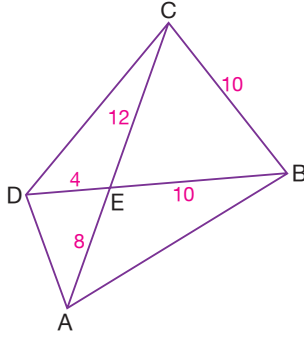
ÇÖZÜM



$\widehat{BEC}$ eşkenar üçgen olduğundan,
 $|BE| = 4$ birim
 $|BC| = 4$ birim ve
 $m(\widehat{BEC}) = 60^\circ$ olur.

$$\begin{aligned} \text{Böylece, } A(ABCD) &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 15\sqrt{3} \text{ br}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

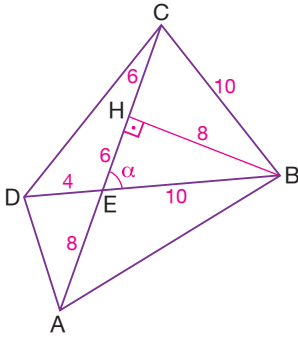
ÖRNEK - 3



ABCD dörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
 $|BC| = 10$ birim
 $|BE| = 10$ birim
 $|EC| = 12$ birim
 $|ED| = 4$ birim
 $|EA| = 8$ birim

Buna göre, ABCD dörtgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

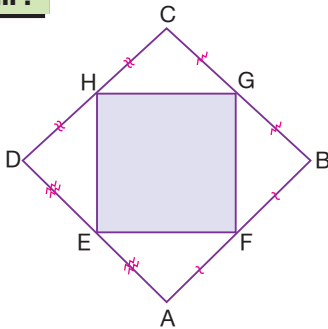


ABCD dörtgeninde $[BH] \perp [AC]$ ile $6 - 8 - 10$ dik üçgeni elde edilir.

O halde, $\sin \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ olup,

$$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 14 \cdot \frac{4}{5} = 112 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

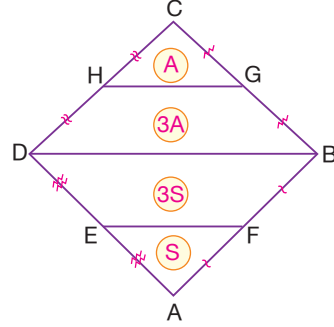
Teorem :



ABCD dörtgen E, F, G, H orta noktalar ise

$$A(EFGH) = \frac{A(ABCD)}{2} \text{ dir.}$$

İspat :



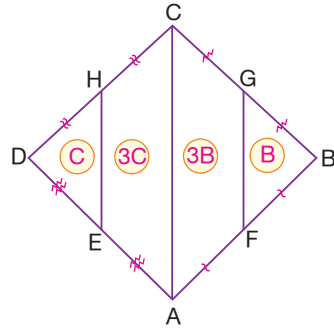
[DB] köşegeni ile benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ olan $\triangle CHG$ ve $\triangle CDB$ üçgenleri elde edilir.

$$\text{O halde, } \frac{A(\triangle CHG)}{A(\triangle CDB)} = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

Aynı şekilde, $\triangle AEF$ ile $\triangle ADB$ benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ olan benzer iki üçgendir.

$$\text{O halde, } \frac{A(\triangle AEF)}{A(\triangle ADB)} = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

Şimdi aynı işlemleri yanlardan yapalım.



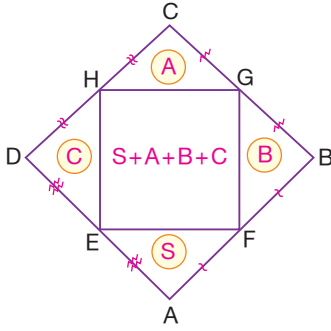
[CA] köşegeni ile benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ olan $\triangle BGF$ ve $\triangle BCA$ üçgenleri elde edilir.

$$\text{O halde, } \frac{A(\triangle BGF)}{A(\triangle BCA)} = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

Aynı şekilde, $\triangle DEH$ ile $\triangle DAC$ benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ olan benzer iki üçgendir.

$$\text{O halde, } \frac{A(\triangle DEH)}{A(\triangle DAC)} = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

Bu durumda tüm şekiller gözönünde bulundurulursa,



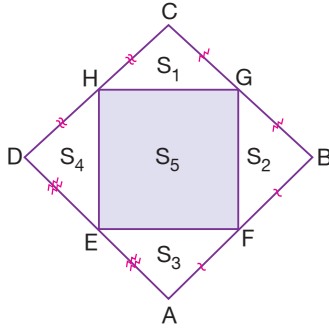
$$A(ABCD) = 4A + 4S = 4B + 4C$$

$$A + S = B + C \text{ olur.}$$

$$\text{Böylece, } A(EFGH) = \frac{A(ABCD)}{2} \text{ bulunur.}$$

SONUÇ :

1.

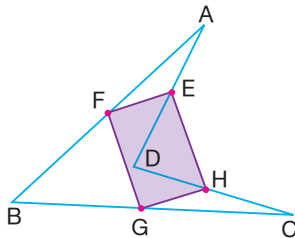


ABCD dörtgeninde E, F, G, H orta noktalar ise

$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4 \text{ olup } S_5 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \text{ ve}$$

$$A(EFGH) = \frac{A(ABCD)}{2} \text{ dir.}$$

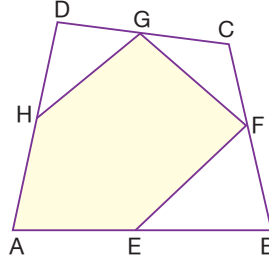
2.



ABCD dörtgeninde E, F, G, H orta noktalar ise

$$A(EFGH) = \frac{A(ABCD)}{2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 1



ABCD dörtgen

E, F, G, H orta noktalar

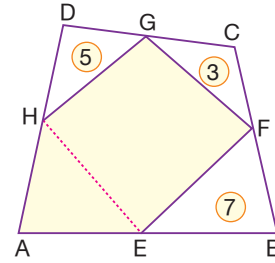
$$A(\widehat{DHG}) = 5 \text{ br}^2$$

$$A(\widehat{GFC}) = 3 \text{ br}^2$$

$$A(\widehat{FEB}) = 7 \text{ br}^2$$

Buna göre, AEFGH beşgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :



E, F, G, H orta noktalar ise,

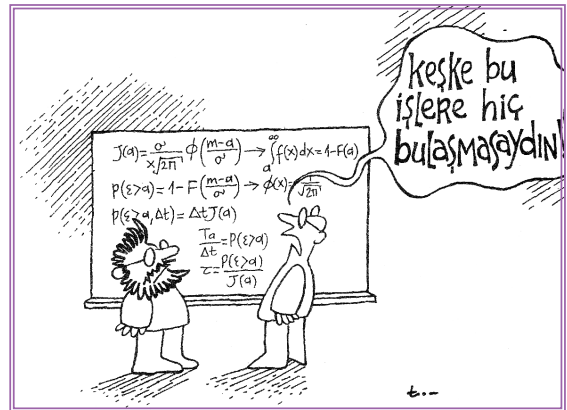
$$A(\widehat{AHE}) + A(\widehat{GCF}) = A(\widehat{FEB}) + A(\widehat{DHG}) \text{ olup}$$

$$A(\widehat{AHE}) + 3 = 5 + 7$$

$$A(\widehat{AHE}) = 9 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

$$A(EFGH) = 9 + 7 + 3 + 5 = 24 \text{ br}^2 \text{ olur.}$$

$$\text{Böylece, } A(AEFGH) = 33 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

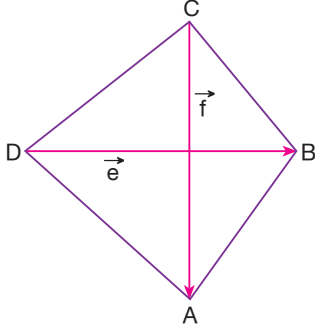


(Matematik Dünyası Dergisi-www.matematikdunyasi.org)

Bir Dörtgensel Bölgenin Alanının Vektörel İfadesi

Teorem :

Köşegen vektörleri $\vec{e}$ ve $\vec{f}$ olan bir dörtgensel bölgenin alanı;

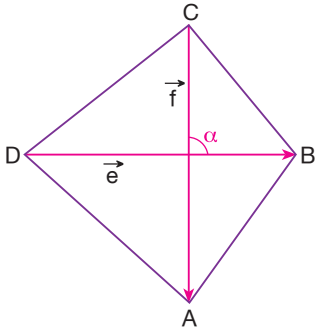


$\overrightarrow{DB} = \vec{e}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{f}$ ise

$A(ABCD) = \frac{\sqrt{\|\vec{e}\|^2 \cdot \|\vec{f}\|^2 - \langle \vec{e}, \vec{f} \rangle^2}}{2}$ ile hesaplanır.

İspat :

$\vec{e}$ ve $\vec{f}$ bir dörtgenin köşegen vektörleri ve bu vektörler arasındaki açı α olsun.



Dışbükey bir dörtgensel bölgenin alanı, köşegen uzunlukları ile köşegenler arasındaki açının sinüsünün çarpımının yarısına eşit olduğundan,

$$S = A(ABCD) = \frac{\|\vec{e}\| \cdot \|\vec{f}\| \cdot \sin \alpha}{2} \text{ dir.}$$

Her iki yanın karesi alınırsa,



$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{\|\vec{e}\|^2 \cdot \|\vec{f}\|^2 \cdot \sin^2 \alpha}{4} \\ S^2 &= \frac{\|\vec{e}\|^2 \cdot \|\vec{f}\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha)}{4} \\ S^2 &= \frac{\|\vec{e}\|^2 \cdot \|\vec{f}\|^2 - \|\vec{e}\|^2 \cdot \|\vec{f}\|^2 \cdot \cos^2 \alpha}{4} \\ \langle \vec{e}, \vec{f} \rangle &= \|\vec{e}\| \cdot \|\vec{f}\| \cdot \cos \alpha \text{ olduğundan,} \\ \langle \vec{e}, \vec{f} \rangle^2 &= \|\vec{e}\|^2 \cdot \|\vec{f}\|^2 \cdot \cos^2 \alpha \text{ olup,} \\ S^2 &= \frac{\|\vec{e}\|^2 \cdot \|\vec{f}\|^2 - \langle \vec{e}, \vec{f} \rangle^2}{4} \\ S &= \frac{\sqrt{\|\vec{e}\|^2 \cdot \|\vec{f}\|^2 - \langle \vec{e}, \vec{f} \rangle^2}}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

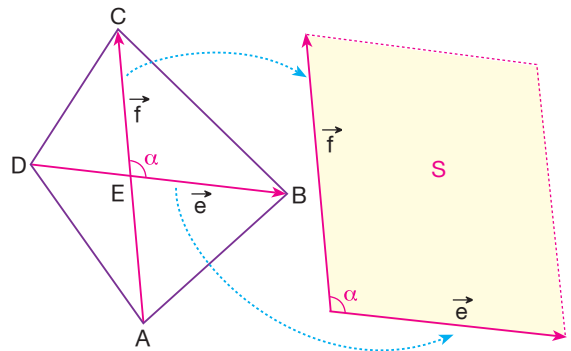
NOT :

Yukardaki teorem konkav bir dörtgen içinde geçerlidir.

SONUÇ :

Bir dörtgensel bölgenin alanı, köşegenleri üzerine kurulan paralelkenarsal bölgenin alanının yarısına eşittir.

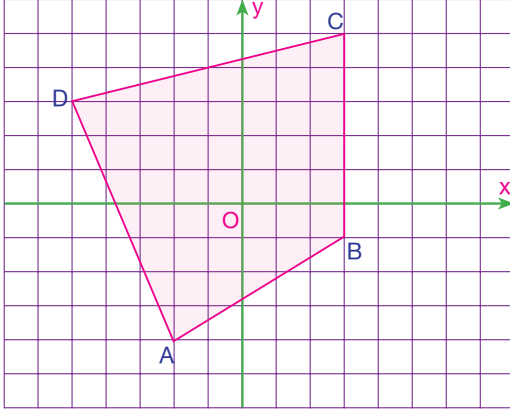
Şöyleki;



$$A(ABCD) = \frac{S}{2} = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{e}\| \cdot \|\vec{f}\| \cdot \sin \alpha$$



ÖRNEK - 1



Yukarıda köşelerinin koordinatları verilen dörtgen-
gensel bölgenin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

ABCD dörtgeninin köşe koordinatları,

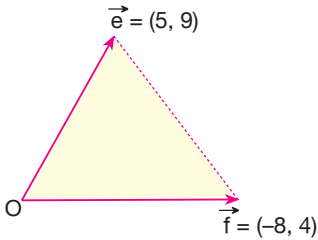
- A(-2, -4)
- B(3, -1)
- C(3, 5)
- D(-5, 3) olup köşegen vektörleri

$$\vec{e} = \overrightarrow{AC} = C - A = (5, 9)$$

$$\vec{f} = \overrightarrow{BD} = D - B = (-8, 4) \text{ olur.}$$

ABCD dörtgenel bölgesinin alanı köşegenleri
üzerine kurulan üçgensel bölgenin alanına eşit idi.

O halde,



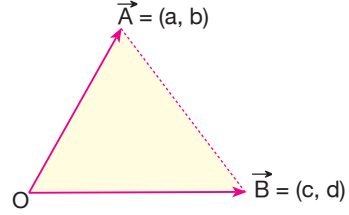
Yukarıdaki taralı alan ABCD dörtgenel bölgesi-
nin alanına eşittir.

$$\begin{aligned} \text{Yani, } A(ABCD) &= \frac{1}{2} \cdot |(-8) \cdot 9 - 4 \cdot 5| \\ &= 46 \text{ br}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

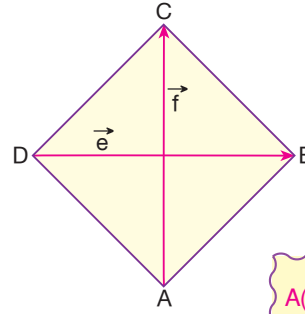
HATIRLATMA

10. sınıftan $\vec{A} = (a, b)$ ve $\vec{B} = (c, d)$ vektörleri üzeri-
ne kurulan üçgensel bölgenin alanının,

$$A(\triangle OAB) = \frac{|bc - ad|}{2} \text{ olduğunu hatırlayalım.}$$



✓ Pratik Bilgi



Köşegen vektörleri,

$$\vec{e} = (a, b)$$

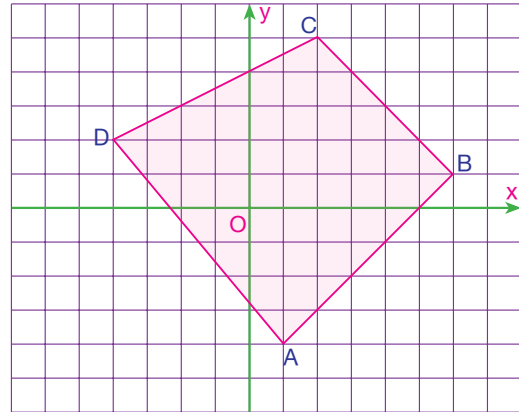
$$\vec{f} = (c, d)$$

olan ABCD dörtgen-
sel bölgesinin alanı

$$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |bc - ad|$$

ile bulunabilir.

ÖRNEK - 2



Yukarıda köşelerinin koordinatları verilen ABCD
dörtgenel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

ABCD dörtgeninin köşe koordinatları,

- A(1, -4)
- B(6, 1)
- C(2, 5)
- D(-4, 2) olup

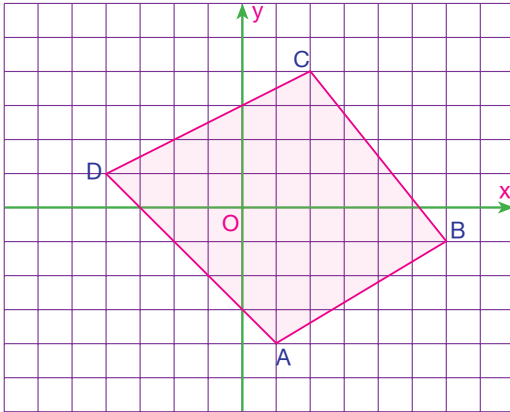
ABCD dörtgeninin köşegen vektörleri,

$$\vec{e} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1, 9)$$

$$\vec{f} = \overrightarrow{BD} = D - B = (-10, 1) \text{ olup,}$$

$$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |9(-10) - 1 \cdot 1| = \frac{91}{2} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3



Yukarıda köşelerinin koordinatları verilen dörtgenel bölgenin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

ABCD dörtgeninin köşe koordinatları,

- A(1, -4)
- B(6, -1)
- C(2, 4)
- D(-4, 1) olup

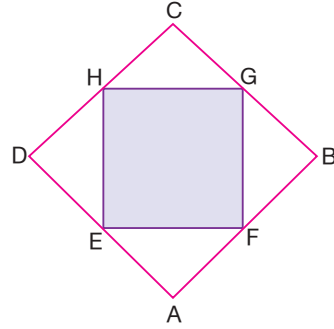
ABCD dörtgeninin köşegen vektörleri,

$$\vec{e} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1, 8)$$

$$\vec{f} = \overrightarrow{BD} = D - B = (-10, 2) \text{ olup,}$$

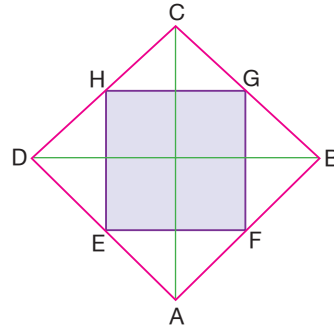
$$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |8(-10) - 1 \cdot 2| = 41 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

- Bir dörtgenin kenar orta noktalarının birleştirilmesi ile elde edilen dörtgen paralelkenardır.



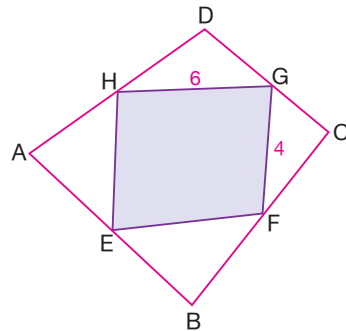
- E, F, G, H orta noktalar ise EFGH paralelkenardır.

- Bir dörtgenin kenar orta noktalarının birleştirilmesi ile elde edilen paralelkenarsal bölgenin çevresi dörtgenin köşegen uzunlukları toplamına eşittir.



- E, F, G, H orta noktalar ise,
 $\Ç(EFGH) = |AC| + |BD|$ dir.

ÖRNEK - 4



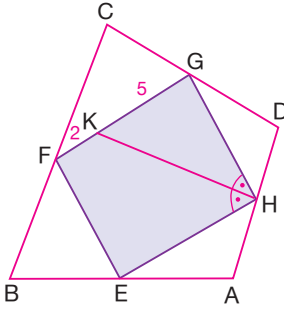
ABCD dörtgen
E, F, G, H orta
noktalar
 $|HG| = 6$ birim
 $|GF| = 4$ birim

Buna göre, ABCD dörtgeninin köşegen uzunlukları toplamını bulalım.

ÇÖZÜM :

$\widehat{C(EFGH)} = |AC| + |BD|$ olduğundan,
 $|AC| + |BD| = 2(6 + 4) = 20$ birim bulunur.

ÖRNEK - 5

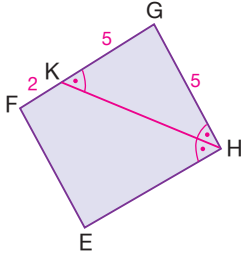


ABCD dörtgen
 E, F, G, H orta
 noktalar
 $[HK]$ açıortay
 $|GK| = 5$ birim
 $|KF| = 2$ birim

Buna göre, ABCD dörtgeninin köşegen uzunlukları toplamını bulalım.

ÇÖZÜM :

E, F, G, H orta noktalar olduğundan,
 EKGH bir paralelkenardır.

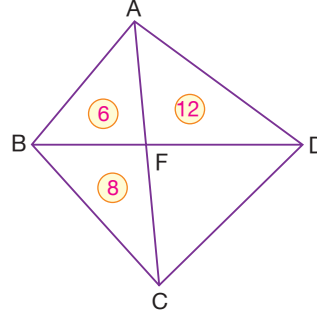


$[HE] \parallel [GF]$ olup
 $\widehat{m(GKH)} = \widehat{m(KHE)}$ (iç ters açılar) olduğundan,
 $|HG| = |GK| = 5$ birim dir.

Böylece, ABCD dörtgeninde köşegen uzunluklarının toplamı,

$\widehat{C(EFGH)} = |AC| + |BD| = 24$ birim bulunur.

ÖRNEK - 6



ABCD dörtgen
 $[AC]$ köşegen
 $[BD]$ köşegen
 $[AC] \cap [BD] = \{F\}$
 $\widehat{A(ABF)} = 6 \text{ br}^2$
 $\widehat{A(AFD)} = 12 \text{ br}^2$
 $\widehat{A(BFC)} = 8 \text{ br}^2$

Buna göre, CDF üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

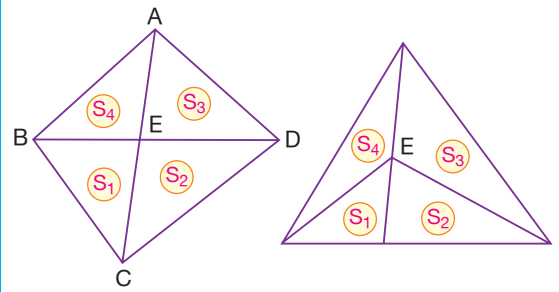
$\widehat{ABC}$ nde alanlar oranı tabanlar oranına eşit olduğuna göre $\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{6}{8}$ ve

$\widehat{ACD}$ nde alanlar oranı tabanlar oranına eşit olduğuna göre $\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{12}{\widehat{A(FCD)}}$ yazılabilir.

Böylece, $\frac{6}{8} = \frac{12}{\widehat{A(FCD)}}$ eşitliğinden

$6 \cdot \widehat{A(FCD)} = 8 \cdot 12 \Rightarrow \widehat{A(FCD)} = 16 \text{ br}^2$ bulunur.

✓ Pratik Bilgi



$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

PICK TEOREMİ

Birim karelerden oluşan bir düzlem düşünelim. Bu düzlem üzerinde karelerin köşelerini kullanarak herhangi bir çokgen oluşturduğumuzda bu çokgenin alanını bulmak uzun zaman alabilir.

George Pick 1899 da bu hesabın kolay bir yolunu keşfetmiş ve adına "**Pick Teoremi**" demiş.

Teorem şöyle,

S : Çokgenin sınırlarındaki nokta sayısı

İ : Çokgenin içindeki nokta sayısı

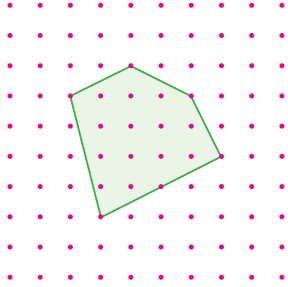
olmak üzere;

Çokgenin alanı = $\frac{S}{2} + İ - 1$ şeklindedir.

SONUÇ :

$$\text{Alan} = \frac{\text{Sınırdaki nokta sayısı}}{2} + \text{İç bölgedeki nokta sayısı} - 1$$

ÖRNEK - 1



Yukarıda birim kareler üzerinde kurulmuş çokgenel bölgenin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

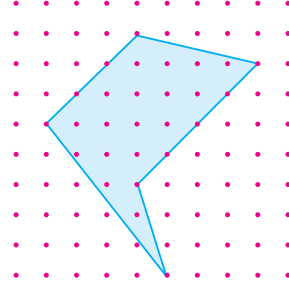
S : Çokgenin sınırlarındaki nokta sayısı = 6

İ : Çokgenin içindeki nokta sayısı = 13 olup

Pick teoremine göre,

$$\begin{aligned} \text{Çokgenel bölgenin alanı} &= \frac{6}{2} + 13 - 1 \\ &= 15 \text{ br}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK - 2



Yukarıda birim kareler üzerinde kurulmuş çokgenel bölgenin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

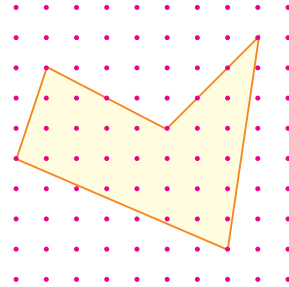
S : Çokgenin sınırlarındaki nokta sayısı = 10

İ : Çokgenin içindeki nokta sayısı = 17 olup

Pick teoremine göre,

$$\begin{aligned} \text{Çokgenel bölgenin alanı} &= \frac{10}{2} + 17 - 1 \\ &= 21 \text{ br}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK - 3



Yukarıda birim kareler üzerinde kurulmuş çokgenel bölgenin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

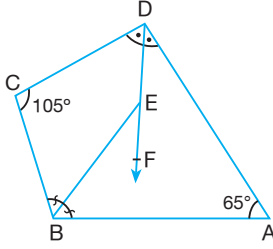
S : Çokgenin sınırlarındaki nokta sayısı = 8

İ : Çokgenin içindeki nokta sayısı = 24 olup

Pick teoremine göre,

$$\begin{aligned} \text{Çokgenel bölgenin alanı} &= \frac{8}{2} + 24 - 1 \\ &= 27 \text{ br}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

1.

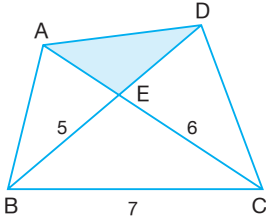


ABCD dörtgen
[DF] açıortay
[BE] açıortay
 $m(\widehat{DAB}) = 65^\circ$
 $m(\widehat{DCB}) = 105^\circ$

Buna göre, BEF açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

2.

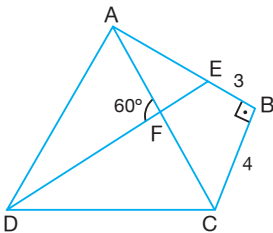


ABCD dörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
 $|BE| = 5$ birim
 $|EC| = 6$ birim
 $|BC| = 7$ birim

Yukarıdaki şekilde $A(\widehat{AEB}) \cdot A(\widehat{DEC}) = 36 \text{ br}^4$ olduğuna göre, $A(\widehat{AED})$ kaç br^2 dir?

- A) 2 B) $\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 3 E) $2\sqrt{3}$

3.

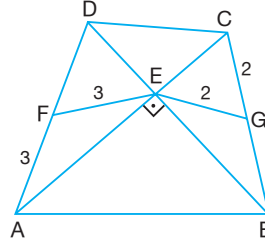


ABCD bir dörtgen
[AC] köşegen
[AB] $\perp$ [BC]
 $|EB| = 3$ birim
 $|BC| = 4$ birim

$|AC| \cdot |ED| = 10\sqrt{3} \text{ br}^2$ olduğuna göre, ABCD dörtgenel bölgesinin alanı kaç birim karedir?

- A) 12 B) $\frac{25}{2}$ C) 13 D) $\frac{27}{2}$ E) 15

4.

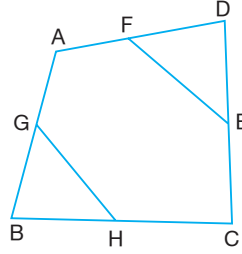


ABCD dörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
[AC] $\perp$ [BD]
 $|AF| = 3$ birim
 $|FE| = 3$ birim
 $|EG| = 2$ birim
 $|GC| = 2$ birim
 $|DC| = 2\sqrt{3}$ birim

Buna göre, |AB| uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{11}$ C) $2\sqrt{10}$
D) $\sqrt{13}$ E) $\sqrt{21}$

5.

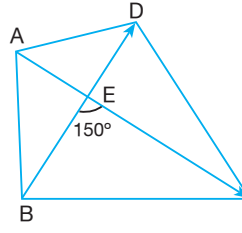


ABCD dörtgen
E, F, G, H orta noktalar
 $A(\widehat{DFE}) = 7 \text{ br}^2$
 $A(\widehat{GBH}) = 6 \text{ br}^2$

Buna göre, ABCD dörtgenel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?

- A) 38 B) 45 C) 52 D) 54 E) 56

6.

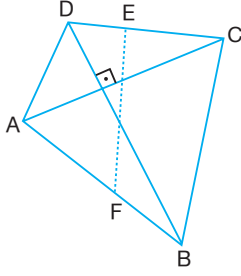


ABCD dörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
 $|\overrightarrow{BD}| = 8$ birim
 $|\overrightarrow{AC}| = 10$ birim
 $m(\widehat{BEC}) = 150^\circ$

Buna göre, ABCD dörtgenel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?

- A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

7.

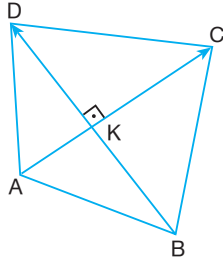


ABCD dörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
[BD] $\perp$ [AC]
|BD| = 6 birim
|AC| = 3 birim
|EC| = 2|DE|
|AF| = 2|FB|

Buna göre, |FE| uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{10}$ E) $\sqrt{17}$

8.

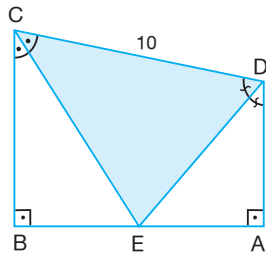


ABCD dörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$
 $\overrightarrow{AC} = (6, 4)$
 $\overrightarrow{BD} = (-8, k)$

Buna göre, ABCD dörtgensel bölgesinin alanı kaç br² dir?

- A) 52 B) 50 C) 48 D) 46 E) 44

9.

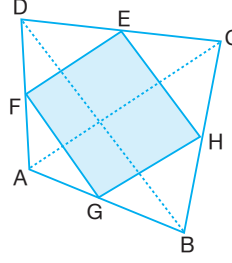


ABCD dörtgen
 $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{EDC})$
 $m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{ECB})$
|DC| = 10 birim
|AB| = 8 birim

Buna göre, $A(\widehat{DEC})$ kaç birim karedir?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

10.

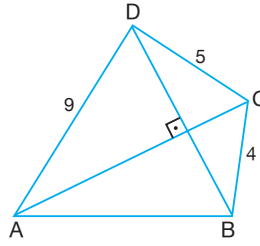


ABCD dörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
E, F, G, H orta noktalar
|AC| = 13 birim
|BD| = 19 birim

Buna göre, FEHG dörtgeninin çevresi kaç birimdir?

- A) 24 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

11.

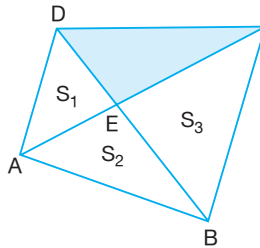


ABCD dörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
[BD] $\perp$ [AC]
|DC| = 5 birim
|AD| = 9 birim
|BC| = 4 birim

Buna göre, |AB| uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\sqrt{51}$ B) $\sqrt{53}$ C) $\sqrt{55}$
D) $6\sqrt{2}$ E) $7\sqrt{3}$

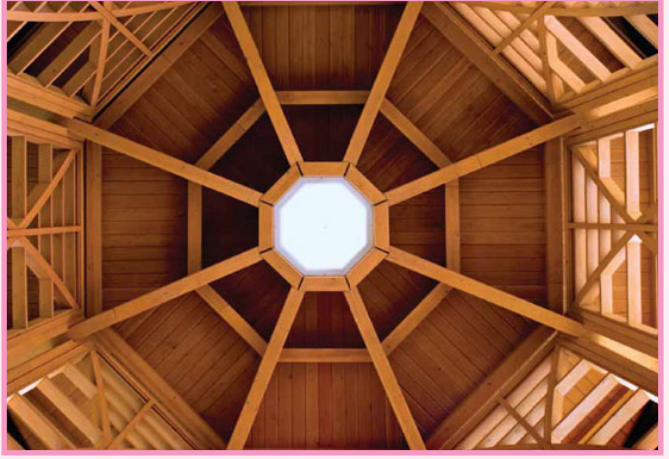
12.



ABCD dörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
[AC] $\cap$ [BD] = {E}
 $S_1 = 6 \text{ br}^2$
 $S_2 = 8 \text{ br}^2$
 $S_3 = 12 \text{ br}^2$

Buna göre, DEC üçgensel bölgesinin alanı kaç br² dir?

- A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7



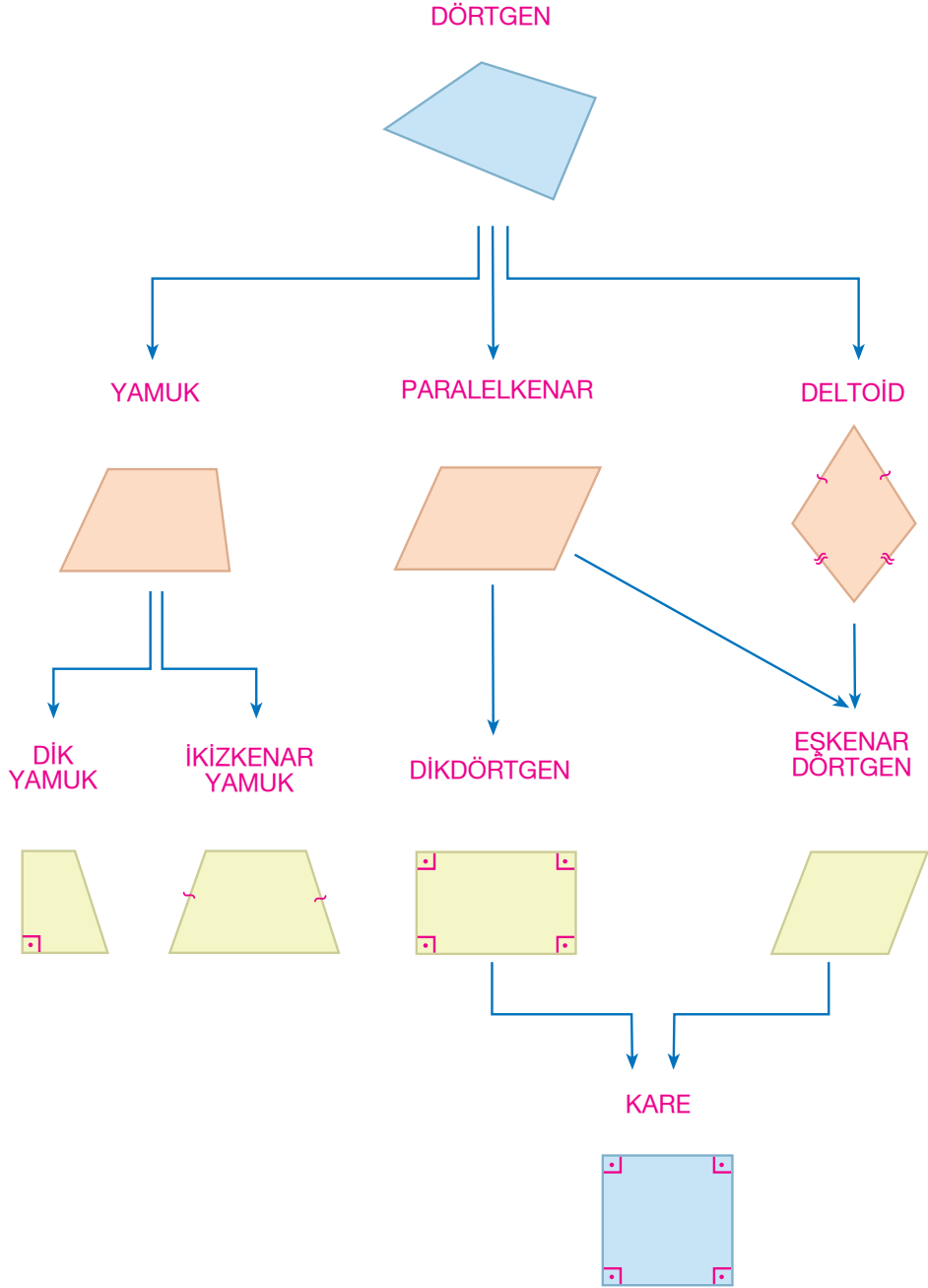
ÖZEL DÖRTGENLER



ÜNİTE - 7

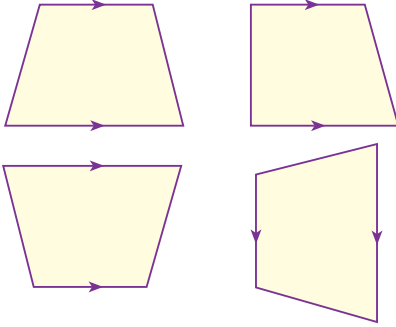
- Yamuk
- Paralelkenar
- Dikdörtgen
- Eşkenar Dörtgen
- Kare
- Deltoid

Dörtgenlerin Sınıflandırılması



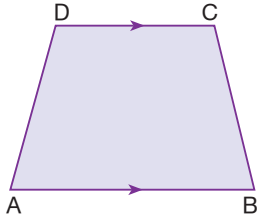
YAMUK

Kenarlarından yalnız ikisi paralel olan dörtgene **yamuk** denir.



Yamuğun Tabanları

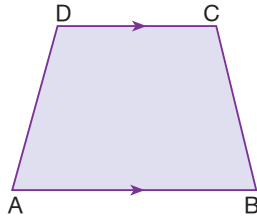
Yamuğun paralel kenarlarına **tabanlar** denir.



[AB] ve [DC]
yamuğun tabanları

Yamuğun Yan Kenarları (Ayakları)

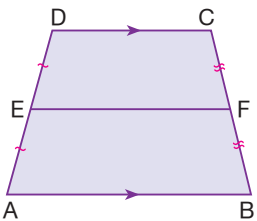
Yamuğun paralel olmayan kenarlarına **yan kenarlar (ayaklar)** denir.



[AD] ve [BC]
yamuğun yan kenarları

Yamuğun Orta Tabanı

Bir yamukta paralel olmayan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasına **orta taban** denir.



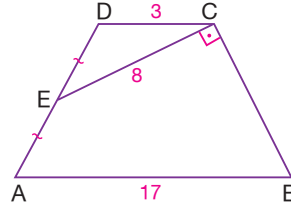
[EF] orta taban

$$|EF| = \frac{|AB| + |CD|}{2}$$

ile bulunur.

➤ Orta taban yamuğun tabanlarına paraleldir.

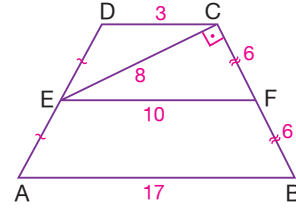
ÖRNEK - 1



$$\begin{aligned} |DE| &= |EA| \\ |AB| &= 17 \text{ birim} \\ |CD| &= 3 \text{ birim} \\ |CE| &= 8 \text{ birim} \end{aligned}$$

Buna göre, |BC| uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



[EF] orta tabanı çizilirse,

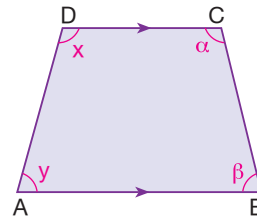
$$|EF| = \frac{17 + 3}{2} \Rightarrow |EF| = 10 \text{ birim olur.}$$

6 - 8 - 10 dik üçgeninden |CF| = 6 birim dir.

Dolayısıyla |BC| = 12 birim bulunur.

Yamukta Aç

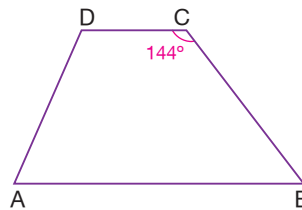
Bir yamukta bir yan kenarla tabanların oluşturduğu iç açların ölçüleri toplamı 180° dir.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$x + y = 180^\circ$$

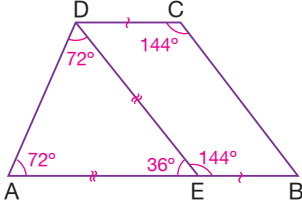
ÖRNEK - 1



$$\begin{aligned} \text{ABCD yamuk} \\ |AB| &= |BC| + |CD| \\ m(\widehat{DCB}) &= 144^\circ \end{aligned}$$

Buna göre, BAD açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

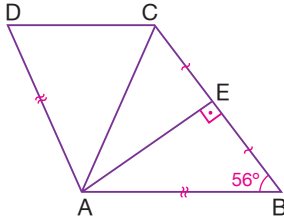


[BC] ye paralel olacak şekilde [DE] çizilir ve DEBC paralelkenarı oluşturulur.

Dolayısıyla $m(\widehat{DEB}) = 144^\circ$ ve $|DE| = |AE|$ olur.

AED ikizkenar üçgeninde $m(\widehat{DAB}) = 72^\circ$ bulunur.

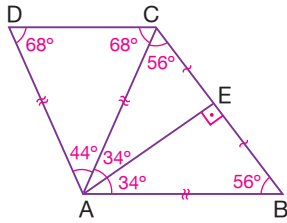
ÖRNEK - 2



ABCD yamuk
 $[AE] \perp [BC]$
 $|CE| = |EB|$
 $|AD| = |AB|$
 $m(\widehat{ABC}) = 56^\circ$

Buna göre, DAE açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM



[AC] çizilirse, ABC ikizkenar üçgeni elde edilir.

Dolayısıyla,

$m(\widehat{CAB}) = 68^\circ$ ve $[DC] \parallel [AB]$

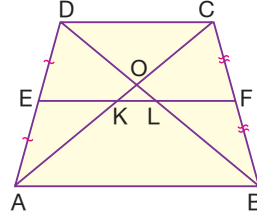
olduğundan $m(\widehat{DCA}) = 68^\circ$ bulunur.

DAC ikizkenar üçgen olduğundan,

$m(\widehat{DAC}) = 44^\circ$ olur ve $m(\widehat{DAE}) = 78^\circ$ bulunur.

Teorem :

Bir yamukta orta tabanın köşegenler arasında kalan parçasının uzunluğu taban uzunlukları farkının yarısına eşittir.



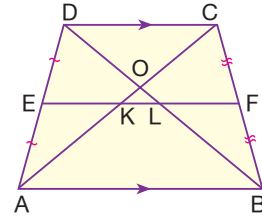
ABCD yamuk

$$|KL| = \frac{|AB| - |DC|}{2}$$

ile bulunur.

Yukarıdaki teoremi Tales teoremini kullanarak ispatlayalım.

İspat :



BDC üçgeninde Tales teoremi ile

$$\frac{|BF|}{|BC|} = \frac{|LF|}{|DC|} \text{ eşitliğinden,}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|LF|}{|DC|} \Rightarrow |DC| = 2|LF|. \dots \textcircled{1}$$

ADC üçgeninde Tales teoremi ile,

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|EK|}{|DC|} \text{ eşitliğinden,}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|EK|}{|DC|} \Rightarrow |DC| = 2|EK|. \dots \textcircled{2}$$



①. ve ②. eşitliklerden $|EK| = |LF|$ olur.

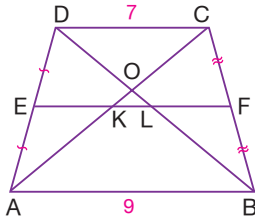
$$|KL| = |EF| - (|EK| + |KF|)$$

$$|KL| = \frac{|AB| + |DC|}{2} - 2|EK|$$

$$|KL| = \frac{|AB| + |DC|}{2} - |DC|$$

$$|KL| = \frac{|AB| - |DC|}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3



ABCD yamuk
[AC] köşegen
[BD] köşegen
[EF] orta taban
 $|AB| = 9$ birim
 $|DC| = 7$ birim

Buna göre, $|KL|$ uzunluğunu bulalım.

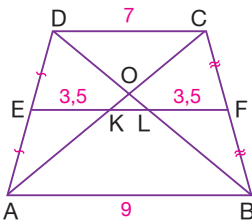
ÇÖZÜM

1. Yol :

$$|KL| = \frac{|AB| - |DC|}{2} \text{ eşitliğinden,}$$

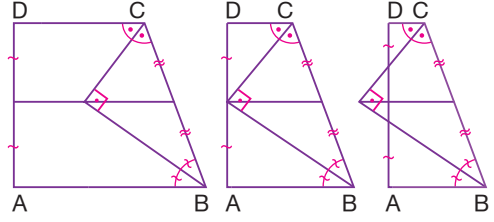
$$|KL| = \frac{9 - 7}{2} \Rightarrow |KL| = 1 \text{ birim bulunur.}$$

2. Yol :

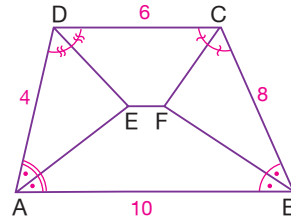


ADC, BDC, CAB üçgenlerinde Tales teoremi yazılırsa $|EL| = 4,5$ birim ve $|KL| = 1$ birim bulunur.

➤ Bir yamukta bir yan kenarın tabanlarla yaptığı açıların açıortay doğruları orta taban üzerinde ya da uzantısına dik olarak kesilir.



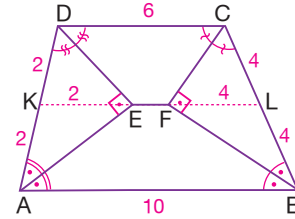
ÖRNEK - 4



ABCD yamuk
[CF], [DE], [AE], [BF]
açıortay
 $|AB| = 10$ birim
 $|BC| = 8$ birim
 $|CD| = 6$ birim
 $|DA| = 4$ birim

Buna göre, $|EF|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

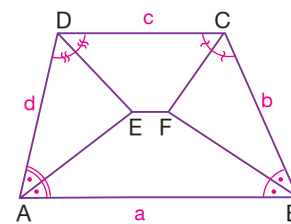


EF doğrusu yamuğun orta tabanı üzerinde olup

$$|KL| = \frac{12 + 6}{2} = 8 \text{ birim bulunur.}$$

Böylece, $|EF| = 8 - (4 + 2) = 2$ birim olur.

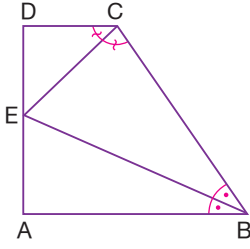
✓ Pratik Bilgi



ABCD yamuk

$$|EF| = \frac{a + c - b - d}{2}$$

ÖRNEK - 5

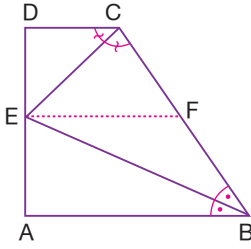


ABCD yamuk
 $[DC] \parallel [AB]$
 $[CE]$ açıortay
 $[BE]$ açıortay
 $|AD| = 18$ birim

Buna göre, $|DE|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$[CE]$ ve $[BE]$ açıortaylarının kesim noktası orta taban üzerindedir.

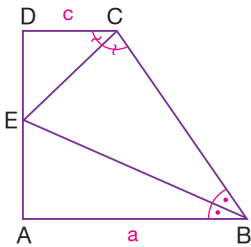


O halde, $[EF]$ orta tabanı çizilirse,

$|DE| = |EA|$ ve $|CF| = |FB|$ olur.

Bu durumda, $|DE| = \frac{18}{2} = 9$ birim bulunur.

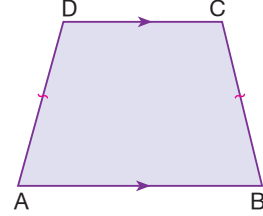
✓ Pratik Bilgi



ABCD yamuk ise
 $|BC| = a + c$ ve
 $|DE| = |EA|$ dir.

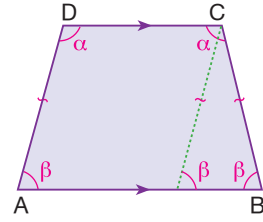
İkizkenar Yamuk

Paralel olmayan kenarları eşit uzunlukta olan yamuğa ikizkenar yamuk denir.

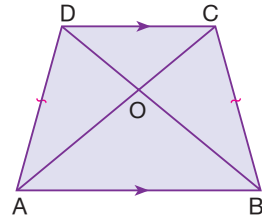


$|AD| = |BC|$ ise ABCD ikizkenar yamuktur.

➤ Bir ikizkenar yamukta taban açıların ölçüleri eşittir.

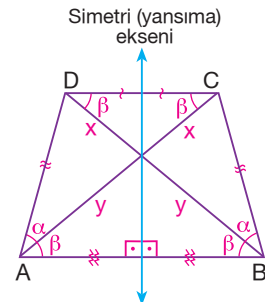


➤ Bir ikizkenar yamukta köşegen uzunlukları eşittir.

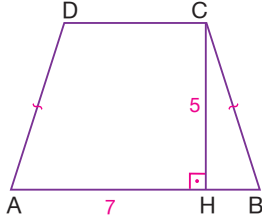


ABCD ikizkenar yamuk
 $|AC| = |BD|$
 $\widehat{ADC} \cong \widehat{BCD}$

➤ Bir ikizkenar yamukta köşegenler yamuğun simetri ekseninde kesişir.



ÖRNEK - 1



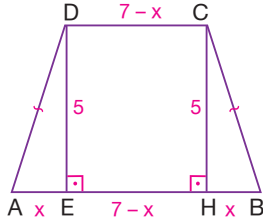
ABCD ikizkenar
yamuk
 $|CH| = 5$ birim
 $|AH| = 7$ birim
 $[CH] \perp [AB]$

Buna göre, ABCD yamuksal bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

1. Yol :

D köşesinden $[AB]$ tabanına dikme inilirse,



DEA ve CHB üçgenlerinin eş olduğu görülür.

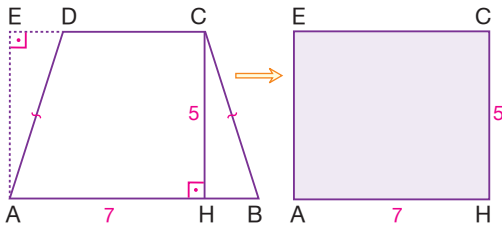
O halde, $|AE| = |HB| = x$ diyelim.

Bu durumda, $|EH| = |DC| = 7 - x$ olup

Böylece yamuksal bölgenin alanı,

$$A(ABCD) = \left(\frac{7+x+7-x}{2} \right) 5 = 35 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

2. Yol :



$[AE] \perp DC$ olacak şekilde $E \in DC$ seçelim.

Böylece, AED ile CHB üçgenleri eş olup

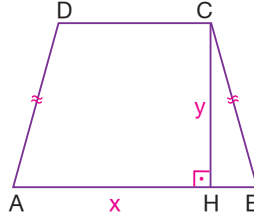
$\widehat{A(AED)} = \widehat{A(CHB)}$ diyebiliriz.

O halde, $A(ABCD) = A(AHCE)$ dir.

Yamuğun alanı AHCE dikdörtgeninin alanına eşittir.

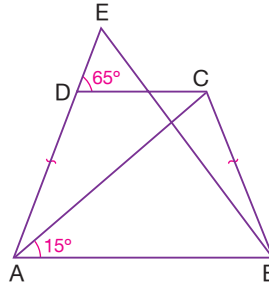
✓ Pratik Bilgi

Bir ABCD ikizkenar yamuğunda,



$[CH] \perp [AB]$
 $|AH| = x$
 $|HC| = y$ ise
 $A(ABCD) = x \cdot y$

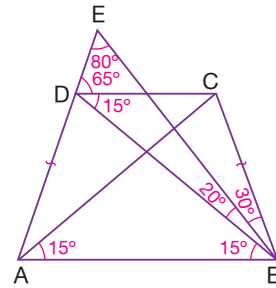
ÖRNEK - 2



ABCD ikizkenar
yamuk
A, D, E, doğrusal
 $m(\widehat{EDC}) = 65^\circ$
 $m(\widehat{CAB}) = 15^\circ$
 $|AD| = |BC|$
 $|AC| = |BE|$

Buna göre, EBC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM



ABCD ikizkenar yamuk olduğundan,

$|BD| = |AC| = |BE|$ dir.

Yani, DBE ikizkenar üçgen olur.

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CDB}) = 15^\circ$ ve

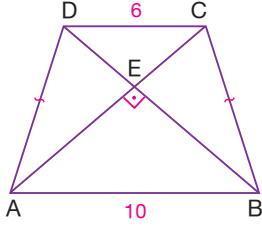
$m(\widehat{DEB}) = 80^\circ$ bulunur.

$[DC] \parallel [AB]$ olduğundan,

$m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{ABC}) = 65^\circ$ ve

$m(\widehat{EBC}) = 30^\circ$ bulunur.

ÖRNEK - 3



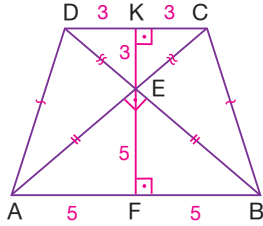
ABCD ikizkenar
yamuk
 $[AC] \perp [BD]$
 $|DC| = 6$ birim
 $|AB| = 10$ birim

Buna göre, ABCD yamuksal bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

İkizkenar yamukta köşegenler şekli simetrik olarak böler.

O halde, $|EC| = |ED|$ ve $|EA| = |EB|$ diyebiliriz.

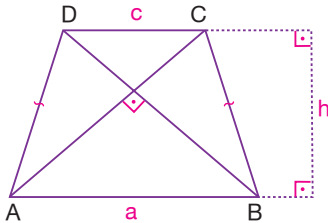


E noktasından yamuğun paralel kenarlarına dikmeler indirilirse, $|KF| = 8$ birim bulunur.

Böylece, $A(ABCD) = \left(\frac{10+6}{2} \right) \cdot 8 = 64 \text{ br}^2$ bulunur.

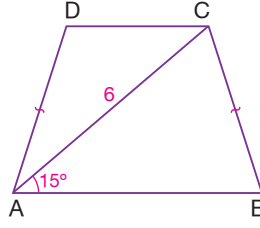
✓ Pratik Bilgi

Bir ikizkenar yamukta köşegenler dik keşişirse yükseklik, orta taban uzunluğuna eşit olup yamuğun alanı yüksekliğin karesine eşittir.



$$h = \frac{a+c}{2} \text{ ve } A(ABCD) = h^2$$

ÖRNEK - 4



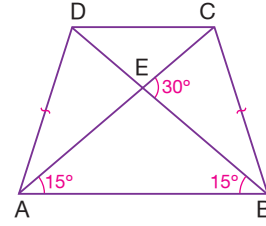
ABCD ikizkenar
yamuk
 $|AC| = 6$ birim
 $m(\widehat{CAB}) = 15^\circ$

Buna göre, ABCD yamuksal bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

İkizkenar yamukta köşegen uzunlukları eşittir.

O halde, $[BD]$ köşegeni çizilirse,



$|AC| = |BD| = 6$ birim ve

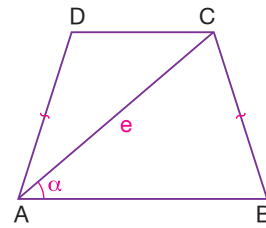
$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ABD}) = 15^\circ$ olup

$m(\widehat{CEB}) = 30^\circ$ dir.

Böylece, ABCD dörtgeni köşegen uzunlukları ve köşegenler arasındaki açısı bilinen bir dörtgen olup

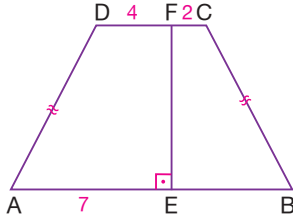
$$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ = 9 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

✓ Pratik Bilgi



$$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot e^2 \cdot \sin 2\alpha \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 5

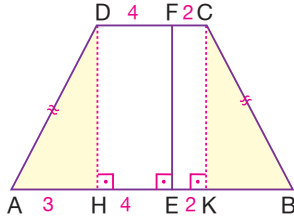


ABCD ikizkenar yamuk
 $[FE] \perp [AB]$
 $|DF| = 4$ birim
 $|AE| = 7$ birim
 $|FC| = 2$ birim

Buna göre, $|EB|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

D ve C köşelerinden $[AB]$ tabanına dikmeler indirilirse,



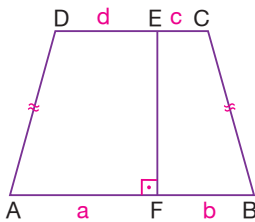
DHA ve CKB üçgenlerinin eş olduğu görülür.

O halde, $|KB| = |HA| = 3$ birim olup

$|EB| = 2 + 3 = 5$ birim bulunur.

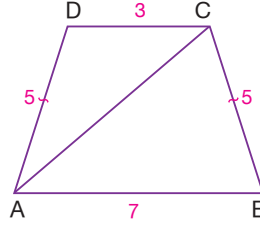
✓ Pratik Bilgi

Bir ABCD ikizkenar yamuğunda,



$[EF] \perp [AB]$
 $|AF| = a$
 $|FB| = b$
 $|CE| = c$
 $|ED| = d$ ise
 $a + c = b + d$

ÖRNEK - 6

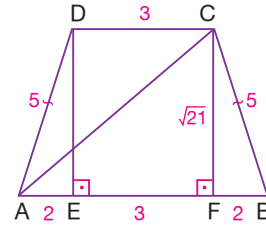


ABCD ikizkenar yamuk
 $|AD| = 5$ birim
 $|BC| = 5$ birim
 $|AB| = 7$ birim
 $|DC| = 3$ birim

Buna göre, $|AC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

D ve C köşelerinden $[AB]$ tabanına dikmeler indirilirse,



AED ve CEB üçgenlerinin eş olduğu görülür.

O halde,

$\triangle FBC$ nde Pisagor bağıntısı ile

$$|FC|^2 = 5^2 - 2^2 \Rightarrow |FC| = \sqrt{21} \text{ birim olup}$$

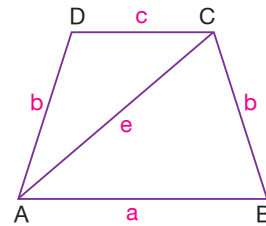
$\triangle AFC$ nde Pisagor bağıntısı ile

$$|AC|^2 = 5^2 + (\sqrt{21})^2 \Rightarrow |AC| = \sqrt{46} \text{ birim bulunur.}$$

✓ Pratik Bilgi

Bir ikizkenar yamukta karşılıklı kenarların çarpımının toplamı bir köşegen uzunluğunun karesine eşittir.

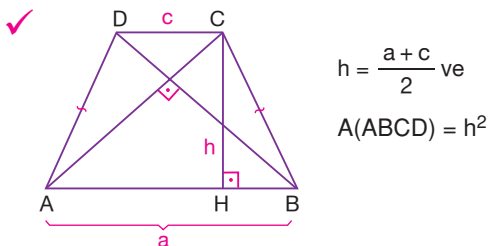
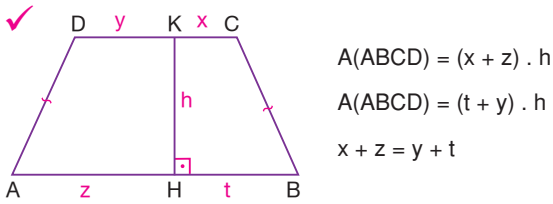
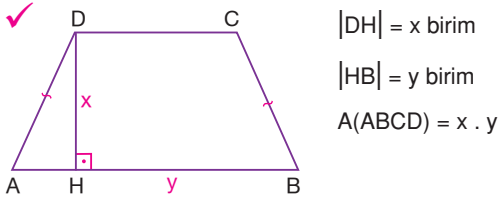
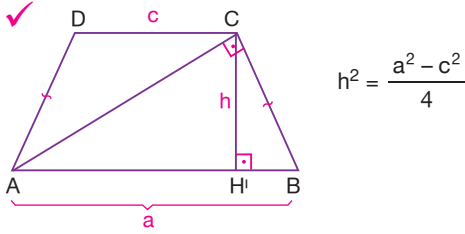
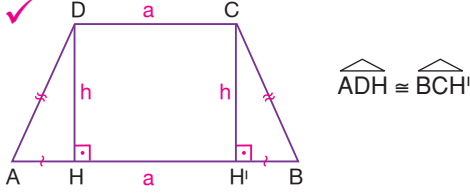
Yani,



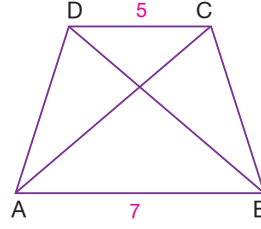
$$e^2 = ac + b^2$$



ÖZET



ÖRNEK - 7

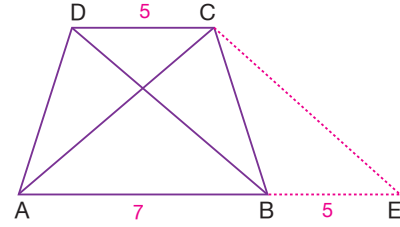


ABCD yamuk
 $|AB| = 7$ birim
 $|DC| = 5$ birim
 $|AC| = 6$ birim
 $|BD| = 9$ birim

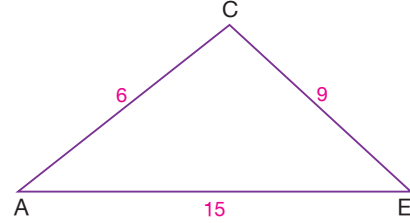
Yukarıda taslak çizimi yapılan yamuğun çizilip çizilemeyeceğini inceleyelim.

ÇÖZÜM

$[DB] \parallel [CE]$ olacak şekilde $E \in AB$ seçelim.



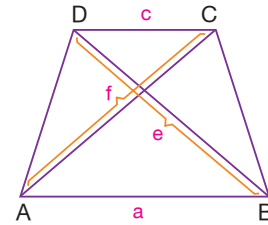
Böylece, $|DB| = |CE| = 9$ birim olup



$\widehat{CAE}$ nde kenar uzunlukları üçgen eşitsizliğini sağlamadığından böyle bir yamuk çizilemez.

✓ Pratik Bilgi

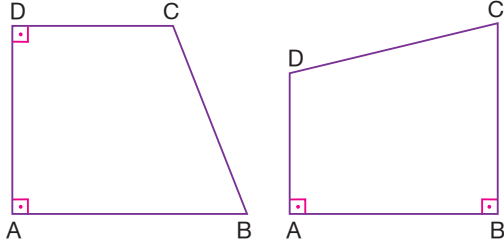
Köşegen uzunlukları e ve f , paralel olan kenar uzunlukları a ve c olan bir yamuğun çizilebilmesi için,



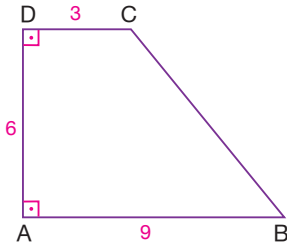
$|e - f| < a + c < e + f$ olmalıdır.

Dik Yamuk

Yan kenarlarından biri tabanlarına dik olan yamuk **dik yamuk** denir.



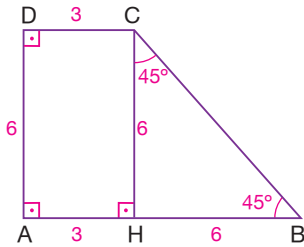
ÖRNEK - 1



ABCD dik yamuk
 $|AB| = 9$ birim
 $|AD| = 6$ birim
 $|DC| = 3$ birim

Buna göre, $\angle ABC$ açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM



ABCD yamuğunda,

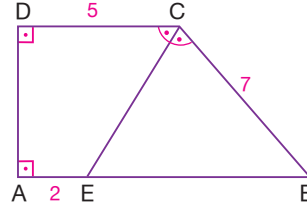
$[CH] \perp [AB]$ dikmesi ile AHCD dikdörtgeni ve

CHB dik üçgeni elde edilir.

Böylece, $|CH| = |HB|$ olduğundan,

$m(\angle ABC) = 45^\circ$ bulunur.

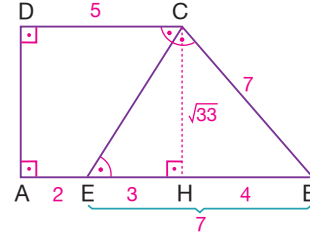
ÖRNEK - 2



ABCD dik yamuk
 $[CE]$ açıortay
 $|AE| = 2$ birim
 $|BC| = 7$ birim
 $|CD| = 5$ birim

Buna göre, $|CE|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



Şekilde AHCD dikdörtgeni oluşturulursa,

$|EH| = 3$ birim ve $|HB| = 4$ birim olup.

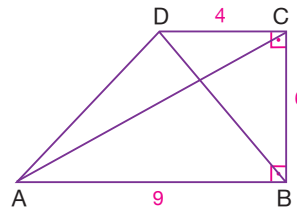
CHB dik üçgeninde, Pisagor teoremi ile,

$|CH|^2 + 4^2 = 7^2 \Rightarrow |CH| = \sqrt{33}$ birim bulunur.

Böylece, CEH dik üçgeninde Pisagor teoremi ile

$|CE|^2 = (\sqrt{33})^2 + 3^2 \Rightarrow |CE| = \sqrt{42}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 3



ABCD dik yamuk
 $|AB| = 9$ birim
 $|BC| = 6$ birim
 $|CD| = 4$ birim

Buna göre, yamuğun köşegenleri arasındaki açının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

$\vec{AC} = (9, 6)$

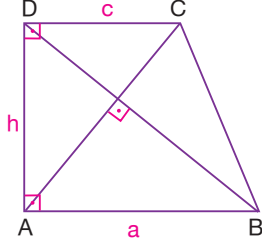
$\vec{BD} = (-4, 6)$ olur.

$\angle \vec{AC}, \vec{BD} = 9(-4) + 6 \cdot 6 = 0$ olduğundan,

$\vec{AC} \perp \vec{BD}$ olup aranan açı 90° dir.

Teorem :

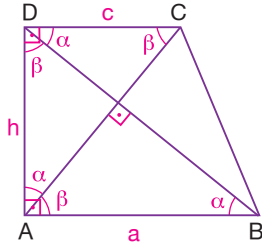
Köşegenleri dik kesişen bir dik yamukta yükseklik (h) ile taban uzunlukları (a ve c) arasında $h^2 = a \cdot c$ bağıntısı vardır.



$$[AC] \perp [BD] \text{ ise } h^2 = a \cdot c$$

Yukarıdaki teoremi paragraf ispat biçimini kullanarak ispatlayalım.

İspat 1 :



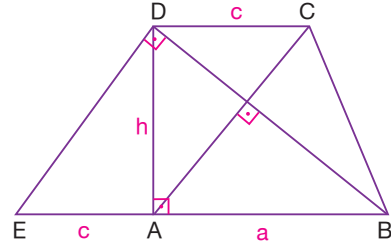
ADC üçgeni ile BAD üçgenlerinde açılar aynı olduğundan bu üçgenler benzerdir.

Yani, $\widehat{ADC} \sim \widehat{BAD}$ olup. (A.A.A)

$$\frac{|AD|}{|BA|} = \frac{|DC|}{|AD|} \text{ eşitliğinden}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{c}{h} \Rightarrow h^2 = a \cdot c \text{ bulunur.}$$

İspat 2 :



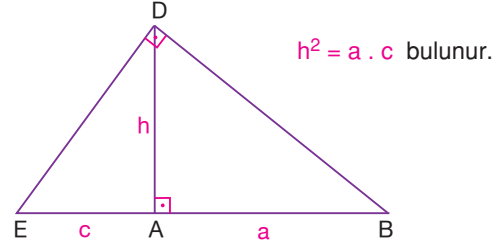
[CA] // [DE] olacak şekilde $E \in AB$ alalım.

O halde, ACDE paralelkenarında ,

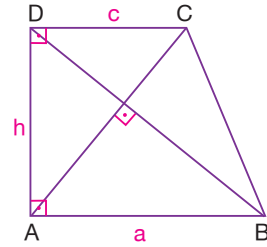
[AC] // [DE] olduğundan,

[ED] $\perp$ [DB] olup

DEB dik üçgeninde Öklid bağıntısı ile,



İspat 3 :



ABCD dik yamuğunda,

$\vec{AC}$ vektörü ile $\vec{DB}$ vektörü dik iki vektör olup $\langle \vec{AC}, \vec{DB} \rangle = 0$ dir.

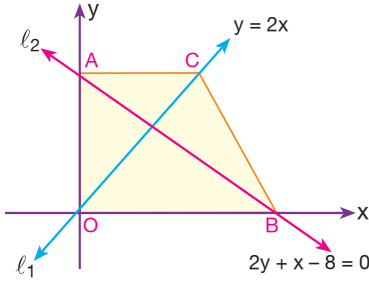
$\vec{AC} = (c, h)$ (A noktası koordinat başlangıcı olsun.)

$\vec{DB} = (a, -h)$ (D noktası koordinat başlangıcı olsun.)

$\langle \vec{AC}, \vec{DB} \rangle = ac - h^2 = 0$ olup.

$h^2 = a \cdot c$ bulunur.

ÖRNEK - 4



Yukarıda l_1 , l_2 ve eksenler üzerine kurulan AOCB yamuğunun C köşesinin koordinatları toplamını bulalım.

ÇÖZÜM :

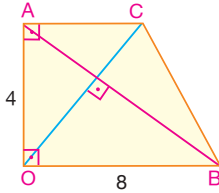
$$m_{l_1} = 2, \quad m_{l_2} = -\frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad m_{l_1} \cdot m_{l_2} = -1$$

olduğundan, $l_1 \perp l_2$ dir.

$2y + x - 8 = 0$ doğrusunda $x = 0$ için $y = 4$ ve

$y = 0$ için $x = 8$ olup

$|AO| = 4$ birim ve $|OB| = 8$ birim bulunur.



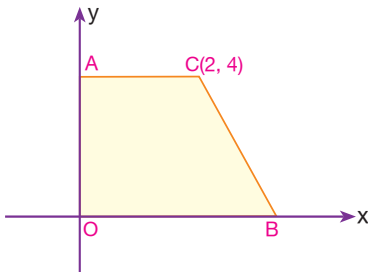
Dik yamukta köşegenler dik kesiştiğinden,

$$4^2 = 8 \cdot |AC|$$

$|AC| = 2$ birim bulunur.

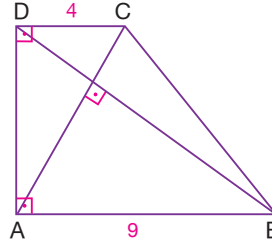
Dolayısıyla C köşesinin koordinatları,

$C(2, 4)$ bulunur. Böylece,



C köşesinin koordinatları toplamı $2 + 4 = 6$ dir.

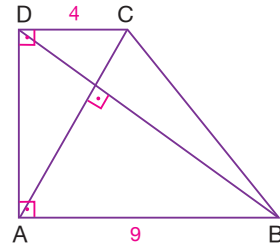
ÖRNEK - 5



ABCD dik yamuk
 $[AC] \perp [BD]$
 $|AB| = 9$ birim
 $|DC| = 4$ birim

Buna göre, $|AD|$ uzunluğunu bulalım.

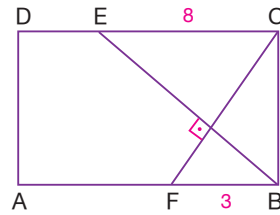
ÇÖZÜM :



ABCD dik yamuğunda köşegenler dik olduğundan,

$$|AD|^2 = 9 \cdot 4 \Rightarrow |AD| = 6 \text{ birim} \text{ bulunur.}$$

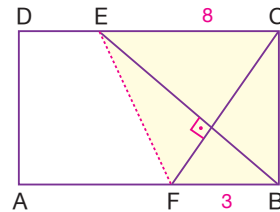
ÖRNEK - 6



ABCD dikdörtgen
 $[CF] \perp [BE]$
 $|EC| = 8$ birim
 $|FB| = 3$ birim

Buna göre, $|AD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

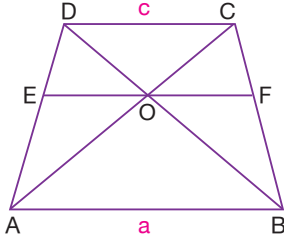


FBCE köşegenleri dik kesişen, dik yamuk olduğundan,

$$|CB|^2 = 8 \cdot 3 \Rightarrow |AD| = 2\sqrt{6} \text{ birim} \text{ bulunur.}$$

Teorem :

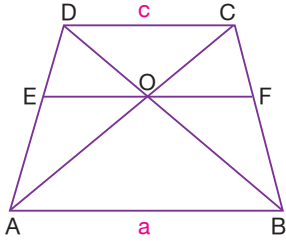
Bir yamukta paralel olan kenar uzunlukları a ve c olmak üzere, köşelerin kesim noktasından tabanlara paralel olarak çizilen doğru parçasının uzunluğu $\frac{2ac}{a+c}$ ile bulunur.



ABCD yamuk
 $[EF] \parallel [AB]$ ise
 $|EO| = |OF|$ ve
 $|EF| = \frac{2ac}{a+c}$ dir.

Yukarıdaki teoremi Tales teoremini kullanarak ispatlayalım.

İspat :



DOC ve BOA benzer üçgenlerinde, $\frac{|CO|}{|OA|} = \frac{c}{a} = \frac{ck}{ak}$

CAB üçgeninde Tales teoremi ile,

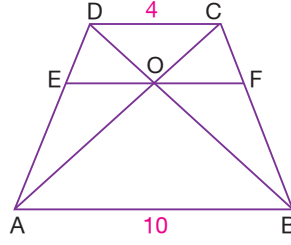
$$\frac{|CO|}{|CA|} = \frac{|OF|}{|a|} \text{ eşitliğinden,}$$

$$\frac{c \cdot k}{ck + ak} = \frac{|OF|}{a} \text{ yazılabilir.}$$

$$|OF| = \frac{a \cdot c}{a+c} \text{ ve aynı mantıkla } |OE| = \frac{a \cdot c}{a+c} \text{ olup}$$

$$|EF| = |OF| + |OE| = \frac{2a \cdot c}{a+c} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 7



ABCD yamuk
 $[AC]$ köşegen
 $[BD]$ köşegen
 $[EF] \parallel [AB]$
 $|AB| = 10$ birim
 $|DC| = 4$ birim

Buna göre, $|EF|$ uzunluğunu bulalım.

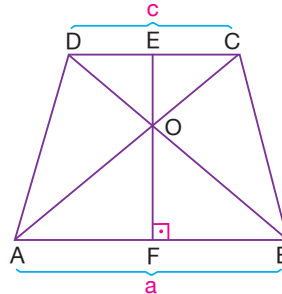
ÇÖZÜM

$$|EF| = \frac{2 \cdot 10 \cdot 4}{10 + 4} = \frac{40}{7} \text{ birim bulunur.}$$



Teorem :

Bir ABCD yamuğunu paralel olan kenar uzunlukları a , c ve $|EF| = h$ ise

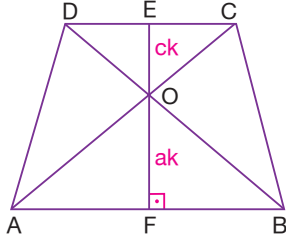


$$|OE| = \frac{c \cdot h}{a+c}$$

$$|OF| = \frac{a \cdot h}{a+c}$$

Yukarıdaki teoremi Tales teoremini kullanarak ispatlayalım.

İspat :



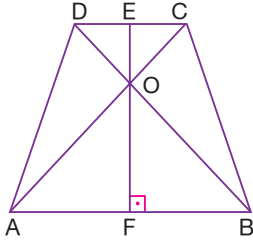
DOC ile BOA üçgenleri benzer olup benzer iki üçgende yükseklikler oranı benzerlik oranına eşit olduğundan,

$$\frac{|OE|}{|OF|} = \frac{c}{a} = \frac{ck}{ak} \text{ yazılabilir.}$$

$$|EF| = ck + ak = h \text{ olduğundan, } k = \frac{h}{a+c} \text{ olup.}$$

$$|OE| = ck = \frac{c \cdot h}{a+c} \Rightarrow |OF| = ak = \frac{a \cdot h}{a+c} \text{ bulunur.}$$

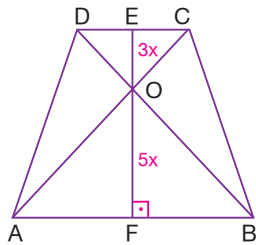
ÖRNEK - 8



ABCD yamuk
 $|AB| = 5$ birim
 $|DC| = 3$ birim
 $|EF| = 16$ birim

Buna göre, $|OF|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$$\frac{|OE|}{|OF|} = \frac{3x}{5x} \text{ olup, } 3x + 5x = 16 \text{ birim}$$

$$x = 2 \text{ birim ve } |OF| = 5x = 10 \text{ birim bulunur.}$$

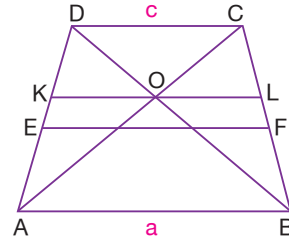
Teorem :

Pozitif iki reel sayının aritmetik ortalaması harmonik ortalamasından büyük ya da eşittir.

$$\text{Yani; } a, c \text{ pozitif reel sayı ise, } \frac{a+c}{2} \geq \frac{2a \cdot c}{a+c} \text{ dir.}$$

İspat :

$|CD| < |AB|$ olacak şekilde ABCD yamuğu çizelim.



$|EF|$ orta taban olup

$$|EF| = \frac{a+c}{2} \text{ ve}$$

$$|KL| = \frac{2ac}{a+c} \text{ dir.}$$

$|EF| > |KL|$ olduğundan,

$$\frac{a+c}{2} > \frac{2ac}{a+c} \text{ bulunur.}$$

Eşitlik durumu ise $a = c$ olması ile mümkündür.

Yani, ABCD dörtgeninin,

- paralelkenar
- dikdörtgen
- kare
- eşkenar dörtgen

olması ile mümkündür.

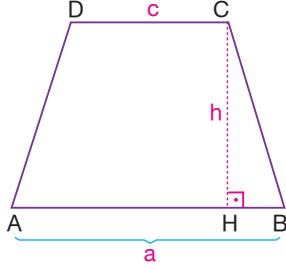
Çünkü bu durumda,

KL ile EF çakışık (aynı) iki doğru olur.

Yamuksal Bölgenin Alanı

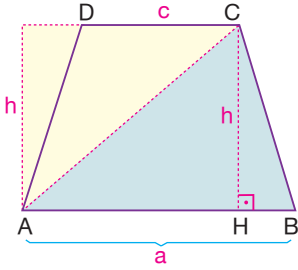
Teorem :

Bir yamuksal bölgenin alanı paralel olan kenarların uzunlukları toplamının yarısı ile yüksekliğin çarpımına eşittir.



$$A(ABCD) = \left(\frac{a+c}{2} \right) \cdot h = (\text{orta taban}) \cdot h$$

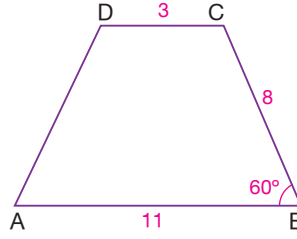
İspat :



ABCD yamuğunda [AC] köşegeni çizilirse, yükseklikleri eşit ABC ve ADC üçgenleri elde edilir.

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(\triangle ABC) + A(\triangle ADC) \text{ yazılabilir.} \\ &= \frac{h \cdot a}{2} + \frac{h \cdot c}{2} \\ &= \left(\frac{a+c}{2} \right) \cdot h \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

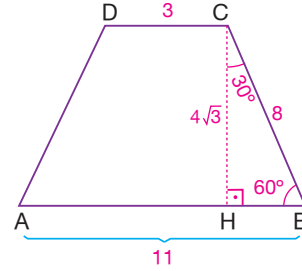
ÖRNEK - 1



ABCD yamuk
 $m(\angle ABC) = 60^\circ$
 $|AB| = 11$ birim
 $|BC| = 8$ birim
 $|CD| = 3$ birim

Buna göre, ABCD yamuksal bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :



[CH] ⊥ [AB] dikmesi çizilirse,

CHB, 30°, 60°, 90° üçgeninde,

|CH| = 4√3 birim olup

Yamuksal bölgenin alanı,

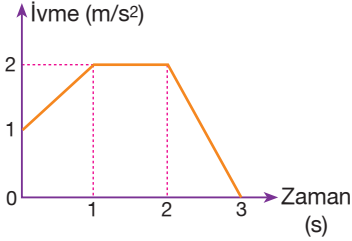
$$A(ABCD) = \left(\frac{11+3}{2} \right) \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow 28\sqrt{3} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$



(Matematik Dünyası Dergisi-www.matematikdunyasi.org)

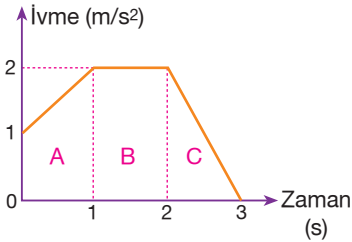
ÖRNEK - 2

İvme – zaman grafiklerinde grafik parçaları ile zaman ekseninde kalan bölge cismin hız değişimini verir.



Buna göre, 0 – 3 saniye zaman aralığında cismin hızının kaç m/s olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



A bölgesinin alanı = $\frac{1}{2} \cdot (1+2) \cdot 1 = \frac{3}{2} br^2$

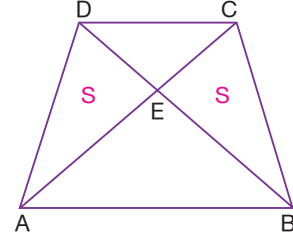
B bölgesinin alanı = $2 \cdot 1 = 2 br^2$

C bölgesinin alanı = $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 br^2$

Toplam alan, $A + B + C = \frac{3}{2} + 2 + 1 = \frac{9}{2} br^2$ bulunur.

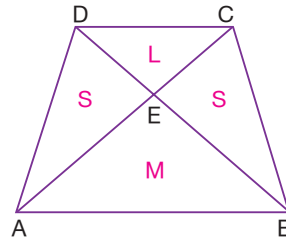
Dolayısıyla, cismin hızı $\frac{9}{2} m/s$ dir

Bir Yamuksal Bölgenin Alanının Parçalanması



- ABCD yamuk ise, $\widehat{A(AD E)} = \widehat{A(BE C)}$
(ABC, ABD, ADC, BDC yükseklikleri eşit olan üçgenler)

Teorem :



ABCD yamuk
[AC] köşegen
[BD] köşegen
 $\widehat{A(AE B)} = M$
 $\widehat{A(DEC)} = L$
 $\widehat{A(AD E)} = S$
 $\widehat{A(BE C)} = S$

- ABCD yamuk ise; $S^2 = L \cdot M$ dir.

İspat :

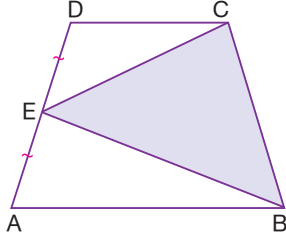
ABD üçgeninde, $\frac{|DE|}{|EB|} = \frac{S}{M}$ ve

BCD üçgeninde, $\frac{|DE|}{|EB|} = \frac{L}{S}$ olup.

Bu iki eşitlik birlikte düşünülürse,

$\frac{S}{M} = \frac{L}{S}$ eşitliğinden $S^2 = L \cdot M$ bulunur.

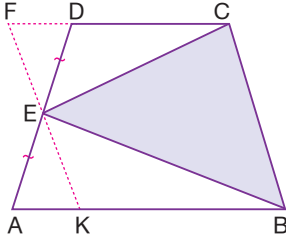
Teorem :



- ABCD yamuk, $|DE| = |EA|$ ise

$$A(\widehat{BEC}) = \frac{A(ABCD)}{2}$$

İspat :



$[BC] \parallel [FK]$ olacak şekilde,

F , E, K doğrusalını çizelim.

Böylece,

$\widehat{DEF}$ ve $\widehat{AEK}$ nin eş olduğu görülür.

Böylece,

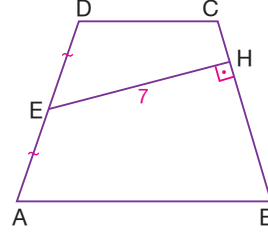
$A(\widehat{AEK}) = A(\widehat{DEF})$ yazılabilir.

O halde,

$A(ABCD) = A(KFCB)$ olup

$$A(\widehat{BEC}) = \frac{A(KFCB)}{2} = \frac{A(ABCD)}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

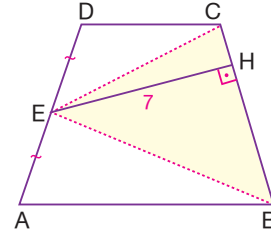


ABCD yamuk
 $[EH] \perp [BC]$
 $|EH| = 7$ birim
 $|BC| = 8$ birim

Buna göre, ABCD yamuksal bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

E noktası B ve C noktaları ile birleştirilirse,



Oluşan BEC üçgensel bölgesinin alanı ABCD yamuksal bölgesinin alanının yarısına eşit olup

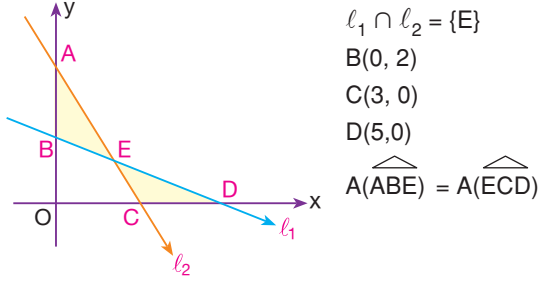
$$A(\widehat{EBC}) = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28 \text{ br}^2$$

Böylece,

$$A(ABCD) = 28 \cdot 2 = 56 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$



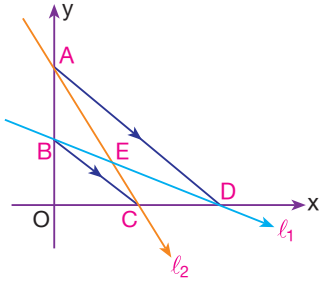
ÖRNEK - 4



Buna göre, A noktasının ordinatını bulalım.

ÇÖZÜM

[BC] ile [AD] çizildiğinde,
 $A(\triangle ABE) = A(\triangle ECD)$ olduğundan,
 ABCD dörtgeni bir yamuk olup [BC] // [AD] dir.



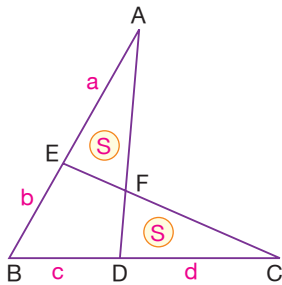
O halde, paralel doğruların eğimi eşit olduğundan,

$m_{BC} = m_{AD}$ yazılabilir. $A(0, k)$ diyelim.

$$m_{BC} = \frac{2-0}{0-3}, m_{AD} = \frac{k-0}{0-5} \text{ ise}$$

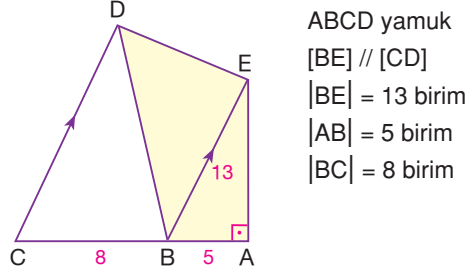
$$-\frac{2}{3} = -\frac{k}{5} \text{ eşitliğinden, } k = \frac{10}{3} \text{ bulunur.}$$

✓ Pratik Bilgi



$$A(\triangle AEF) = A(\triangle DFC) \text{ ise } \frac{b}{a} = \frac{c}{d} \text{ dir.}$$

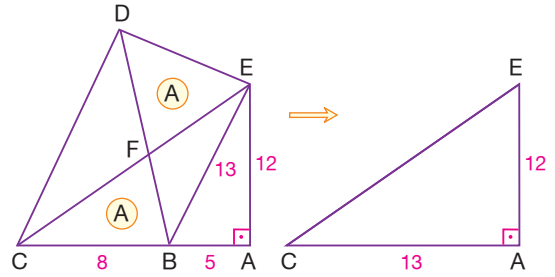
ÖRNEK - 5



Buna göre, ABDE dörtgenel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

EBCD yamuğunda, [EC] köşegenini çizelim.



Böylece, [BE] // [DC] olduğundan,

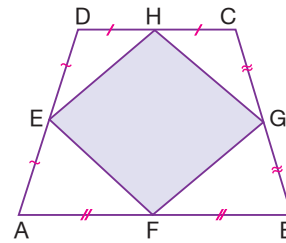
$$A(\triangle DEF) = A(\triangle BCF) = A \text{ diyebiliriz.}$$

O halde, $A(\triangle ABDE) = A(\triangle AEC)$ olduğu görülür.

$$\text{Bu durumda, } A(\triangle ABDE) = A(\triangle AEC) = \frac{12 \cdot 13}{2}$$

$$A(\triangle AEC) = 78 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

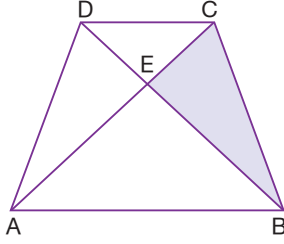
Teorem :



$$\triangleright \text{ ABCD yamuk, } A(EFGH) = \frac{A(ABCD)}{2}$$

İspat : Dörtgenler bölümünde yapıldı.

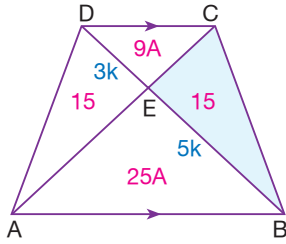
ÖRNEK - 6



ABCD yamuk
 $3|BE| = 5|ED|$
 $A(\widehat{ECB}) = 15 \text{ br}^2$

Buna göre, ABCD yamuksal bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM



$[DC] \parallel [AB]$ olduğundan,

$$\frac{A(\widehat{DEC})}{A(\widehat{AEB})} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \text{ ise } \frac{A(\widehat{DEC})}{A(\widehat{AEB})} = \frac{9}{25}$$

$A(\widehat{DEC}) = 9A$, $A(\widehat{AEB}) = 25A$ bulunur.

$$\frac{A(\widehat{ADE})}{A(\widehat{AEB})} = \frac{3}{5} \text{ olduğundan,}$$

$A(\widehat{ADE}) = 15A$ bulunur.

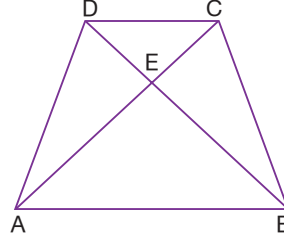
$A(\widehat{ADE}) = A(\widehat{BEC})$ olduğundan,

$A(ABCD) = 64A$ bulunur.

$A(\widehat{ECD}) = 15$ yani, $15A = 15$ ise,

$A = 1$ ve $A(ABCD) = 64 \text{ br}^2$ bulunur.

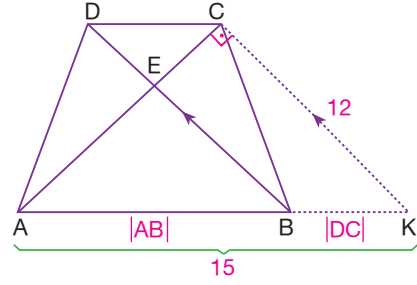
ÖRNEK - 7



ABCD yamuk
 $|AC| = 9 \text{ birim}$
 $|DB| = 12 \text{ birim}$
 $|DC| + |AB| = 15 \text{ birim}$

Buna göre, ABCD yamuksal bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM



$[DB]$ ye paralel olacak şekilde $[CK]$ çizilirse,

DBKC paralelkenarı bulunur.

$$\left. \begin{array}{l} |AC| = 9 \text{ birim} \\ |CK| = 12 \text{ birim} \\ |AK| = 15 \text{ birim} \end{array} \right\} \text{ bulunur.}$$

$A(\widehat{DBC}) = A(\widehat{ADC})$ olduğundan,

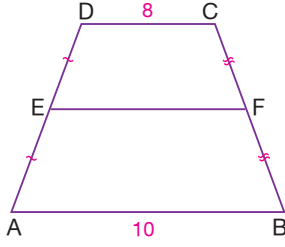
ABCD yamuksal bölgesinin alanının AKC üçgen-sel bölgesinin alanına eşit olduğu görülür.

$A(\widehat{ACK}) = A(ABCD)$ dir.

Dolayısıyla,

$$A(ABCD) = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

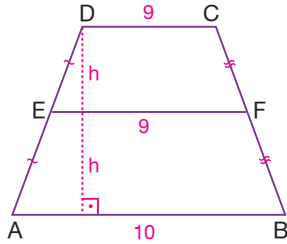
ÖRNEK - 8



ABCD yamuk
 $|DE| = |EA|$
 $|CF| = |FB|$
 $|DC| = 8$ birim
 $|AB| = 10$ birim

Buna göre, $\frac{A(EFCD)}{A(ABCD)}$ oranını bulalım.

ÇÖZÜM



[EF] orta taban olduğundan yüksekliği ortalar.

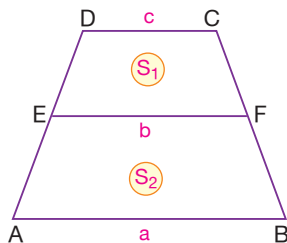
$$|EF| = \frac{10 + 8}{2}$$

$|EF| = 9$ birim bulunur.

O halde,

$$\frac{A(EFCD)}{A(ABCD)} = \frac{\frac{(9 + 8) \cdot h}{2}}{\frac{(10 + 9) \cdot 2h}{2}} = \frac{17}{19} \text{ dir.}$$

✓ Pratik Bilgi



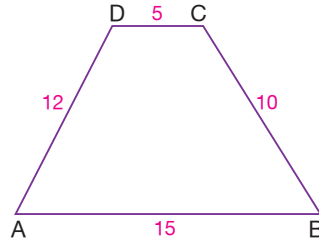
$[AB] \parallel [EF] \parallel [DC]$ ise

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$$

$$S_1 = S_2 \text{ ise } b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} \text{ olur ki}$$

Buna da "a ile c nin karesel ortalaması b dir" denir.

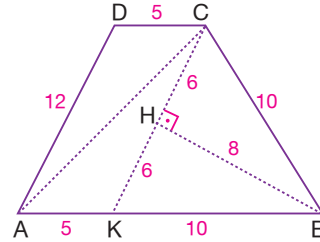
ÖRNEK - 9



ABCD yamuk
 $|AD| = 12$ birim
 $|CB| = 10$ birim
 $|DC| = 5$ birim
 $|AB| = 15$ birim

Buna göre, ABCD yamuksal bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM



[CK] nı [AD] na paralel olacak şekilde çizersek AKCD paralelkenarı ve KBC ikizkenar üçgeni elde edilir.

$\widehat{KBC}$ nde [BH] yüksekliği çizilirse,

$$|CH| = |HK| = 6 \text{ birim}$$

$$|BH| = 8 \text{ birim}$$

$$A(KBC) = \frac{12 \cdot 8}{2}$$

Yani, $A(KBC) = 48 \text{ br}^2$ bulunur.

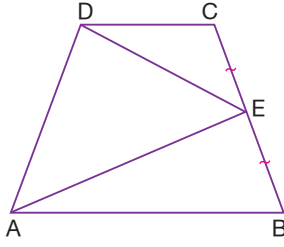
$$\frac{A(AKC)}{A(KBC)} = \frac{|AK|}{|KB|} \text{ olduğundan,}$$

$$A(AKC) = 24 \text{ br}^2 \text{ ve } A(ADC) = 24 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

Dolayısıyla,

$$A(ABCD) = 96 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

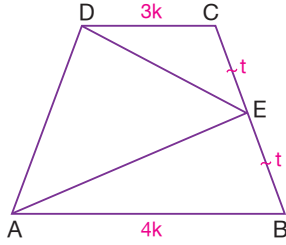
ÖRNEK - 10



ABCD yamuk
 $|CE| = |EB|$
 $3|AB| = 4|CD|$
 $\widehat{A(ABE)} = 32 \text{ br}^2$

Buna göre, ABCD yamuksal bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

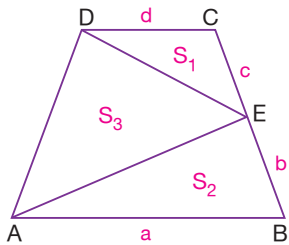


$$\frac{A(ABCD)}{A(ABE)} = \frac{(|AB| + |DC|) \cdot |BC|}{|AB| \cdot |EB|}$$

$$= \frac{(4k + 3k) \cdot 2t}{4k \cdot t} \Rightarrow \frac{A(ABCD)}{32} = \frac{14}{4}$$

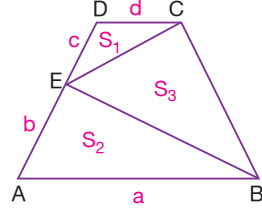
Yani, $A(ABCD) = 112 \text{ br}^2$ bulunur.

Pratik Bilgi



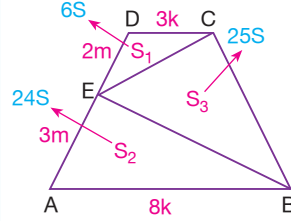
ABCD yamuk
 $S_1 = c \cdot d \cdot S$
 $S_2 = a \cdot b \cdot S$
 $S_1 + S_2 + S_3 = (a + d) \cdot (b + c) \cdot S$

Pratik Bilgi



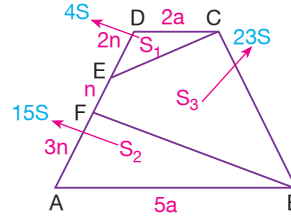
ABCD yamuk
 $S_1 = c \cdot d \cdot S$
 $S_2 = a \cdot b \cdot S$
 $S_1 + S_2 + S_3 = (a + d) \cdot (b + c) \cdot S$

Örnek - 1:



ABCD yamuk
 $S_1 = 2m \cdot 3k = 6S$
 $S_2 = 3m \cdot 8k = 24S$
 $S_1 + S_2 + S_3 = 11k \cdot 5m = 55S$

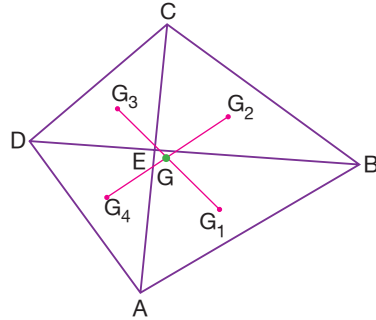
Örnek - 2:



ABCD yamuk
 $S_1 = 2a \cdot 2n = 4S$
 $S_2 = 3n \cdot 5a = 15S$
 $S_1 + S_2 + S_3 = 7a \cdot 6n = 42S$

Bir Dörtgenel Bölgenin Ağırlık Merkezi

Bir dörtgenel bölgenin köşegenlerinin meydana getirdiği dört üçgenin ağırlık merkezlerinin oluşturduğu dörtgenin köşegenlerinin kesiştiği noktaya dörtgenel bölgenin **ağırlık merkezi** denir.



G_1 : $\widehat{(ABE)}$ nin ağırlık merkezi

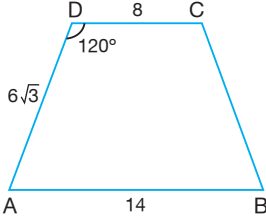
G_2 : $\widehat{(BEC)}$ nin ağırlık merkezi

G_3 : $\widehat{(DEC)}$ nin ağırlık merkezi

G_4 : $\widehat{(ADE)}$ nin ağırlık merkezi ise

G : ABCD dörtgenel bölgesinin ağırlık merkezidir.

1.

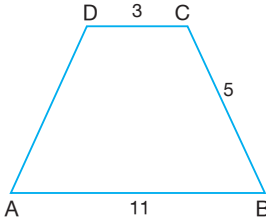


ABCD yamuk
 $|AD| = 6\sqrt{3}$ birim
 $|AB| = 14$ birim
 $|DC| = 8$ birim
 $m(\widehat{ADC}) = 120^\circ$

Buna göre, $A(ABCD)$ kaç birim karedir?

- A) 99 B) 98 C) 88 D) 77 E) 66

2.

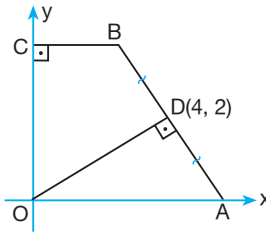


ABCD yamuk
 $m(\widehat{ADC}) = 2m(\widehat{ABC})$
 $|DC| = 3$ birim
 $|CB| = 5$ birim
 $|BA| = 11$ birim

Buna göre, $\widehat{C}(ABCD)$ kaç birimdir?

- A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

3.

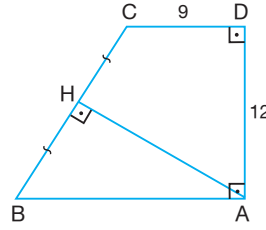


OABC yamuk
 $[OD] \perp [AB]$
 $|AD| = |DB|$
 $D(4, 2)$

Buna göre, $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

- A) 20 B) 19 C) 18 D) 17 E) 16

4.

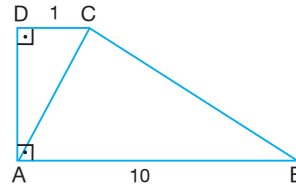


ABCD dik yamuk
 $[AH] \perp [BC]$
 $|CH| = |HB|$
 $|AD| = 12$ birim
 $|DC| = 9$ birim

Buna göre, $A(ABCD)$ kaç birim karedir?

- A) 112 B) 120 C) 128 D) 132 E) 144

5.

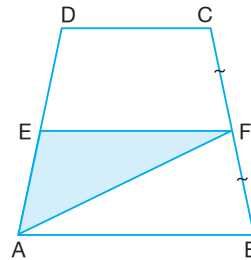


ABCD dik yamuk
 $\angle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} = 0$
 $|DC| = 1$ birim
 $|AB| = 10$ birim

Buna göre, $|AD|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6.

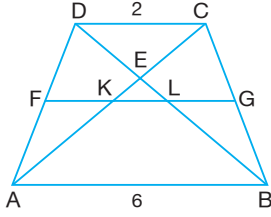


ABCD yamuk
 $[EF] \parallel [AB]$
 $|CF| = |FB|$
 $A(\widehat{AFE}) = 18 br^2$

Yukarıdaki verilere göre, $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

- A) 66 B) 69 C) 72 D) 75 E) 78

7.

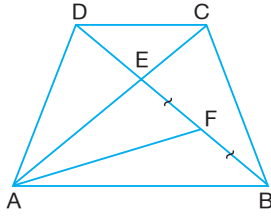


ABCD yamuk
 [AC] köşegen
 [BD] köşegen
 [FG] orta taban
 $|DC| = 2$ birim
 $|AB| = 6$ birim

Buna göre, $|KL|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.

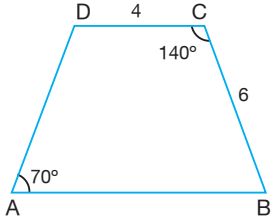


ABCD yamuk
 [AC] köşegen
 [BD] köşegen
 $|EF| = |FB|$
 $A(\widehat{DEC}) = 5 \text{ br}^2$
 $A(\widehat{AEF}) = 10 \text{ br}^2$

Buna göre, $A(ABCD)$ kaç birim karedir?

- A) 45 B) 40 C) 35 D) 30 E) 25

9.

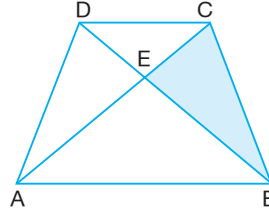


ABCD yamuk
 $|DC| = 4$ birim
 $|CB| = 6$ birim
 $m(\widehat{BAD}) = 70^\circ$
 $m(\widehat{DCB}) = 140^\circ$

Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 16 B) 15 C) 14 D) 12 E) 10

10.

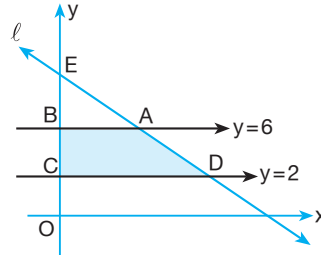


ABCD yamuk
 [AC] köşegen
 [BD] köşegen
 $3|BE| = 5|ED|$
 $A(\widehat{ECB}) = 15 \text{ br}^2$

Buna göre, $A(ABCD)$ kaç birim karedir?

- A) 56 B) 64 C) 72 D) 80 E) 128

11.

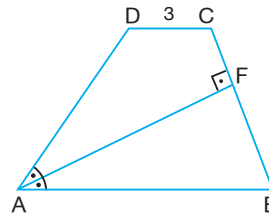


Denklemi
 $x + y - 10 = 0$
 olan ℓ doğrusu ve
 $y = 2$, $y = 6$
 doğruları
 verilmiştir.

Şekle göre, ABCD dörtgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?

- A) 18 B) 20 C) 24 D) 26 E) 32

12.

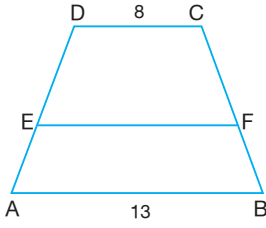


ABCD yamuk
 $[AF] \perp [CB]$
 $5|CF| = 2|FB|$
 $|DC| = 3$ birim
 $m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{FAB})$

Buna göre, $|AD|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

1.

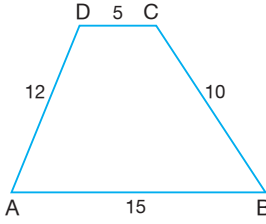


ABCD yamuk
 $[EF] \parallel [AB]$
 $2|CF| = 3|FB|$
 $|DC| = 4$ birim
 $|AB| = 9$ birim

Buna göre, $|EF|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

2.

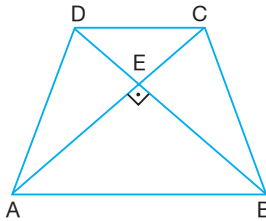


ABCD yamuk
 $|AD| = 12$ birim
 $|DC| = 5$ birim
 $|CB| = 10$ birim
 $|BA| = 15$ birim

Buna göre, $A(ABCD)$ kaç birim karedir?

- A) 64 B) 72 C) 78 D) 84 E) 96

3.

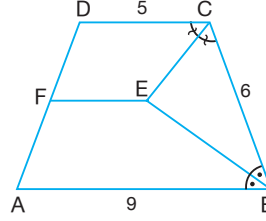


ABCD yamuğunda
 köşegenler birbirine
 diktir
 $|AC| = 21$ birim
 $|DB| = 20$ birim

Buna göre, $|DC| + |AB|$ toplamı kaç birimdir?

- A) $12\sqrt{3}$ B) $12\sqrt{5}$ C) $16\sqrt{3}$
 D) 29 E) $17\sqrt{3}$

4.

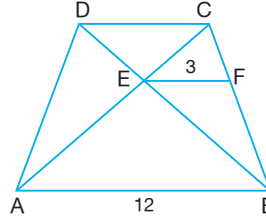


ABCD yamuk
 $[FE] \parallel [AB]$
 $[CE]$ ve $[BE]$
 açıortay
 $|AB| = 9$ birim
 $|DC| = 5$ birim
 $|CB| = 6$ birim

Buna göre, $|FE|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5.

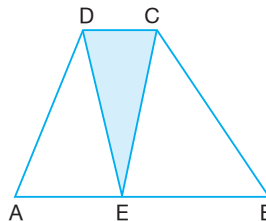


ABCD yamuk
 $[AC]$ köşegen
 $[BD]$ köşegen
 $[EF] \parallel [AB]$
 $|AB| = 12$ birim
 $|EF| = 3$ birim

Buna göre, $|DC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

6.

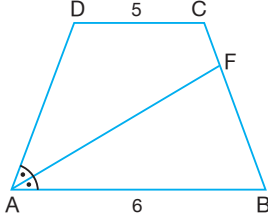


ABCD yamuk
 DEC üçgen
 $5|DC| = 2|AB|$
 $A(ABCD) = 28 \text{ br}^2$

Buna göre, $A(\widehat{DEC})$ kaç birim karedir?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

7.

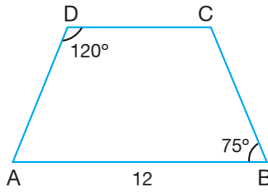


ABCD yamuk
[AF] açıortay
 $3|CF| = 2|FB|$
 $|AB| = 6$ birim
 $|DC| = 5$ birim

Buna göre, $|AD|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 15

8.

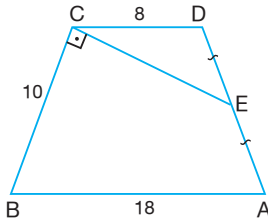


ABCD yamuk
 $|AD| = |DC|$
 $|AB| = 12$ birim
 $m(\widehat{ADC}) = 120^\circ$
 $m(\widehat{ABC}) = 75^\circ$

Buna göre, $|AD|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $4\sqrt{3}$ B) $5\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{6}$
D) $3\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

9.

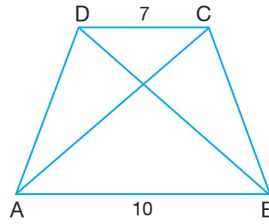


ABCD yamuk
 $[EC] \perp [CB]$
 $|DE| = |EA|$
 $|AB| = 18$ birim
 $|BC| = 10$ birim
 $|CD| = 8$ birim

Buna göre, $|EC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

10.

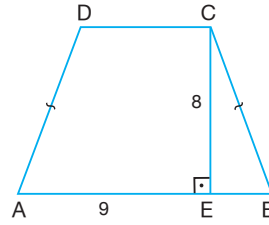


ABCD yamuk
[AC] köşegen
[BD] köşegen
 $[AB] \parallel [DC]$
 $|DC| = 7$ birim
 $|AB| = 10$ birim

$|AC| + |BD|$ toplamının en küçük tamsayı değeri kaçtır?

- A) 20 B) 18 C) 16 D) 15 E) 14

11.

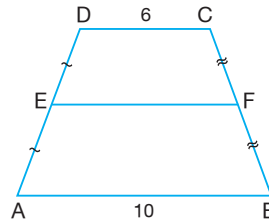


ABCD
ikizkenar yamuk
 $[CE] \perp [AB]$
 $|AD| = |BC|$
 $|AE| = 9$ birim
 $|EC| = 8$ birim

Buna göre, $A(ABCD)$ kaç birim karedir?

- A) 42 B) 48 C) 64 D) 72 E) 84

12.



ABCD yamuk
 $|DE| = |EA|$
 $|CF| = |FB|$
 $|DC| = 6$ birim
 $|AB| = 10$ birim

Buna göre, $\frac{A(EFCD)}{A(ABFE)}$ oranı kaç eşittir?

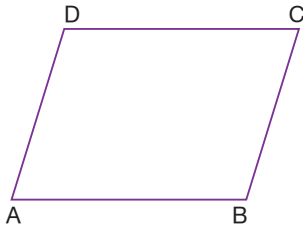
- A) $\frac{3}{16}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{5}{16}$ D) $\frac{7}{9}$ E) $\frac{8}{16}$

PARALELKENAR



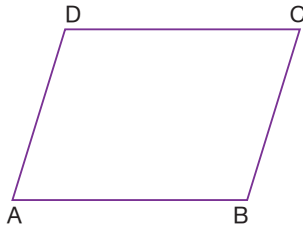
(Paralelkenar modelinden esinlenerek yapılmış bir eser)

- Bir ABCD dörtgeninde $AB \parallel CD$ ve $AD \parallel BC$ ise ABCD bir paralelkenardır.



ABCD paralelkenar
 $[DC] \parallel [AB]$
 $[AD] \parallel [BC]$

- Bir paralelkenarda karşılıklı kenarların uzunlukları eşittir.



$$|AB| = |DC|$$

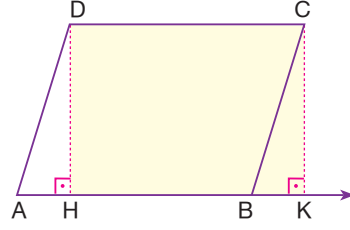
$$|AD| = |BC|$$

ARAŞTIRMA

Bir paralelkenarın ikizkenar yamuk olup olmayacağını arkadaşlarınızla tartışıp, öğretmeninizle değerlendirin.



İspat :



$[DH] \perp AB$ ve $[CK] \perp AB$ olacak şekilde H ve K noktaları seçelim,

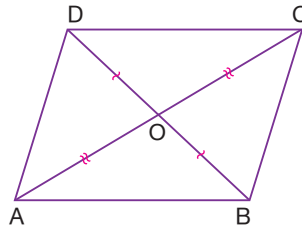
$DC \parallel AB$ olduğundan $|DH| = |CK|$ ve

$AD \parallel BC$ olduğundan $\widehat{m(DAB)} = \widehat{m(CBK)}$ olup

Böylece, DAH ve CBK eş üçgenleri elde edilir.

Böylece, $|AD| = |BC|$ dir.

- Bir paralelkenarda köşegenler birbirini ortalar.



ABCD paralelkenar
 $|AO| = |OC|$
 $|BO| = |OD|$

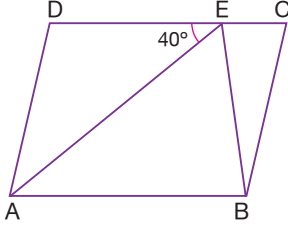
İspat :

$|DC| = |AB|$ ve $DC \parallel AB$ olduğundan

DOC ve BOA eş üçgenler olup.

Böylece, $|DO| = |OB|$ ve $|AO| = |OC|$ bulunur.

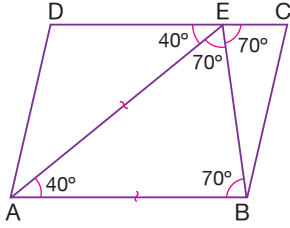
ÖRNEK - 1



ABCD paralelkenar
 $|AE| = |DC|$
 $m(\widehat{AED}) = 40^\circ$

Buna göre, $\widehat{BEC}$ açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM



ABCD paralelkenar olduğundan,

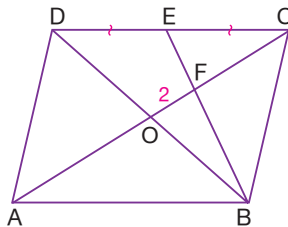
$|AB| = |DC| = |AE|$ dir.

ABE ikizkenar üçgeninde,

$m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{AEB}) = 70^\circ$ olur.

Dolayısıyla $m(\widehat{BEC}) = 70^\circ$ bulunur.

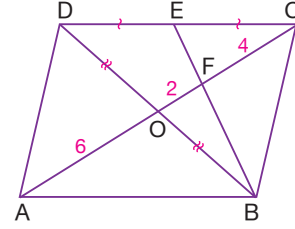
ÖRNEK - 2



ABCD paralelkenar
 $[AC]$ köşegen
 $[BD]$ köşegen
 $|DE| = |EC|$
 $|OF| = 2$ birim

Buna göre, $|AC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



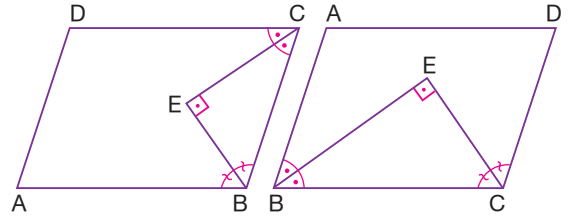
ABCD paralelkenarında köşegenler birbirini ortadığından $|DO| = |OB|$ dir.

$\triangle BDC$ nde $[CO]$ ve $[BE]$ kenarortay olduğundan F noktası $\triangle BDC$ üçgeninin ağırlık merkezi olur.

Dolayısıyla,

$|FC| = 4$ birim ve $|AC| = 12$ birim bulunur.

➤ Bir paralelkenarda komşu iki açının açıortay doğruları dik kesişir.



İspat :

$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCD}) = 180^\circ$ (karşı durumlu açılar.)

$2m(\widehat{ECB}) + 2m(\widehat{EBA}) = 180^\circ$

$m(\widehat{ECB}) + m(\widehat{EBA}) = 90^\circ$

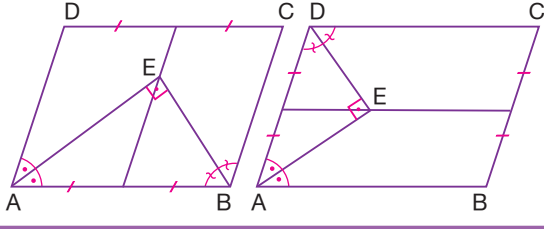
BEC üçgeninde,

$m(\widehat{BEC}) + m(\widehat{ECB}) + m(\widehat{EBC}) = 180^\circ$ olup

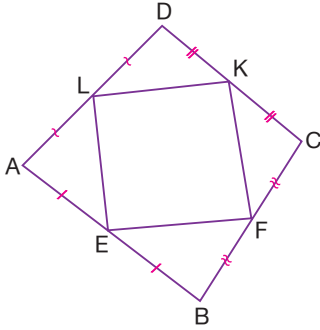
$m(\widehat{BEC}) = 90^\circ$ bulunur.

UYARI

Bir paralelkenarda komşu iki açının açıortaylarının kesiştiği noktadan paralelkenarın orta tabanı geçer.

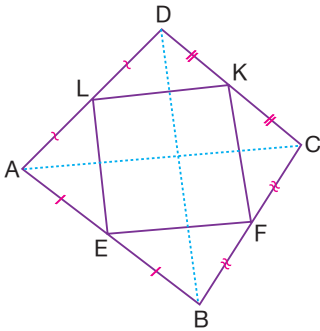


- Herhangi bir dörtgende kenar orta noktalarının birleştirilmesi ile elde edilen dörtgen paralelkenardır.



E, F, K, L orta noktalar ise EFKL paralelkenardır.

İspat :



[AC] ve [BD] köşegenleri çizilirse,

$FK \parallel BD$ ve $BD \parallel LE$

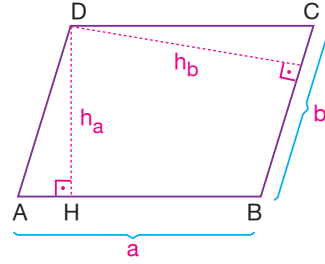
$LK \parallel AC$ ve $EF \parallel AC$ olup

Böylece EFKL dörtgeninin kenarlarının karşılıklı paralel olduğu görülür.

O halde, EFKL bir paralelkenardır.

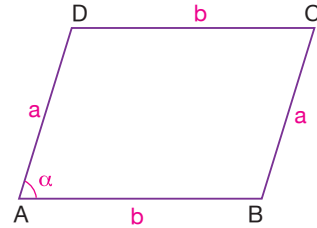
Paralelkenarsal Bölgenin Alanı

1. Bir paralelkenarsal bölgenin alanı paralel olan herhangi iki kenarı arasındaki uzaklık ile bu kenarlarından birinin çarpımına eşittir.



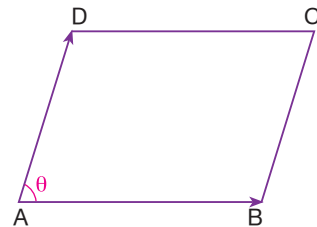
$$A(ABCD) = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

2. Bir paralelkenarsal bölgenin alanı paralelkenarın ardışık iki kenar uzunluğunun çarpımı ile bu iki kenar arasında kalan açının sinüs değerinin çarpımına eşittir.



$$A(ABCD) = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Yukarıdaki eşitliği aşağıdaki gibi vektörel olarak da ifade edebiliriz.

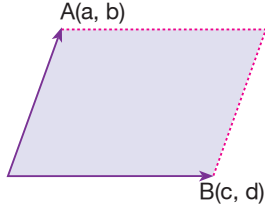


$$A(ABCD) = \sqrt{\|\vec{AB}\|^2 \cdot \|\vec{AD}\|^2 - \langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle^2}$$

$$= \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AD}\| \cdot \sin \theta$$

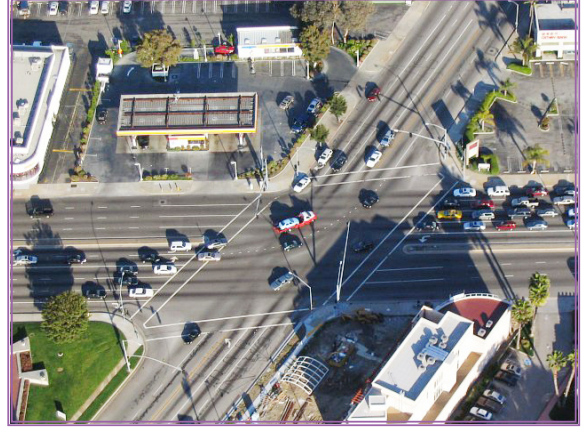
✓ **Pratik Bilgi**

$\vec{A} = (a, b)$ ve $\vec{B} = (c, d)$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarsal bölgenin alanının

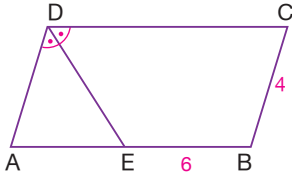


$$S = |b \cdot c - a \cdot d|$$

olduğunu daha önceki derslerimizden biliyoruz.



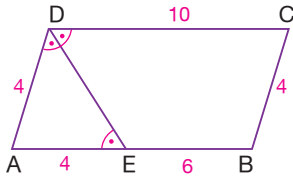
ÖRNEK - 1



ABCD paralelkenar
[DE] açıortay
 $|CB| = 4$ birim
 $|BE| = 6$ birim

Buna göre, $|DC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$DC \parallel AB$ olduğundan,

$m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{DEA})$ olur. (iç ters açılar.)

Bu durumda,

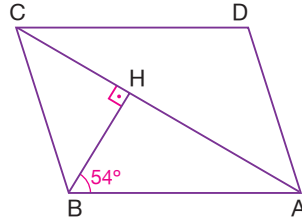
ADE ikizkenar üçgen olup

$|AD| = |AE| = 4$ birim dir.

Böylece,

$|DC| = 4 + 6 = 10$ birim bulunur.

ÖRNEK - 2

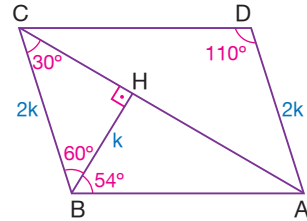


ABCD paralelkenar
[AC] köşegen
 $[BH] \perp [AC]$
 $|AD| = 2|BH|$
 $m(\widehat{ABH}) = 54^\circ$

Buna göre, $\widehat{ADC}$ açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

$|BH| = k$ birim, $|AD| = 2k$ birim diyelim.



Böylece, $|AD| = |BC| = 2k$ birim olup

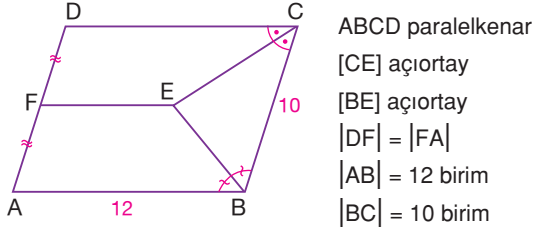
BHC üçgeni $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ bulunur.

ABCD paralelkenarında,

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADC})$ olduğundan,

$m(\widehat{ADC}) = 114^\circ$ bulunur.

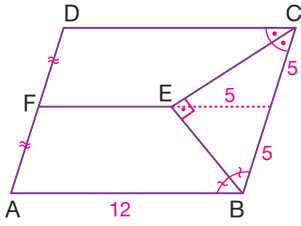
ÖRNEK - 3



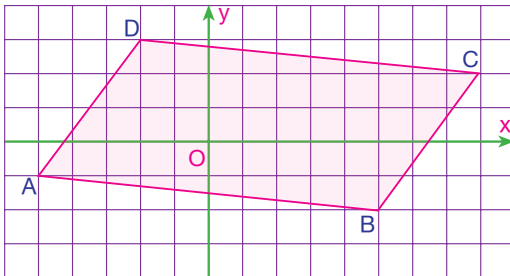
Buna göre, $|FE|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

[CE] ve [BE] açıortay olduğundan



ÖRNEK - 4



Buna göre, köşelerinin koordinatları ile verilen paralelkenarın alanını bulalım.

ÇÖZÜM

ABCD paralelkenarının köşe koordinatları,

- $A(-5, -1)$
- $B(5, -2)$
- $C(8, 2)$
- $D(-2, 3)$

olup bu paralelkenar $\vec{AD}$ ve $\vec{AB}$ vektörleri üzerine kurulmuştur.

$$\vec{AD} = D - A = (3, 4)$$

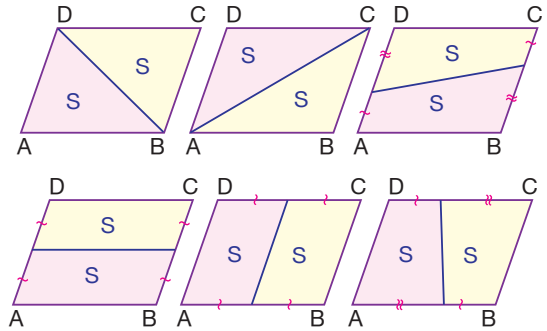
$$\vec{AB} = B - A = (10, -1) \text{ olup,}$$

$$A(ABCD) = 4 \cdot 10 - 3 \cdot (-1) = 43 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 5

Bir paralelkenarsal bölgenin alanını bir doğru parçası ile kaç farklı şekilde iki eşit alana bölebileceğimizi bulalım.

ÇÖZÜM



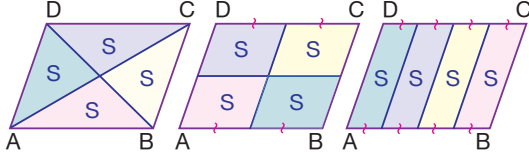
NOT :

5. örnekteki 6 şekilde de alanı bölmek için kullanılan ek çizginin orta noktası köşegenlerin kesim noktasıdır.

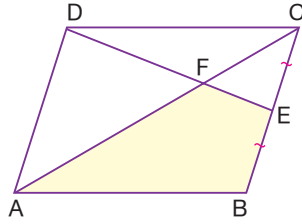
ÖRNEK - 6

Bir paralelkenarsal bölgenin alanını dört eşit alana bölebilecek şekilde ek çizimler yapalım.

ÇÖZÜM :



ÖRNEK - 7



ABCD paralelkenar
 $[AC] \cap [DE] = \{F\}$
 $|CE| = |EB|$
 $A(ABCD) = 48 \text{ br}^2$

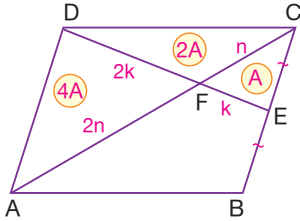
Buna göre, ABEF dörtgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

$[AD] \parallel [CE]$ olduğundan, $\widehat{DAF} \sim \widehat{ECF}$ dir.

$\frac{|AD|}{|CE|} = 2$ olduğundan,

$\frac{|DF|}{|FE|} = 2$ ve $\frac{A(ADF)}{A(FEC)} = 4$ yazılabilir.



$\frac{|AF|}{|FC|} = 2 \Rightarrow \widehat{A(DFC)} = 2A$ dir.

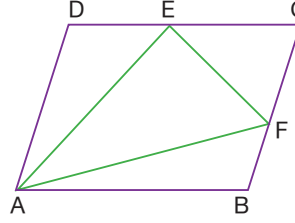
$[AC]$ köşegeni paralelkenarı ortaladığından,

$A(ABEF) = 5A$ olur.

Böylece $12A = 48 \Rightarrow A = 4$ ve

$A(ABEF) = 20 \text{ br}^2$ bulunur.

ÖRNEK - 8



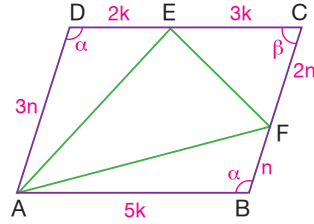
ABCD paralelkenar
 $3|DE| = 2|EC|$
 $|CF| = 2|FB|$
 $A(\widehat{AEF}) = 13 \text{ br}^2$

Buna göre, paralelkenarsal bölgenin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

$\widehat{m(ABC)}$, $\widehat{m(ABC)}$, $\widehat{m(ABC)}$, karşılaştırılırsa bu açılardan herhangi ikisinin ölçülerinin sinüs değerleri eşittir.

O halde,



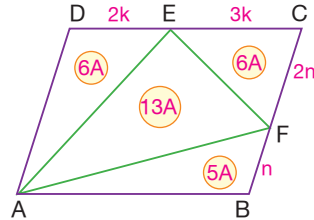
$$A(\widehat{ABF}) = \frac{1}{2} \cdot 5k \cdot n \cdot \sin \alpha = 5A$$

$$A(\widehat{FEC}) = \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot 3k \cdot \sin \beta = 6A$$

$$A(\widehat{ADE}) = \frac{1}{2} \cdot 3n \cdot 2k \cdot \sin \alpha = 6A$$

$$A(ABCD) = 2(3n \cdot 5k \cdot \sin \alpha) = 30A$$

değerlerini şekle yerleştirelim.



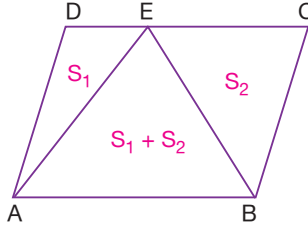
Böylece, $13A = 13 \Rightarrow A = 1$ olup

$A(ABCD) = 30A = 30 \text{ br}^2$ bulunur.

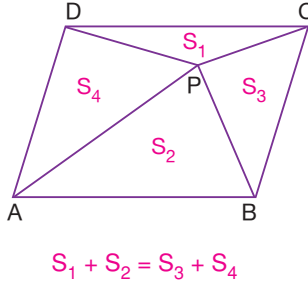
SONUÇLAR :

Aşağıdaki alan parçalanmalarını inceleyip anlamaya çalışınız.

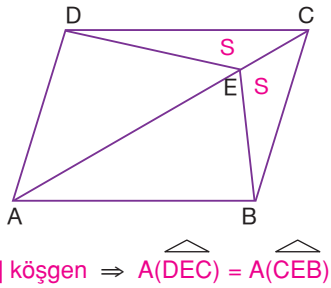
1.



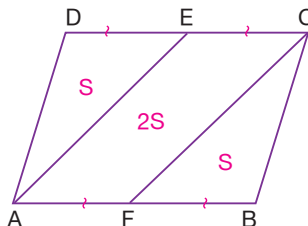
2.



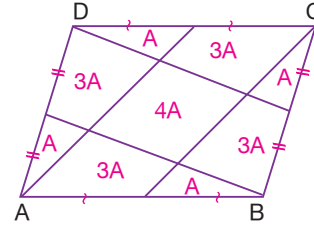
3.



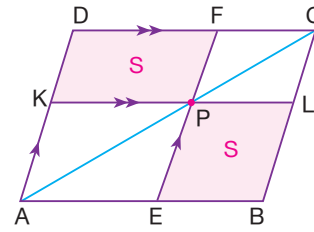
4.



5.

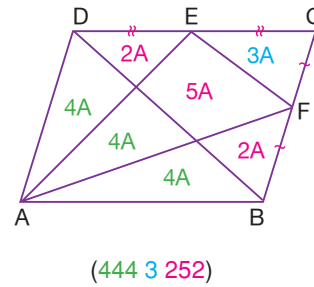


6.

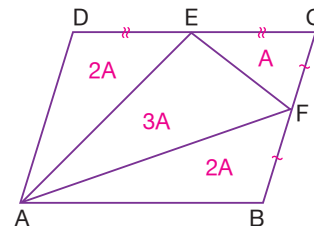


[KL] // [DC], [FE] // [BC] ve
A, P, C doğrusal ⇒ A(KPFD) = A(EBLP)

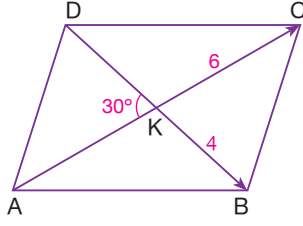
7.



8.



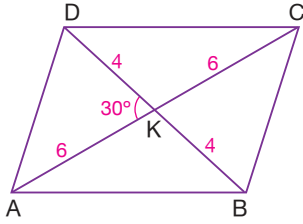
ÖRNEK - 1



ABCD paralelkenar
[BD] köşegen
[AC] köşegen
 $\| \overline{KC} \| = 6$ birim
 $\| \overline{KB} \| = 4$ birim
 $m(\widehat{AKD}) = 30^\circ$

Buna göre, ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM



Paralelkenarda köşegenler birbirini ortaladığından,

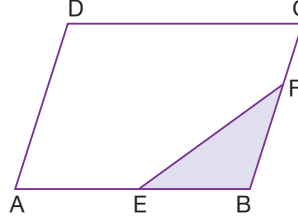
$$|AK| = |KC| = 6 \text{ birim ve}$$

$$|DK| = |KB| = 4 \text{ birim olur.}$$

Dolayısıyla, ABCD paralelkenarı köşegen uzunlukları ve köşegenler arasındaki açısının ölçüsü belli olan bir dörtgen olduğundan alanı,

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= \frac{|AC| \cdot |BD| \cdot \sin 30^\circ}{2} \\ &= \frac{12 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}}{2} \\ &= 24 \text{ br}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

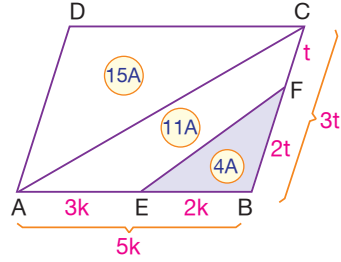
ÖRNEK - 2



ABCD paralelkenar
 $2|AE| = 3|EB|$
 $|BF| = 2|FC|$
 $A(ABCD) = 240 \text{ br}^2$

Buna göre, BEF üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM



[AC] köşegeni çizilirse,

$$\begin{aligned} \frac{A(\widehat{EBF})}{A(\widehat{ABC})} &= \frac{|EB| \cdot |BF|}{|AB| \cdot |BC|} \\ &= \frac{2k \cdot 2t}{5k \cdot 3t} = \frac{4}{15} \text{ olup.} \end{aligned}$$

$$A(\widehat{EBF}) = 4A, \quad A(\widehat{ABC}) = 15A$$

Dolayısıyla,

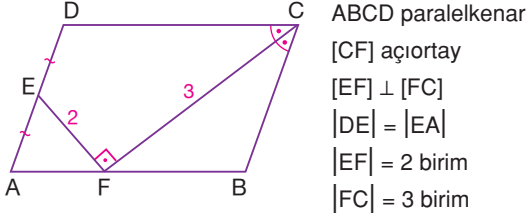
$$A(ABCD) = 30A \text{ olur.}$$

$$30A = 240 \text{ ise } A = 8 \text{ br}^2 \text{ ve}$$

$$A(\widehat{BEF}) = 4A \text{ olduğundan,}$$

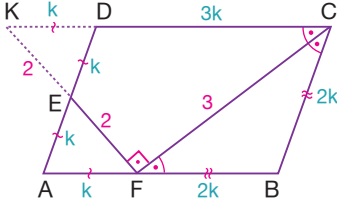
$$A(\widehat{BEF}) = 32 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3



Buna göre, ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :



$[FK]$ ve $[CK]$ uzatılırsa,

$\triangle KDE \cong \triangle FAE$ bulunur.

Dolayısıyla,

$|KE| = |EF| = 2$ birim ve

$A(KDE) = A(FAE)$ olur.

$A(FCK) = A(AFCD)$ olup

$A(AFCD) = \frac{4 \cdot 3}{2} \Rightarrow A(AFCD) = 6 \text{ br}^2$

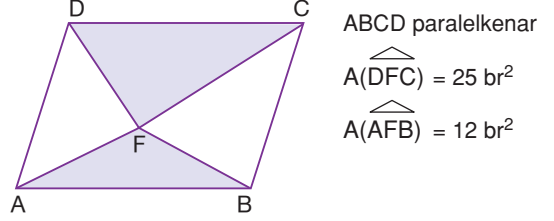
$\frac{A(CFK)}{A(FBC)} = \frac{4k}{2k} = 2$ eşitliği ile

$A(FBC) = 3 \text{ br}^2$ dir.

Dolayısıyla,

$A(ABCD) = 6 + 3 = 9 \text{ br}^2$ bulunur.

ÖRNEK - 4



Buna göre, ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

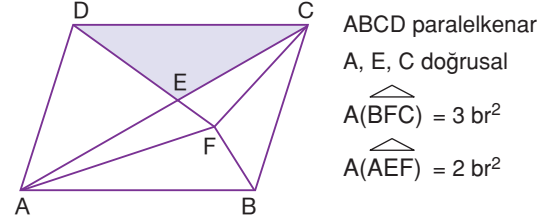
F noktası ABCD paralelkenarının içinde herhangi bir nokta olduğundan,

$A(\triangle ABF) + A(\triangle DFC) = A(\triangle ADF) + A(\triangle FBC) = \frac{A(ABCD)}{2}$ dir.

Dolayısıyla,

$12 + 25 = \frac{A(ABCD)}{2} \Rightarrow A(ABCD) = 64 \text{ br}^2$ bulunur.

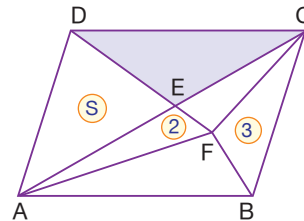
ÖRNEK - 5



Buna göre, $A(\triangle DEC)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

Köşegen paralelkenarın alanını ortalar.



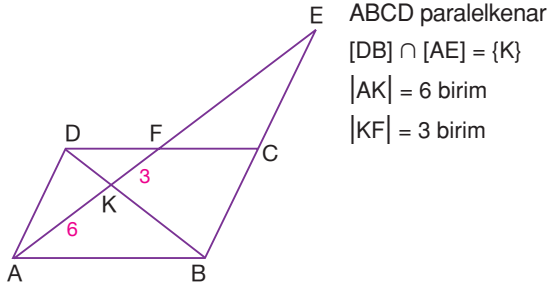
$A(\triangle ADE) = S$ diyelim.

$A(\triangle ADF) + A(\triangle BFC) = \frac{A(ABCD)}{2}$ ve

$A(\triangle ADC) = \frac{A(ABCD)}{2}$ olduğundan,

$S + 5 = S + A(\triangle DEC) \Rightarrow A(\triangle DEC) = 5 \text{ br}^2$ bulunur.

ÖRNEK - 6



Buna göre, $|FE|$ uzunluğunu bulalım.

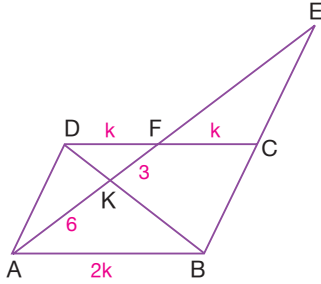
ÇÖZÜM

$[DF] \parallel [AB]$ olduğundan,

Tales teoremi gereği $|AB| = 2|DF|$ yazılabilir.

O halde $|DF| = k$ dersek,

$|AB| = 2k$ olup $|FC| = k$ olur.

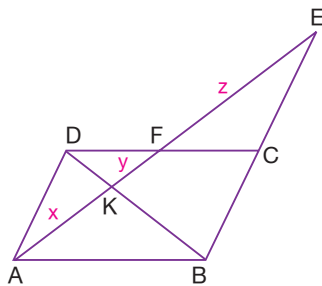


$[FC] \parallel [AB]$ olduğundan, $\widehat{EAB}$ nde,

Tales teoreminden $\frac{|FE|}{|FE| + 9} = \frac{k}{2k}$

$|FE| = 9$ birim bulunur.

✓ Pratik Bilgi



ABCD paralelkenar
 $x^2 = y(y + z)$

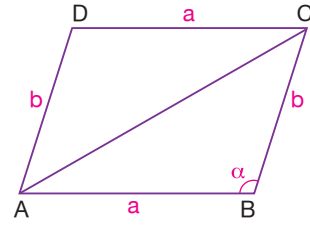
ÖRNEK - 7

Köşegen uzunlukları e, f ve kenar uzunlukları a, b olan bir paralelkenarda,

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$$

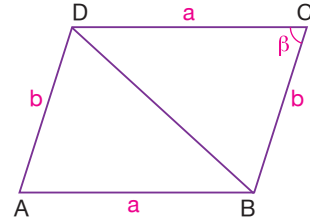
olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM



$\widehat{ABC}$ nde kosinüs teoremi ile,

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha \dots \textcircled{1}$$



$\widehat{BDC}$ nde kosinüs teoremi ile

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \beta \dots \textcircled{2} \text{ olup}$$

$\alpha + \beta = 180^\circ$ olduğundan,

$\cos \alpha = -\cos \beta$ dir.

Böylece,

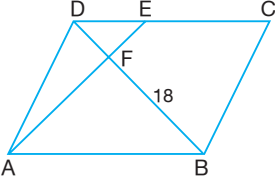
$\textcircled{1}$. ve $\textcircled{2}$. denklemler toplanırsa,

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2) \text{ bulunur.}$$

1. Bir ABCD paralelkenarında bir kenar ve bir köşegen vektörleri $\vec{DA} = (-2, 5)$ ve $\vec{BD} = (4, 7)$ dir.

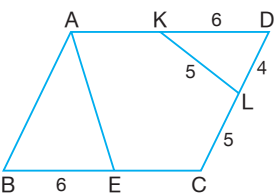
Buna göre, paralelkenarsal bölgenin alanı kaç br^2 dir?

- A) 34 B) 40 C) 43 D) 46 E) 49

2.  ABCD paralelkenar
A, F, E doğrusal
[BD] köşegen
|FB| = 18 birim
|CE| = 2|DE|

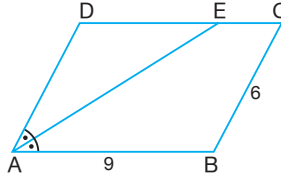
Buna göre, |DB| uzunluğu kaç birimdir?

- A) 20 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

3.  ABCD paralelkenar
|BE| = |KD| = 6 birim
|KL| = |LC| = 5 birim
|DL| = 4 birim

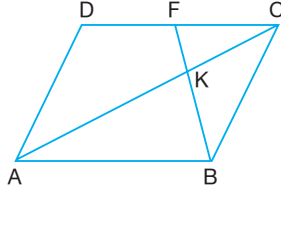
Buna göre, |AE| uzunluğu kaç birimdir?

- A) 6 B) $\frac{13}{2}$ C) $\frac{15}{2}$ D) $\frac{17}{2}$ E) 9

4.  ABCD paralelkenar
[AE] açıortay
|AB| = 9 birim
|BC| = 6 birim

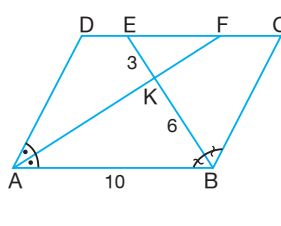
Buna göre, |EC| uzunluğu kaç birimdir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.  ABCD paralelkenar
[AC] köşegen
B, K, F doğrusal
D(2, 3)
F(3, n)
C(4, k)
|AC| = 24 birim

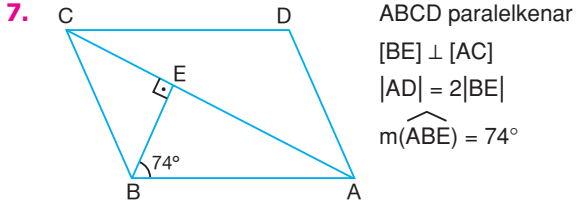
Buna göre, |AK| uzunluğu kaç birimdir?

- A) 18 B) 17 C) 16 D) 15 E) 14

6.  ABCD paralelkenar
[AF] açıortay
[BE] açıortay
|AB| = 10 birim
|BK| = 6 birim
|KE| = 3 birim

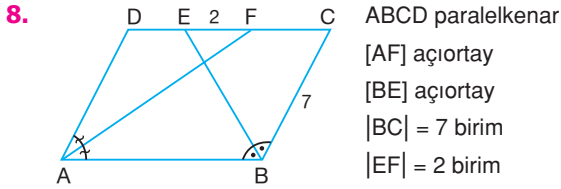
Buna göre, $\angle(ABCD)$ kaç birimdir?

- A) 35 B) 30 C) 25 D) 20 E) 15



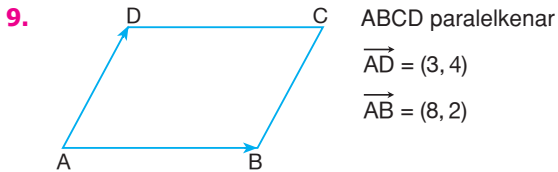
Buna göre, $\widehat{ADC}$ açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 100 B) 105 C) 110 D) 120 E) 134



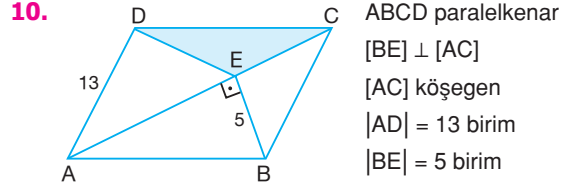
Buna göre, |AB| uzunluğu kaç birimdir?

- A) 13 B) 12 C) 10 D) 9 E) 7



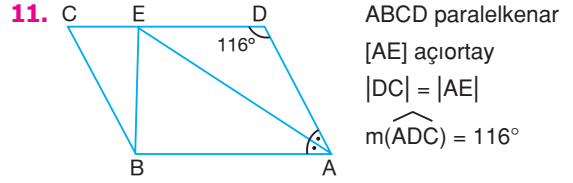
Buna göre, A(ABCD) kaç birim karedir?

- A) 26 B) 28 C) 32 D) 36 E) 40



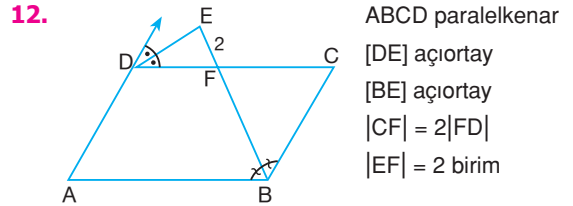
Buna göre, DEC üçgensel bölgesinin alanı kaç br² dir?

- A) 16 B) 18 C) 20 D) 28 E) 30



Buna göre, EBC açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 38 B) 39 C) 40 D) 41 E) 42

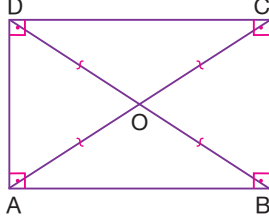


Buna göre, |FB| uzunluğu kaç birimdir?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

DİKDÖRTGEN

Açılarından biri dik olan paralelkenara dikdörtgen denir.

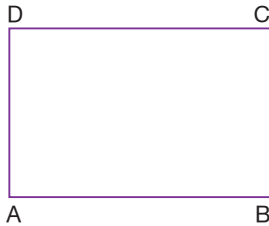


- ABCD dikdörtgen.
- Köşegenler birbirine eşittir.
 $|AC| = |BD|$
- Köşegenler birbirini ortalar.
 $|AO| = |OC| = |DO| = |OB|$

Paralelkenar ve Dikdörtgen Arasındaki Farklılıklar ve Benzerlikler

- İkisinde de köşegenler birbirini ortalar.
- Dikdörtgende köşegen uzunlukları birbirine eşit, Paralelkenarda köşegen uzunlukları farklıdır.
- Dikdörtgenin 2 tane simetri ekseni vardır, Paralelkenarın simetri ekseni yoktur.
- İkisinde de köşegenlerin kesim noktası ağırlık merkezidir.

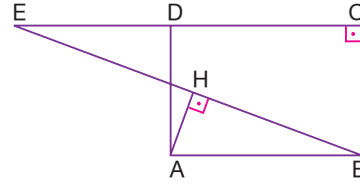
Bir Dikdörtgensel Bölgenin Alanı



$$A(ABCD) = \sqrt{\|\vec{AB}\|^2 \cdot \|\vec{AD}\|^2 - \langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle^2}$$

$$= \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AD}\|$$

ÖRNEK - 1



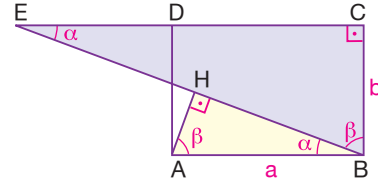
ABCD dikdörtgen
 $[AH] \perp [BE]$
 $|BE| = 12$ birim
 $A(ABCD) = 24$ br²

Buna göre, $|AH|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

1. Yol :

Şekilde gerekli açıları isimlendirelim.



$$A(ABCD) = 24 \text{ br}^2 \Rightarrow a \cdot b = 24 \text{ ve}$$

$$\widehat{CEB} \sim \widehat{HBA} \text{ (A.A.A)}$$

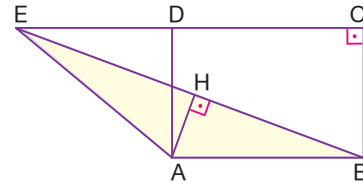
$$\frac{|EB|}{|BA|} = \frac{|CB|}{|HA|} \Rightarrow \frac{12}{a} = \frac{b}{|AH|}$$

İçler - dışlar çarpımı ile $12 \cdot |AH| = a \cdot b$

$$12 \cdot |AH| = 24 \Rightarrow |AH| = 2 \text{ birim bulunur.}$$

2. Yol :

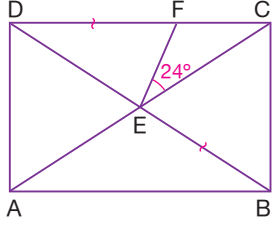
A ile E noktalarını birleştirelim.



$A(ACBD) = 2A(AEB)$ olduğundan,

$$24 = 2 \cdot \frac{|AH| \cdot 12}{2} \Rightarrow |AH| = 2 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

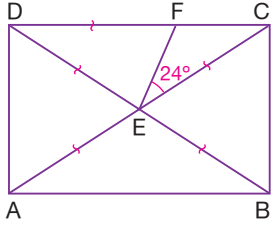


ABCD dikdörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
 $|BE| = |DF|$
 $m(\widehat{FEC}) = 24^\circ$

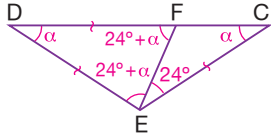
Buna göre, BDC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

Dikdörtgende köşegen uzunlukları eşit ve birbirini ortaladığından $|DE| = |EB| = |EC| = |EA|$ olur.



$m(\widehat{BDC}) = \alpha$ diyelim.



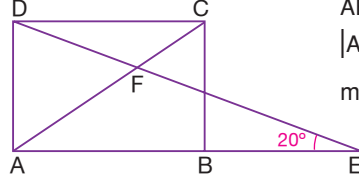
İç açıları toplamından,

$$3\alpha + 48^\circ = 180^\circ$$

$$3\alpha = 132^\circ$$

$$\alpha = 44^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

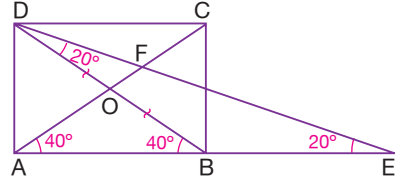


ABCD dikdörtgen
 $|AC| = |BE|$
 $m(\widehat{AED}) = 20^\circ$

Buna göre, AFD açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

[BD] köşegeni çizilirse, dikdörtgenin köşegen uzunlukları eşit olduğundan, $|AC| = |DB|$ dir.



$|AC| = |BE|$ olduğundan,

$|DB| = |BE|$ olduğu görülür.

O halde,

$$m(\widehat{BDE}) = 20^\circ \text{ ve}$$

$$m(\widehat{DBA}) = 40^\circ \text{ bulunur.}$$

$|OA| = |OB|$ olduğundan,

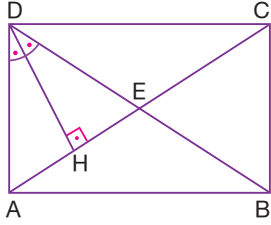
$$m(\widehat{CAB}) = 40^\circ \text{ olup}$$

$\widehat{FAE}$ nde dış açıdan,

$$m(\widehat{AFD}) = 40^\circ + 20^\circ$$

$$= 60^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 4



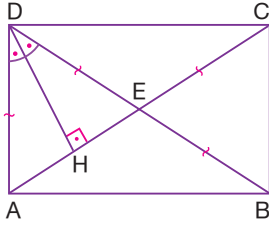
ABCD dikdörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
[DH] $\perp$ [AC]
[DH] açıortay

Buna göre, BAC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

Dikdörtgende köşegen uzunlukları eşit ve birbirini ortalar.

O halde $|AE| = |EB| = |EC| = |ED|$ olup



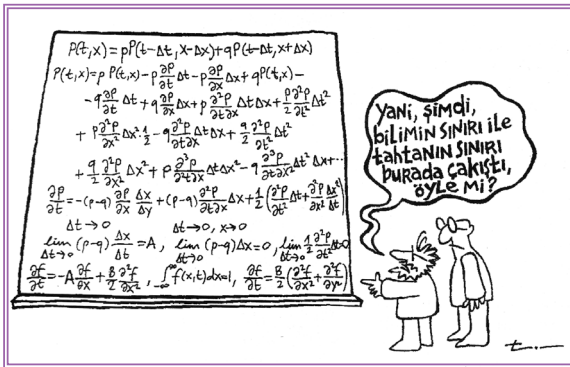
$\widehat{DHE} \cong \widehat{DHA}$ olduğundan,

$|DE| = |DA|$ dir.

ADE üçgeninin eşkenar üçgen olduğu anlaşılır.

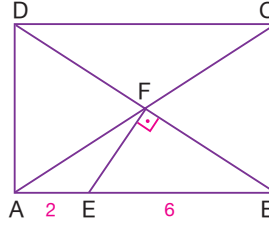
Böylece, $m(\widehat{DAE}) = 60^\circ$ olup

$m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$ bulunur.



(Matematik Dünyası Dergisi-www.matematikdunyasi.org)

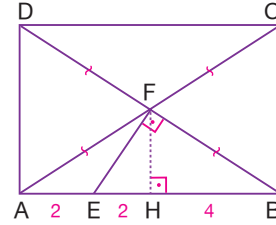
ÖRNEK - 5



ABCD dikdörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
[EF] $\perp$ [BD]
 $|AE| = 2$ birim
 $|EB| = 6$ birim

Buna göre, dikdörtgensel bölgenin alanının bulalım.

ÇÖZÜM



Dikdörtgende köşegen uzunluklar birbirine eşit olduğundan,

$|AF| = |FB|$ olup

$[FH] \perp [AB]$ olacak şekilde H noktası $[AB]$ nı eşit iki parçaya böler.

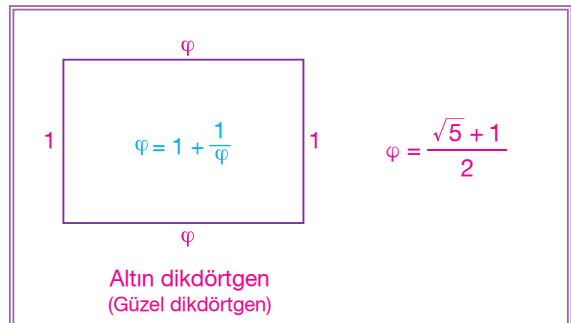
$\widehat{FEB}$ nde Öklid bağıntısı ile,

$$|FH|^2 = 2 \cdot 4 \Rightarrow |FH| = 2\sqrt{2} \text{ birim dir.}$$

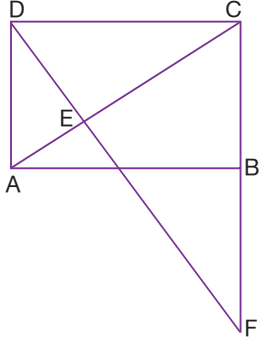
Böylece,

$$A(ABCD) = 4 \cdot A(\widehat{AFB})$$

$$= 4 \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot 8}{2} = 32\sqrt{2} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$



ÖRNEK - 6

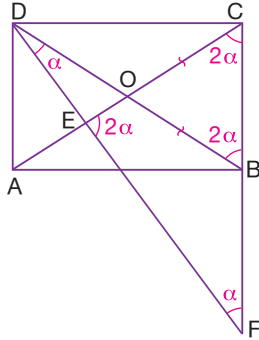


ABCD dikdörtgen
[AC] köşegen
C, B, F doğrusal
 $|AC| = |BF|$
 $|FC| = |FE|$

Buna göre, DFC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

[DB] köşegenini çizelim.



$|AC| = |DB|$ ve $|AC| = |BF|$ olduğundan,

$|DB| = |BF|$ bulunur. $m(\widehat{DFC}) = \alpha$ diyelim.

Böylece, $m(\widehat{BDF}) = \alpha$ olup

dış açıdan $m(\widehat{DBC}) = 2\alpha$ ve

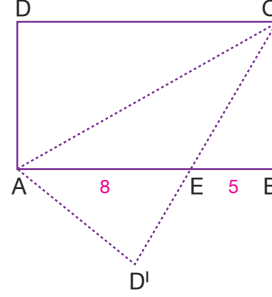
$|OB| = |OC|$ olduğundan, $m(\widehat{ACF}) = 2\alpha$ dır.

$|FC| = |FE|$ olduğundan, $m(\widehat{CEF}) = 2\alpha$ dır.

$\widehat{FEC}$ nde iç açılar toplamından,

$5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$ bulunur.

ÖRNEK - 7



ABCD dikdörtgen
 $|AE| = 8$ birim
 $|EB| = 5$ birim

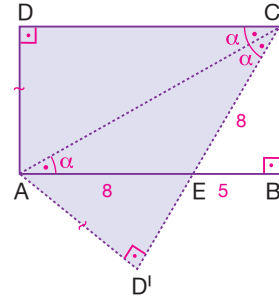
DAC üçgeninin yansıması D'AC üçgenidir.

Buna göre, $|BC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Yansıma dönüşümü uzunluk ve açıları değiştirmez.

O halde, $|AD| = |AD'|$ ve $|CD| = |CD'|$ dür.



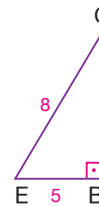
İç ters açılardan,

$m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{CAB}) = \alpha$ olduğundan,

$|AE| = |EC| = 8$ birim bulunur.

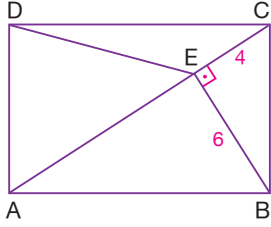
Böylece,

$\widehat{BEC}$ nde Pisagor bağıntısı ile,



$|BC|^2 + 5^2 = 8^2 \Rightarrow |BC| = \sqrt{39}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 8

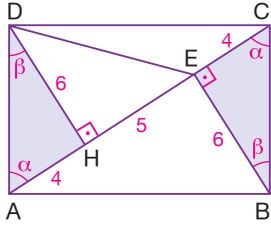


ABCD dikdörtgen
 $[BE] \perp [AC]$
 $|BE| = 6$ birim
 $|EC| = 4$ birim

Buna göre, $|DE|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$[DH] \perp [AC]$ olacak şekilde $H \in [AC]$ belirleyelim.



$\widehat{BEC} \sim \widehat{DHA}$ olup

$|BC| = |DA|$ olduğundan,

$\widehat{BEC} \cong \widehat{DHA}$ dir. O halde,

$|BE| = |DH| = 6$ birim ve

$|EC| = |HA| = 4$ birim olur.

$\widehat{BAC}$ nde Öklid bağıntısı ile

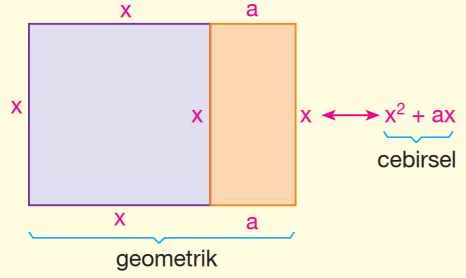
$|BE|^2 = |AE| \cdot |EC| \Rightarrow 6^2 = |AE| \cdot 4$ eşitliğinden,

$|AE| = 9$ birim bulunur.

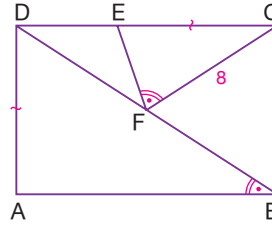
Böylece, $\widehat{DHE}$ nde Pisagor bağıntısı ile

$|DE|^2 = 6^2 + 5^2 \Rightarrow |DE| = \sqrt{61}$ birim bulunur.

Geometrik — Cebirsel



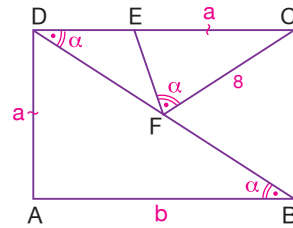
ÖRNEK - 9



ABCD dikdörtgen
 $[DB]$ köşegen
 $|AD| = |EC|$
 $m(\widehat{EFC}) = m(\widehat{ABD})$
 $|FC| = 8$ birim

Buna göre, dikdörtgensel bölgenin alanını bulalım.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{DBA}) = \alpha$ diyelim.

Böylece iç ters açıdan $m(\widehat{CDB}) = \alpha$ olup

$|CE| = |AD| = a$ ve $|AB| = b$ olsun.

$\widehat{FCE} \sim \widehat{DCF}$ olduğundan,

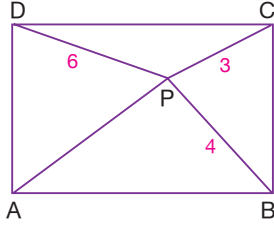
$\frac{|FC|}{|DC|} = \frac{|CE|}{|CF|} \Rightarrow \frac{8}{b} = \frac{a}{8}$ eşitliği ile

$a \cdot b = 64$ bulunur.

Böylece, $A(ABCD) = a \cdot b = 64$ br² bulunur.



ÖRNEK - 10

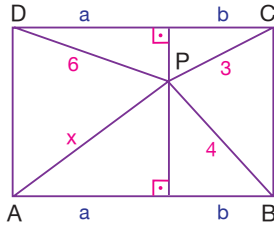


ABCD dikdörtgen
 $|PD| = 6$ birim
 $|PB| = 4$ birim
 $|PC| = 3$ birim

Buna göre, $|AP|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

P noktasından $[AB]$ ve $[DC]$ na dikmeler indirelim.

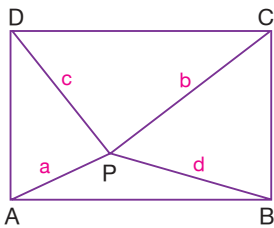


Böylece;

"Birbirine en uzak parçaların uzunluklarının kareleri toplamı eşit." olduğundan,

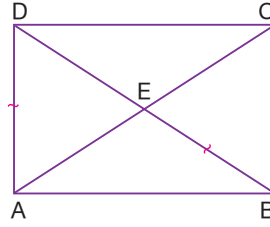
$$\begin{aligned} \widehat{PAB} \text{ nde } x^2 + b^2 &= a^2 + 4^2 \\ \widehat{PDC} \text{ nde } + a^2 + 3^2 &= b^2 + 6^2 \\ \hline x^2 + 9 &= 16 + 36 \\ x &= \sqrt{43} \text{ birim bulunur.} \end{aligned}$$

✓ Pratik Bilgi



P noktası nerede olursa olsun $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ dir.

ÖRNEK - 11

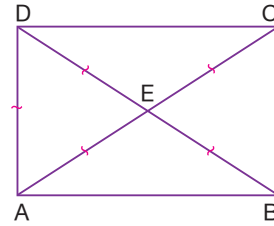


ABCD dikdörtgen
 $[AC]$ köşegen
 $[BD]$ köşegen
 $|EB| = |AD|$

Buna göre, $\angle ADB$ açısının ölçüsünü bulalım.

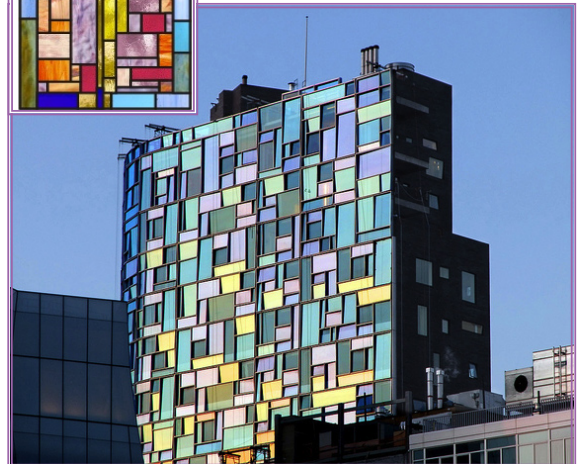
ÇÖZÜM

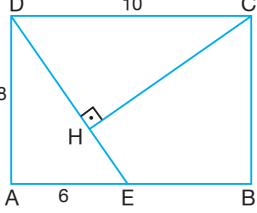
Dikdörtgenin köşegen uzunlukları eşit ve birbirini ortaladığında,



$\triangle AED$ üçgeni eşkenar üçgen olup

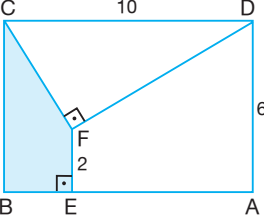
dolayısıyla $m(\angle ADB) = 60^\circ$ bulunur.



1.  ABCD dikdörtgen
[CH] $\perp$ [DE]
|AD| = 8 birim
|DC| = 10 birim
|AE| = 6 birim

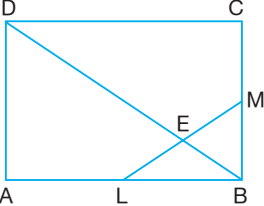
Buna göre, |HE| uzunluğu kaç birimdir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

2.  ABCD dikdörtgen
[DF] $\perp$ [FC]
[FE] $\perp$ [AB]
|AE| > |EB|
|DC| = 10 birim
|AD| = 6 birim
|FE| = 2 birim

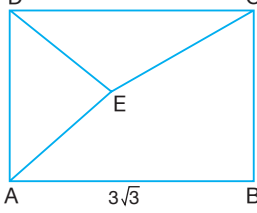
Buna göre, A(EBCF) kaç birim karedir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

3.  ABCD dikdörtgen
[DB] köşegen
L ve M noktaları bu-
lundukları kenarların
orta noktaları
|DB| = 12 birim

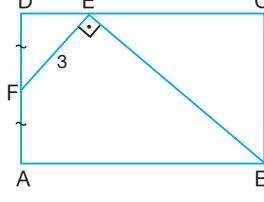
Buna göre, |LM| uzunluğu kaç birimdir?

- A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

4.  ABCD dikdörtgen
ADE eşkenar üçgen
|BC| = 2 birim
|AB| = $3\sqrt{3}$ birim

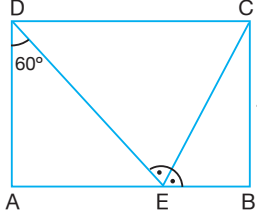
Buna göre, |EC| uzunluğu kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{13}$ C) $\sqrt{15}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

5.  ABCD dikdörtgen
[FE] $\perp$ [EB]
|DF| = |FA|
|FE| = 3 birim
|DE| + |DC| = 10 br

Buna göre, |EB| uzunluğu kaç birimdir?

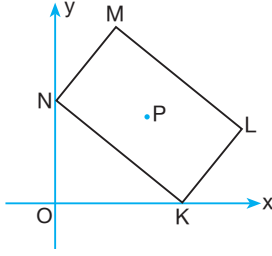
- A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

6.  ABCD dikdörtgen
 $m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{BEC})$
 $m(\widehat{ADE}) = 60^\circ$
|BC| = 4 cm

Buna göre, A(ABCD) kaç cm² dir?

- A) 36 B) 34 C) 32 D) 30 E) 38

7.

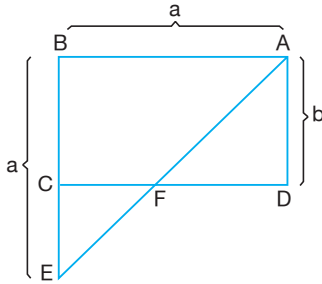


KLMN dikdörtgen
P, ağırlık merkezi
K(8, 0)
N(0, 12)
 $|KN| = 2|KL|$

Yukarıdaki verilere göre, P noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(3, \frac{9}{2})$ B) $(\frac{5}{2}, 4)$ C) (3, 4)
D) (6, 8) E) (7, 8)

8.

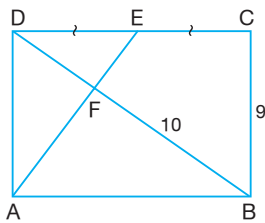


ABCD dikdörtgen
 $|AB| = |BE| = a$
 $|AD| = b$

Buna göre, $|FC|$ uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{b}{a}$ C) $\frac{a}{b}$ D) b E) $a - b$

9.

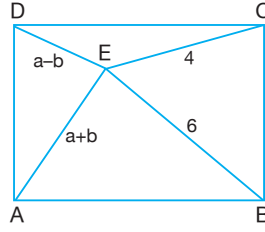


ABCD dikdörtgen
[BD] köşegen
 $|DE| = |EC|$
 $|BC| = 9$ birim
 $|BF| = 10$ birim

Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

10.



ABCD dikdörtgen
 $|EC| = 4$ birim
 $|EB| = 6$ birim
 $|DE| = a - b$ birim
 $|AE| = a + b$ birim

Buna göre, $a \cdot b$ çarpımı kaç eşittir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

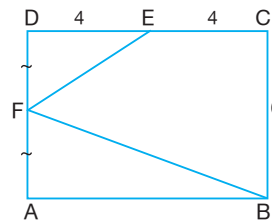
11.

Uzun kenarı a birim, kısa kenarı b birim olan bir dikdörtgenin çevre uzunluğu $a - b$ farkının 5 katına eşittir.

Buna göre, $\frac{a}{b}$ oranı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 3 B) 2 C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{7}{3}$

12.



ABCD dikdörtgen
 $|DF| = |FA|$
 $|DE| = |EC| = 4$ birim
 $|BC| = 6$ birim

Buna göre, $\langle \vec{AB}, (\vec{EF} + \vec{FB}) \rangle$ çarpımı kaç eşittir?

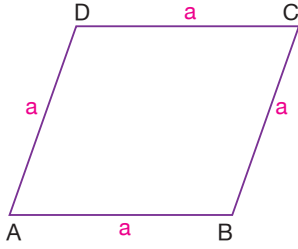
- A) 32 B) 36 C) 40 D) 44 E) 50

EŞKENAR DÖRTGEN

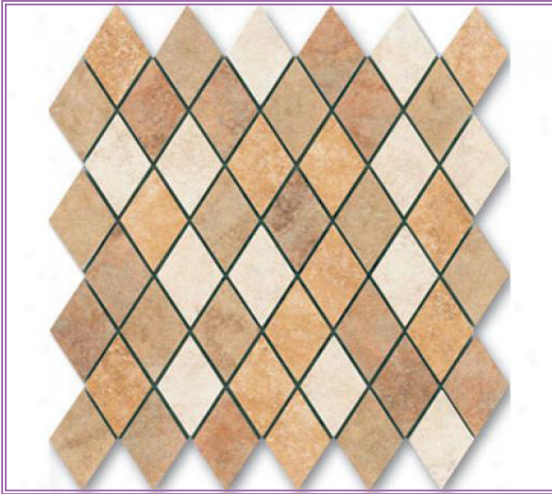


Bazı yapılarda eşkenar dörtgen modeli kullanılmaktadır.

Kenar uzunlukları eşit olan paralelkenara **eşkenar dörtgen** denir.



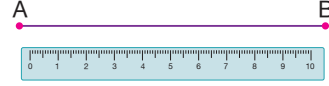
ABCD eşkenar dörtgen



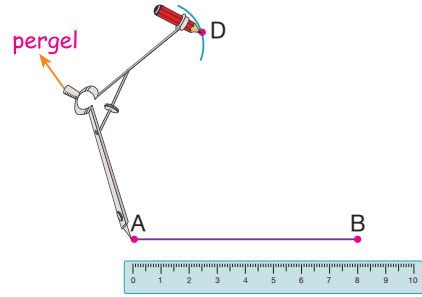
Yukarıda eşkenar dörtgenlerle yapılmış bir kaplama görülmektedir.

Bir Eşkenar Dörtgenin Pergel ve Cetvelle Çizimi

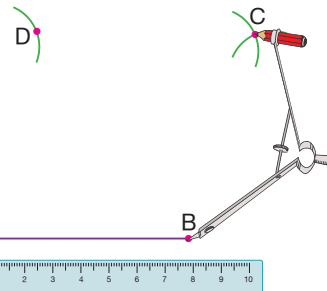
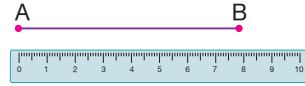
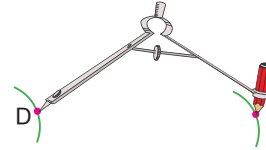
1. Adım : Bir [AB] doğru parçası çizelim.



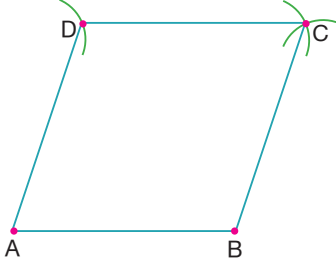
2. Adım : Pergeli AB kadar açıp A merkezli bir yay çizip bir D noktası belirleyelim.



3. Adım : Pergelin açıklığını bozmadan D ve B merkezli yaylar çizerek C noktası belirleyelim.



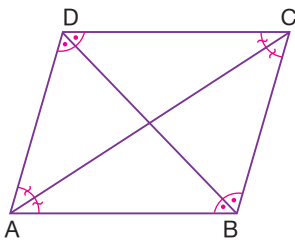
4. Adım : Elde edilen A, B, C, D noktaları sırayla birleştirilerek ABCD eşkenar dörtgeni çizilmiş olur.



Bir yüzeyin eşkenar dörtgen şeklindeki fayanslarla döşenmiş hali.

Teorem :

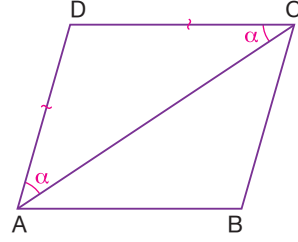
Bir eşkenar dörtgende köşegenler açıortaydır.



[AC] açıortay
[BD] açıortay

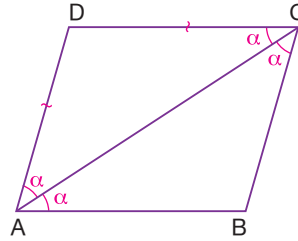
Yukarıdaki teoremi paragraf ispat biçimini kullanarak ispatlayalım.

İspat :



ABCD eşkenar dörtgen olduğundan $|AD| = |DC|$ dir.

O halde, $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCA}) = \alpha$ diyelim.



$AD \parallel BC$ olduğundan, $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ACB}) = \alpha$ ve

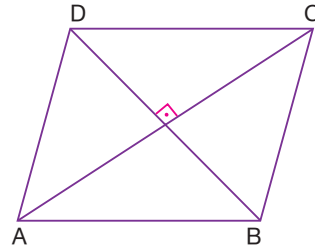
$DC \parallel AB$ olduğundan, $m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{CAB}) = \alpha$ olur.

O halde [AC] açıortaydır.

Aynı mantıkla, [BD] de açıortaydır.

Teorem :

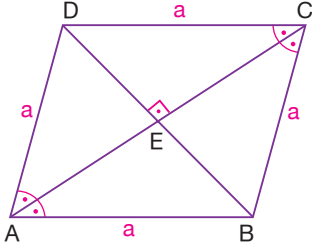
Bir eşkenar dörtgende köşegenler dik kesişir.



ABCD eşkenar dörtgen ve $[AC] \perp [BD]$ dir.

Yukarıdaki teoremi paragraf ispat biçimini kullanarak ispatlayalım.

İspat :



Bir önceki teoremden köşegenlerin açıortay olduğu ispatlanmıştı.

O halde, $[AC]$ açıortaydır.

Bu durumda $\widehat{ABD}$ ile $\widehat{CBD}$ eş iki üçgendir. (K.A.K)

O halde, $m(\widehat{CED}) = m(\widehat{CEB})$ olur.

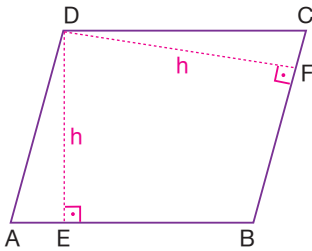
Bu ancak $m(\widehat{CED}) = m(\widehat{CEB}) = 90^\circ$ olması ile mümkündür.



NOT :

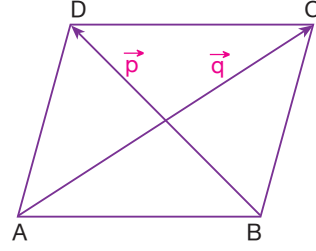
Bir paralelkenarın köşegenlerinin kesim noktası dik ise bu paralelkenara eşkenar dörtgen denir.

➤ Bir eşkenar dörtgenin yükseklikleri birbirine eşittir.



ABCD eşkenar dörtgen ise $|DE| = |DF|$ dir.

Bir Eşkenar Dörtgensel Bölgenin Alanı



$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = \vec{q} \\ \overrightarrow{BD} = \vec{p} \end{array} \right\} \text{ olmak üzere, } A(ABCD) = \frac{\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\|}{2}$$

ÖRNEK - 1

Köşe koordinatları $A(-3, 0)$, $B(-8, 0)$, $C(a, b)$ ve $D(1, 3)$ olan ABCD eşkenar dörtgensel bölgenin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

Bir eşkenar dörtgensel bölgenin alanını hesaplamak için köşegen vektör uzunluklarının bilinmesi ya da en az üç köşesinin koordinatlarının bilinmesi yeterlidir.

O halde $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AD}$ köşegen vektörlerini bulalım.

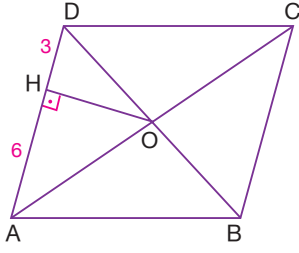
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (-5, 0) \text{ olup,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= D - A \\ &= (4, 3) \text{ olup,} \end{aligned}$$

$$A(\widehat{ABD}) = \frac{1}{2} |-5 \cdot 3 - 4 \cdot 0| = \frac{15}{2} br^2 \text{ ve}$$

$$A(ABCD) = 15 br^2 \text{ bulunur.}$$

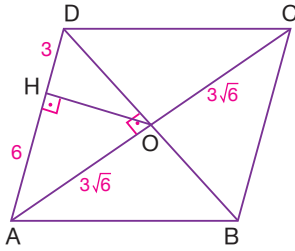
ÖRNEK - 2



ABCD eşkenar dörtgen
[AC] köşegen
[BD] köşegen
[OH] $\perp$ [AD]
|DH| = 3 birim
|AH| = 6 birim

Buna göre, |AC| uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



Bir eşkenar dörtgende köşegenler birbirini dik ortalağından,

[AC] $\perp$ [BD] ve

|AO| = |OC| dir.

[AC] $\perp$ [BD] olduğundan $\widehat{AOD}$ nde,

|AO|² = |AH| · |AD| (Öklid bağıntısı)

|AO|² = 6 · 9 eşitliğinden

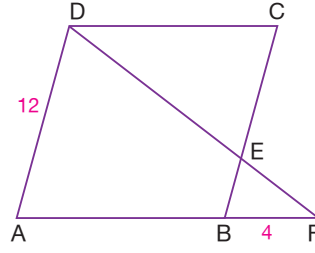
|AO| = $3\sqrt{6}$ birim bulunur.

|AO| = |OC| olduğundan,

|OC| = $3\sqrt{6}$ birim ve

dolayısıyla |AC| = $6\sqrt{6}$ birim bulunur.

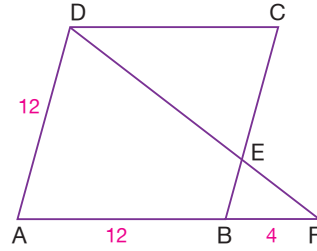
ÖRNEK - 3



ABCD eşkenar dörtgen
A, B, F doğrusal
D, E, F doğrusal
|AD| = 12 birim
|BF| = 4 birim

Buna göre, |BE| uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

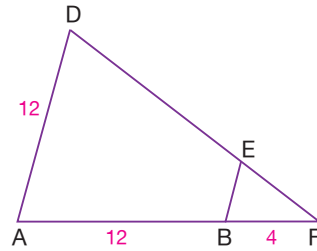


Bir eşkenar dörtgende karşılıklı kenarlar birbirine paralel ve tüm kenar uzunlukları birbirine eşittir.

|AB| = 12 birim ve

[BC] // [AD] olduğundan,

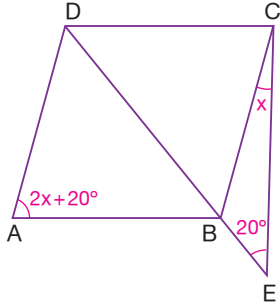
$\widehat{AFD}$ nde temel orantı benzerliğinden,



$$\frac{|BF|}{|AF|} = \frac{|BE|}{|AD|}$$

$$\frac{4}{16} = \frac{|BE|}{12} \Rightarrow |BE| = 3 \text{ birim bulunur.}$$

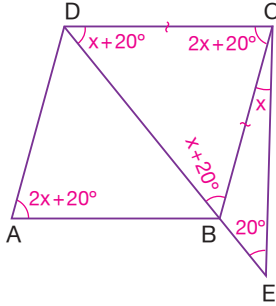
ÖRNEK - 4



ABCD eşkenar dörtgen
 $m(\widehat{DAB}) = 2x + 20^\circ$
 $m(\widehat{DEC}) = 20^\circ$
 $m(\widehat{BCE}) = x$

Buna göre, x in kaç derece olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM



ABCD eşkenar dörtgen olduğundan,

$|DC| = |BC|$ dir.

Bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşit olduğundan,

$\widehat{BEC}$ nde $m(\widehat{DBC}) = x + 20^\circ$ ve

$|DC| = |BC|$ olduğundan,

$m(\widehat{CDB}) = x + 20^\circ$ bulunur.

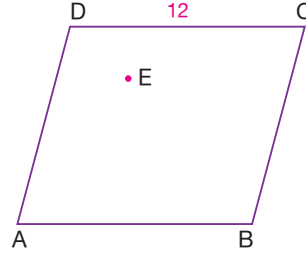
Bir eşkenar dörtgende karşılıklı açılarının ölçüleri birbirine eşit olduğundan,

$m(\widehat{DCB}) = 2x + 20^\circ$ olur.

$\widehat{DBC}$ nde $(x + 20^\circ) + (x + 20^\circ) + (2x + 20^\circ) = 180^\circ$

$x = 30^\circ$ bulunur.

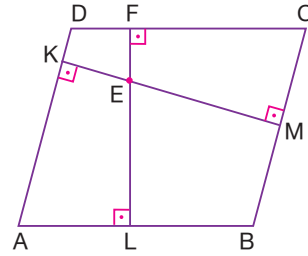
ÖRNEK - 5



ABCD eşkenar dörtgen
 E; eşkenar dörtgen içinde herhangi bir nokta
 $|DC| = 12$ birim

E noktasının kenarlara uzaklıkları toplamı 16 birim olduğuna göre, ABCD eşkenar dörtgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM



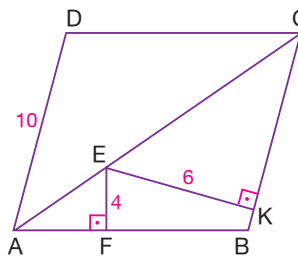
E noktasının kenarlara uzaklıkları toplamı iki tane yüksekliğin uzunluğuna eşittir.

$2h = 16$ ise $h = 8$ birim olur.

$A(ABCD) = |AB| \cdot h$

$|AB| \cdot h = 12 \cdot 8 \Rightarrow A(ABCD) = 96 \text{ br}^2$ bulunur.

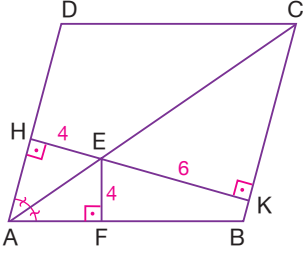
ÖRNEK - 6



ABCD eşkenar dörtgen
 [AC] köşegen
 $[EF] \perp [AB]$
 $[EK] \perp [BC]$
 $|EF| = 4$ birim
 $|EK| = 6$ birim
 $|AD| = 10$ birim

Buna göre, ABCD eşkenar dörtgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :



Bir eşkenar dörtgende köşegenler açıortay olduğundan $[AC]$ açıortay ve açıortay üzerindeki herhangi bir noktadan açının kollarına indirilen dikmelerin uzunlukları birbirine eşit olduğundan $|EH| = 4$ birim bulunur.

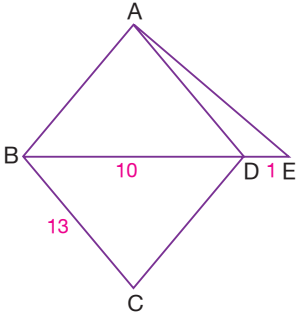
Dolayısıyla $ABCD$ eşkenar dörtgenin yüksekliği,

$$h = |HK| = 10 \text{ birim olur.}$$

$$A(ABCD) = |AD| \cdot h$$

$$= 10 \cdot 10 \Rightarrow A(ABCD) = 100 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

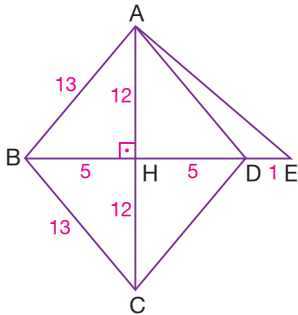
ÖRNEK - 7



$ABCD$ eşkenar dörtgen
 B, D, E doğrusal
 $|BC| = 13$ birim
 $|BD| = 10$ birim
 $|DE| = 1$ birim

Buna göre, $|AE|$ uzunluğunu bulalım.

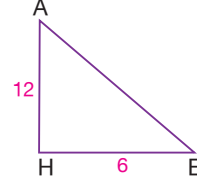
ÇÖZÜM :



Bir eşkenar dörtgende köşegenler birbirini dik ortala-
 ladığından,

$$[AC] \perp [BE] \text{ ve } |BH| = |HD| = 5 \text{ birim olur.}$$

Pisagor teoremi ile,



$$\triangle ABH \text{ nde } |AH| = 12 \text{ birim ve}$$

$$\triangle AHE \text{ nde } |AE| = 6\sqrt{5} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 8

Bir eşkenar dörtgenin köşegen vektörleri, $\vec{e}$ ve $\vec{f}$ olsun.

$$\frac{1}{\|\vec{e}\|} + \frac{1}{\|\vec{f}\|} = \frac{2}{3} \text{ ve } \|\vec{e}\| + \|\vec{f}\| = 16 \text{ birim}$$

olduğuna göre, bu eşkenar dörtgensel böl-
 genin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

$$\frac{1}{\|\vec{e}\|} + \frac{1}{\|\vec{f}\|} = \frac{2}{3} \text{ eşitliğinde paydalar eşitlenirse,}$$

$$\frac{\|\vec{e}\| + \|\vec{f}\|}{\|\vec{e}\| \cdot \|\vec{f}\|} = \frac{2}{3} \text{ ve}$$

$$\|\vec{e}\| + \|\vec{f}\| = 16 \text{ birim olduğundan,}$$

$$\frac{16}{\|\vec{e}\| \cdot \|\vec{f}\|} = \frac{2}{3} \text{ eşitliğinden,}$$

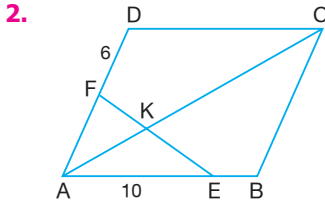
$$\|\vec{e}\| \cdot \|\vec{f}\| = 24 \text{ olup,}$$

$$A(ABCD) = \frac{\|\vec{e}\| \cdot \|\vec{f}\|}{2} = 12 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

1. Bir ABCD eşkenar dörtgeninde $\vec{BC}$ ve $\vec{BD}$ nin koordinat vektörleri sırasıyla $(4, 8)$ ve $(-8, 5)$ dir.

Buna göre, eşkenar dörtgensel bölgenin alanı kaç br^2 dir?

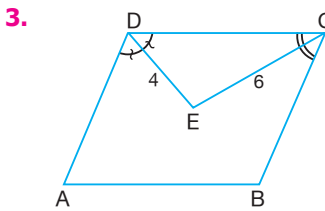
- A) 84 B) 86 C) 88 D) 90 E) 92



ABCD eşkenar dörtgen
[AC] köşegen
 $|KE| = 2|KF|$
 $|AE| = 10$ birim
 $|FD| = 6$ birim

Buna göre, $|EB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

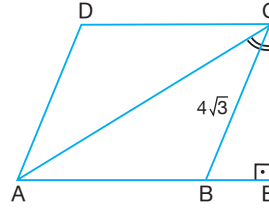


ABCD eşkenar dörtgen
[DE] açıortay
[CE] açıortay
 $|EC| = 6$ birim
 $|DE| = 4$ birim

Buna göre, $A(ABCD)$ kaç birim karedir?

- A) 30 B) 34 C) 36 D) 40 E) 48

4.

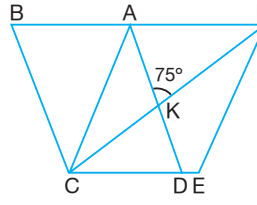


ABCD eşkenar dörtgen
[AC] köşegen
[CB] açıortay
[CE] $\perp$ [AE]
 $|BC| = 4\sqrt{3}$ birim

Buna göre, $A(ABCD)$ kaç birim karedir?

- A) $20\sqrt{3}$ B) $24\sqrt{3}$ C) $25\sqrt{3}$
D) $27\sqrt{3}$ E) $32\sqrt{3}$

5.

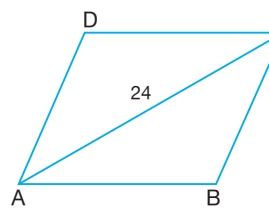


ABCD eşkenar dörtgen
ACEF eşkenar dörtgen
[AC] köşegen
[CF] köşegen
 $m(\angle AKF) = 75^\circ$

Buna göre, $\angle ACD$ açının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 70 B) 60 C) 55 D) 50 E) 40

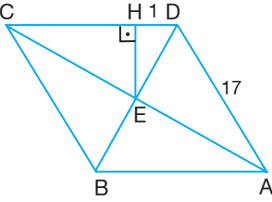
6.



ABCD eşkenar dörtgen
[AC] köşegen
 $\angle(ABCD) = 52$ birim
 $|AC| = 24$ birim

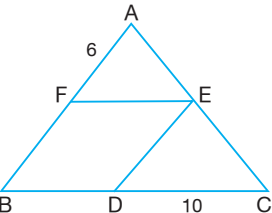
Buna göre, eşkenar dörtgenin köşegenlerinin uzunlukları toplamı kaç birimdir?

- A) 34 B) 38 C) 42 D) 44 E) 48

7.  ABCD eşkenar dörtgen
[AC] köşegen
[DB] köşegen
[EH] $\perp$ [DC]
|HD| = 1 birim
|AD| = 17 birim

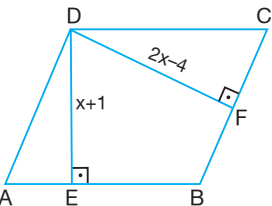
Buna göre, A(ABCD) kaç birim karedir?

- A) 156 B) 146 C) 136 D) 126 E) 116

8.  BDEF eşkenar dörtgen
|AF| = 6 birim
|DC| = 10 birim

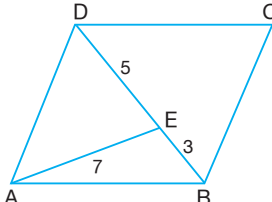
Buna göre, Ç(BDEF) kaç birimdir?

- A) $7\sqrt{15}$ B) $8\sqrt{15}$ C) $12\sqrt{15}$
D) $24\sqrt{15}$ E) $36\sqrt{15}$

9.  ABCD eşkenar dörtgen
[DF] $\perp$ [BC]
[DE] $\perp$ [AB]
|DF| = (2x - 4) birim
|DE| = (x + 1) birim
|AB| = 8 birim

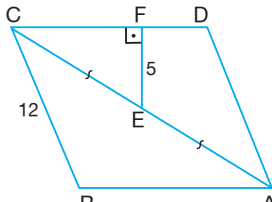
Buna göre, eşkenar dörtgensel bölgenin alanı kaç br² dir?

- A) 60 B) 52 C) 48 D) 40 E) 36

10.  ABCD eşkenar dörtgen
[DB] köşegen
|DE| = 5 birim
|EB| = 3 birim
|AE| = 7 birim

Buna göre, eşkenar dörtgensel bölgenin alanı kaç br² dir?

- A) $25\sqrt{3}$ B) $32\sqrt{3}$ C) $45\sqrt{3}$
D) $48\sqrt{3}$ E) $56\sqrt{3}$

11.  ABCD eşkenar dörtgen
[AC] köşegen
[EF] $\perp$ [DC]
|AE| = |EC|
|EF| = 5 birim
|BC| = 12 birim

Buna göre, eşkenar dörtgensel bölgenin alanı kaç br² dir?

- A) 136 B) 132 C) 118 D) 126 E) 120

12. Bir eşkenar dörtgende B(2, 3) ve D(4, -3) olduğuna göre, [AC] köşegenini taşıyan doğrunun eğimi kaçtır?

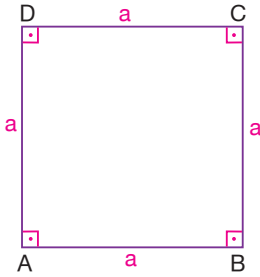
- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) 2

KARE

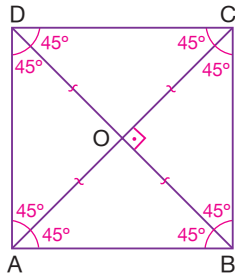


Şekildeki kavşak kare modelinden esinlenerek yapılmıştır.

- Kenar uzunlukları eşit olan dikdörtgene **kare** denir.



- Karenin köşegenleri açıortay olup eşit uzunluktadır.

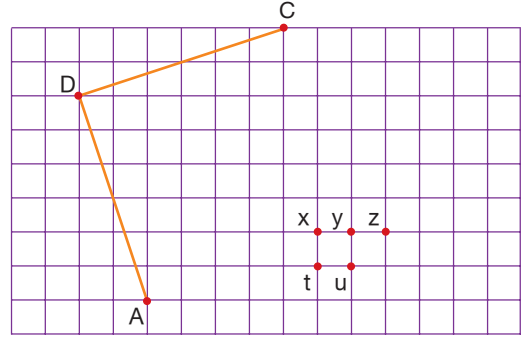


$$|AC| = |BD|$$

- Köşegenler birbirini dik ortalar.

$$[AC] \perp [BD] \text{ ve } |AO| = |OC| = |OB| = |OD|$$

ÖRNEK - 1



Yukarıdaki zeminde ABCD karesi çizilirse B köşesinin hangi nokta ile çakışacağını bulalım.

ÇÖZÜM

1. Yol : (Öteleme dönüşümü ile)

C noktası B noktasının $\vec{u} = (6, 2)$ doğrultusunda ötelenmiştir. Bu nedenle A noktasının $\vec{u} = (6, 2)$ doğrultusunda ötelenmiş aradığımız noktadır. Böylece, A noktasından **6 birim sağa** ve **2 birim yukarıya** gittiğimizde **y** noktasına ulaşırız.

2. Yol : (Yansıma dönüşümü ile)

Şeklin **AC** doğrusuna göre yansıması karenin diğer parçasını verir. O halde **D** noktasının **AC** doğrusuna göre simetrisi **B** köşesi ile çakışır ki bu nokta **y** noktasındadır.

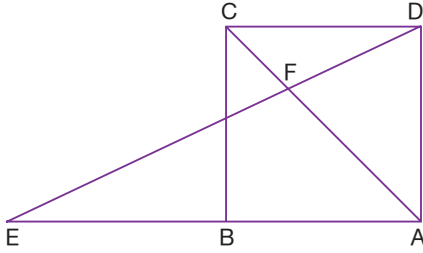
3. Yol :

Karenin karşılıklı kenarları paralel olduğundan $m_{DC} = \frac{1}{3}$ olup A noktasından geçen ve eğimi $\frac{1}{3}$ olan doğrunun **y** noktasından geçtiği görülür.



(Matematik Dünyası Dergisi-www.matematikdunyasi.org)

ÖRNEK - 2

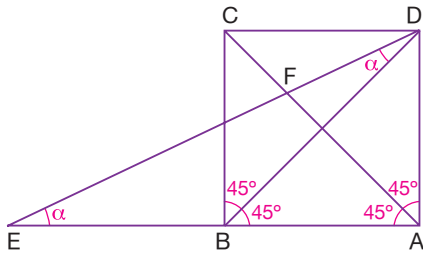


ABCD kare, $[AC] \cap [DE] = \{F\}$, $|AC| = |BE|$

Buna göre, AFD açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

Karenin köşegen uzunlukları eşit olduğundan, $[BD]$ köşegeni çizilirse, $|AC| = |BE|$ olduğundan, $|AC| = |BD| = |BE|$ olur.



$m(\widehat{BDE}) = \alpha$ dersek, $m(\widehat{DEA}) = \alpha$ olup

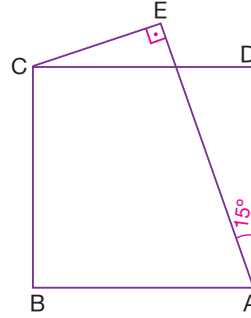
$\widehat{DBE}$ nde 45° dış açı olup

$2\alpha = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 22,5^\circ$ dir.

Böylece $\widehat{FAE}$ nde,

$m(\widehat{AFD}) = 45^\circ + 22,5^\circ = 67,5^\circ$ bulunur.

ÖRNEK - 3



ABCD kare

$[CE] \perp [EA]$

$m(\widehat{DAE}) = 15^\circ$

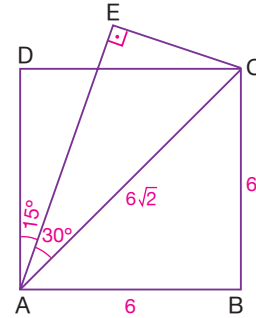
$A(ABCD) = 36 \text{ br}^2$

Buna göre, $|EC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$A(ABCD) = 36 \text{ br}^2 \Rightarrow |AB| = 6 \text{ birim}$ ve karenin köşegenleri açıortay olduğundan,

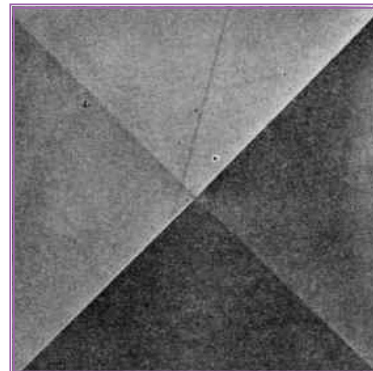
$[AC]$ köşegeni çizilirse,



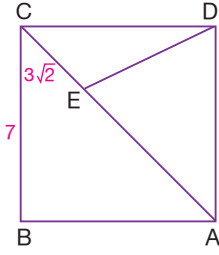
$m(\widehat{EAC}) = 30^\circ$ olup $|AC| = 6\sqrt{2}$ birim olduğundan,

$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ üçgeninden,

$|EC| = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ birim bulunur.



ÖRNEK - 4

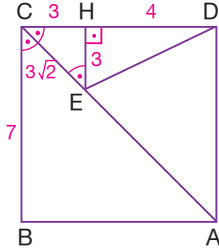


ABCD kare
[AC] köşegen
 $|CE| = 3\sqrt{2}$ birim
 $|CB| = 7$ birim

Buna göre, $|DE|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Karede köşegen açıortay olduğundan,
 $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ACB}) = 45^\circ$ dir.



$[EH] \perp [DC]$ olacak şekilde $[EH]$ çizilirse,

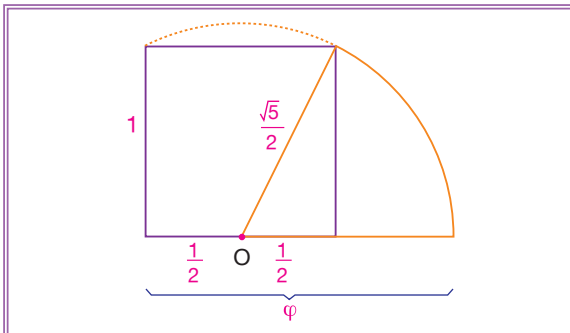
$|HC| = |HE| = 3$ birim bulunur.

$|DH| = 7 - 3 = 4$ birim olup

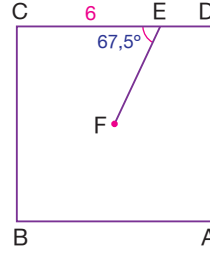
DHE dik üçgeninde Pisagor teoremi ile

$|DE|^2 = 3^2 + 4^2$ eşitliğinden,

$|DE| = 5$ birim bulunur.



ÖRNEK - 5



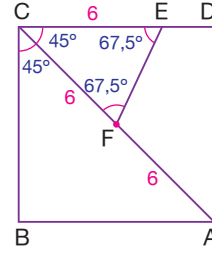
ABCD kare
F köşegenlerin
kesişme noktası
 $m(\widehat{FEC}) = 67,5^\circ$
 $|EC| = 6$ birim

Buna göre, karesel bölgenin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

[AC] köşegeni çizildiğinde,

Karenin köşegenleri açıortay olduğundan,



$\widehat{EFC}$ nde iç açılar toplamından,

$m(\widehat{EFC}) = 67,5^\circ$ olur.

O halde,

$|CE| = |CF| = 6$ birim dir.

F noktası köşegenlerin kesim noktası olduğundan,

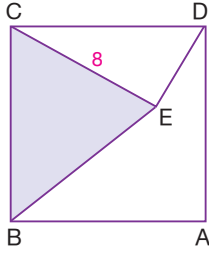
$|FA| = 6$ birim dir.

Böylece,

Karesel bölgenin alanı;

$A(ABCD) = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72 \text{ br}^2$ bulunur.

ÖRNEK - 6



ABCD kare
 $\langle \vec{ED}, \vec{EC} \rangle = 0$
 $|EC| = 8$ birim

Buna göre, BEC üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

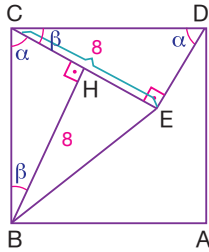
ÇÖZÜM

Skaler çarpımı sıfır olan iki vektör birbirine diktir.

$\langle \vec{ED}, \vec{EC} \rangle = 0$ ise $\vec{ED} \perp \vec{EC}$ dir.

O halde,

$[BH] \perp [EC]$ olacak şekilde $[BH]$ çizelim.



Gerekli açılar yazılırsa,

$\triangle DEC$ ile $\triangle CHB$ nin benzer olduğu görülür.

$|DC| = |CB|$ olduğundan,

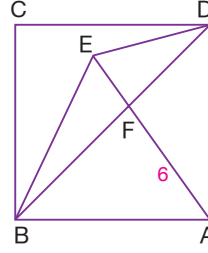
$\triangle DEC \cong \triangle CHB$ ve dolayısıyla,

$|EC| = |HB| = 8$ birim olup

(BEC) nin alanı

$A(BEC) = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32 \text{ br}^2$ bulunur.

ÖRNEK - 7



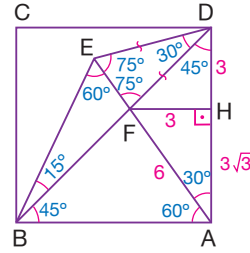
ABCD kare
 AEB eşkenar üçgen
 $[BD]$ köşgen
 $|AF| = 6$ birim

Buna göre, $|DE|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Karede köşegen açıortay olduğundan,

$m(\angle ABD) = m(\angle ADB) = 45^\circ$ dir.



$[FH] \perp [AD]$ olacak şekilde, $H \in [AD]$ seçelim.

O halde, $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ üçgeninde,

$\triangle AFH$ nde $|HF| = 3$ birim dir.

Gerekli açılar yazılıp,

$|AD| = |AE|$ eşitliğinden,

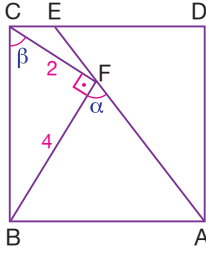
$m(\angle DFE) = m(\angle DEF) = 75^\circ$ olup

$|DF| = |DE|$ olur.

$\triangle DHF$ nde $|DF| = 3\sqrt{2}$ birim ise

$|DE| = 3\sqrt{2}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 8

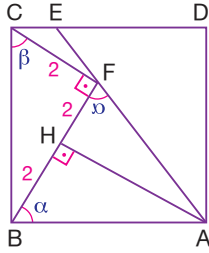


ABCD kare
 $[CF] \perp [FB]$
 $|CF| = 2$ birim
 $|FB| = 4$ birim
 $m(\widehat{AFB}) = \alpha$
 $m(\widehat{FCB}) = \beta$

Buna göre, α ve β arasındaki bağıntıyı bulalım.

ÇÖZÜM

$[AH] \perp [BF]$ olacak şekilde, $H \in [BF]$ seçelim.



Böylece, $\widehat{AHB}$ ve $\widehat{BFC}$ nin benzer olduğu ve

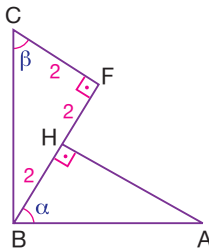
$|AB| = |BC|$ olduğu içinde,

$\widehat{AHB} \cong \widehat{BFC}$ olduğu anlaşılır.

O halde,

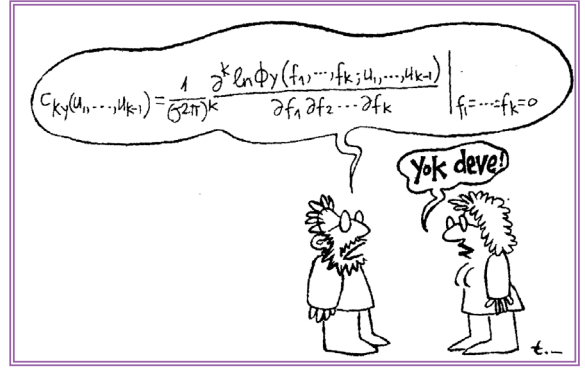
$|FC| = |HB| = 2$ birim dir.

Ayrıca, $\widehat{FHA} \cong \widehat{BHA}$ olduğundan,



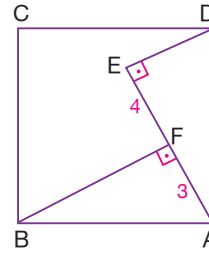
$m(\widehat{ABF}) = \alpha$ olup

Böylece $\alpha = \beta$ bulunur.



(Matematik Dünyası Dergisi-www.matematikdunyasi.org)

ÖRNEK - 9

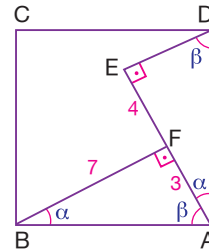


ABCD kare
 $[BF] \perp [AE]$
 $[DE] \perp [EA]$
 $|AF| = 3$ birim
 $|FE| = 4$ birim

Buna göre, $|AB|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Şekilde gerekli açılar isimlendirelim.



$\widehat{ADE}$ ile $\widehat{BAF}$ benzerdir. (A.A.A)

$|AB| = |AD|$ olduğundan,

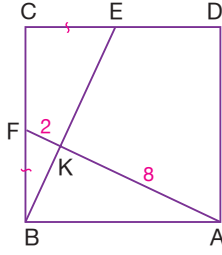
$\widehat{ADE} \cong \widehat{BAF}$ olduğu anlaşılır.

O halde, $|AE| = |BF| = 7$ birim olup

$\widehat{AFB}$ nde Pisagor teoremi ile

$|AB|^2 = 3^2 + 7^2 \Rightarrow |AB| = \sqrt{58}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 10

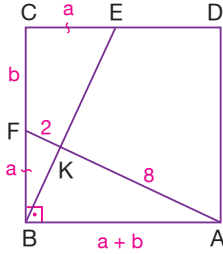


ABCD kare
 $[AF] \cap [BE] = \{K\}$
 $|BF| = |CE|$
 $|AK| = 8$ birim
 $|KF| = 2$ birim

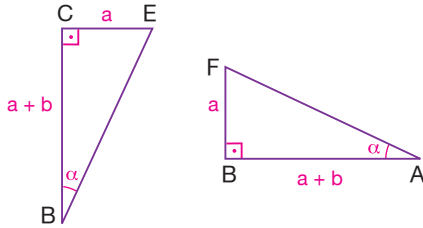
Buna göre, $|EK|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

$|EC| = |FB| = a$ ve $|CF| = b$ diyelim.



Böylece,

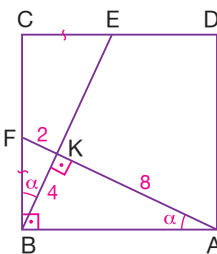


Şekiller dikkatlice incelenirse,

$\triangle ABF \cong \triangle BCE$ olduğu görülür. (K.A.K)

$m(\angle FAB) = \alpha$ diyelim.

O halde, $m(\angle EBC) = \alpha$ olup



$m(\angle AKB) = 90^\circ$ olup
 $\triangle ABF$ nde Öklid bağıntısı
 ile

$$|BK|^2 = 8 \cdot 2 \text{ ise}$$

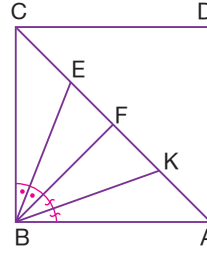
$$|BK| = 4 \text{ birim olup}$$

$\triangle ABF \cong \triangle BCE$ olduğundan,

$$|AF| = |BE| = 10 \text{ birim dir.}$$

Böylece, $|KE| = 10 - 4$
 $= 6$ birim bulunur.

ÖRNEK - 11



ABCD kare
 $[AC]$ köşegen
 $[BE]$ açıortay
 $[BK]$ açıortay
 $|KE| \cdot |KC| = 24 \text{ br}^2$

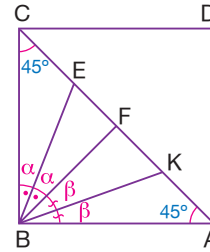
Buna göre, $|BK|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

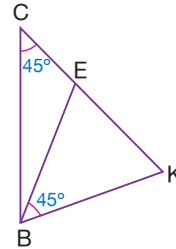
$m(\angle CBE) = \alpha$, $m(\angle ABK) = \beta$ diyelim.

$2\alpha + 2\beta = 90^\circ$ olduğundan, $\alpha + \beta = 45^\circ$ olup

$m(\angle EBK) = 45^\circ$ bulunur.



Karenin köşegeni açıortay olduğundan,

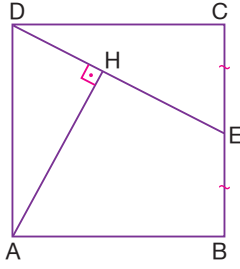


$\triangle BKE \sim \triangle CKB$ dir.

$$\frac{|KE|}{|KB|} = \frac{|BK|}{|CK|} \text{ ve } |BK|^2 = |KE| \cdot |KC|$$

$$|BK|^2 = 24 \Rightarrow |BK| = 2\sqrt{6} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 12

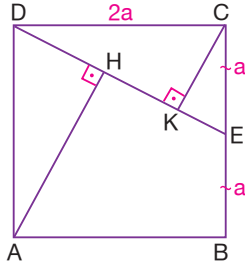


ABCD kare
 $|CE| = |EB|$
 $[AH] \perp [DE]$

Buna göre, $\frac{|DH|}{|HE|}$ oranını bulalım.

ÇÖZÜM :

Karenin bir kenar uzunluğu $2a$ birim olsun.

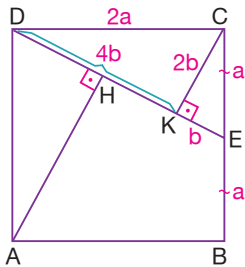


$[CK] \perp [DE]$ olacak şekilde $K \in [DE]$ alalım.

Bu durumda, CDE dik üçgeninde,

$$\frac{|CD|}{|CE|} = 2 \text{ olduğundan,}$$

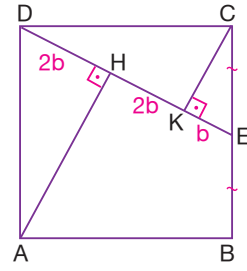
Öklid bağıntısı ile $\frac{|DK|}{|KE|} = 4$ olur.



$|DK| = 4b$ dersek $|KE| = b$ olup

Öklid bağıntısı ile $|CK| = 2b$ olur.

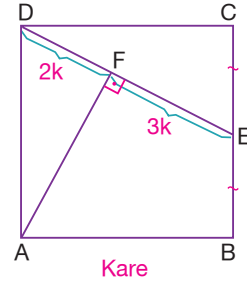
DKC ile AHD eş üçgenler olup $|DH| = 2b$ olur.



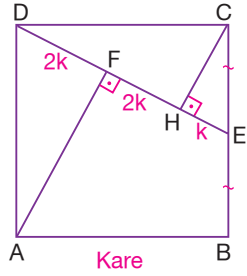
Böylece, $\frac{|DH|}{|HE|} = \frac{2}{3}$ bulunur.

SONUÇLAR :

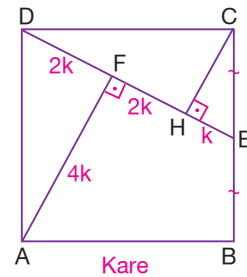
1.



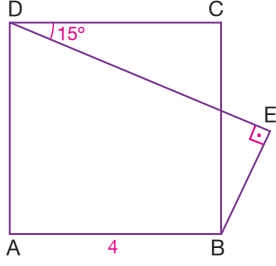
2.



3.



ÖRNEK - 13



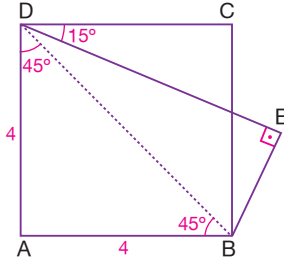
ABCD kare
 $[BE] \perp [ED]$
 $m(\widehat{EDC}) = 15^\circ$
 $|AB| = 4$ birim

Buna göre, $|BE|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

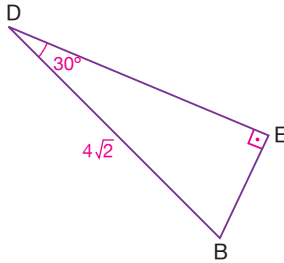
Karenin köşegeni açıortaydır.

$[DB]$ köşegenini çizersek,



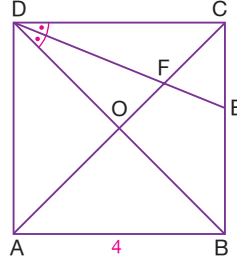
ABD üçgeninde $|BD| = 4\sqrt{2}$ birim olup

$\widehat{DBE}$ nde



$$\sin 30^\circ = \frac{|BE|}{4\sqrt{2}} \Rightarrow |BE| = 2\sqrt{2} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 14

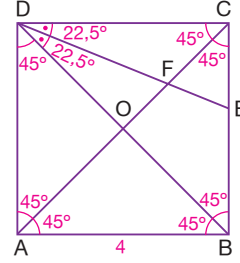


ABCD kare
 $[AC]$ köşegen
 $[BD]$ köşegen
 $[DE]$ açıortay

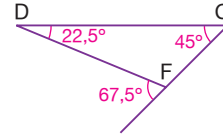
Buna göre, ABCD karesel bölgesinin alanı 36 br^2 olduğuna göre, $|AF|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$A(ABCD) = 36 \text{ br}^2$ ise bir kenar uzunluğu 6 birim dir. Karenin köşegenleri açıortay olup gerekli açılar yazılırsa,

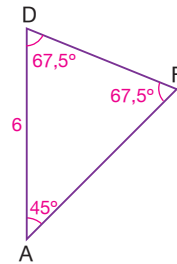


$\widehat{DFA}$, $\widehat{DFC}$ nin dış açısı olup

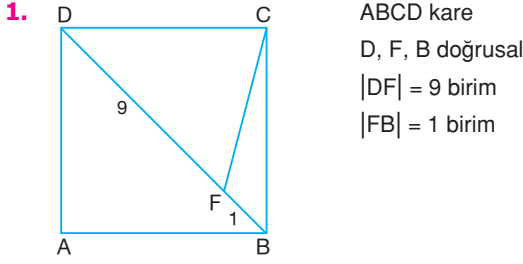


$$m(\widehat{DFA}) = 22,5^\circ + 45^\circ = 67,5^\circ$$

Böylece,

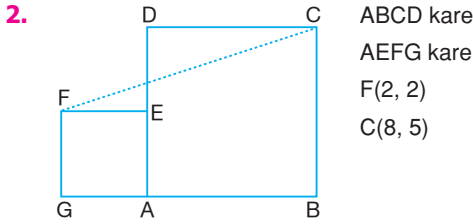


ABF ikizkenar üçgen olup $|AF| = 6$ birim bulunur.



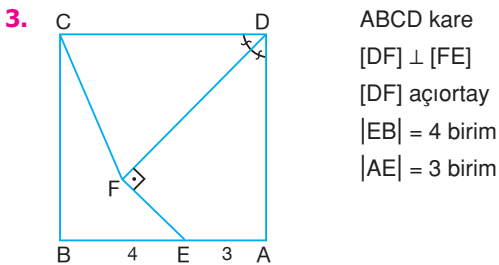
Buna göre, $|FC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\sqrt{26}$ B) $\sqrt{33}$ C) $\sqrt{41}$
D) $\sqrt{51}$ E) $\sqrt{53}$



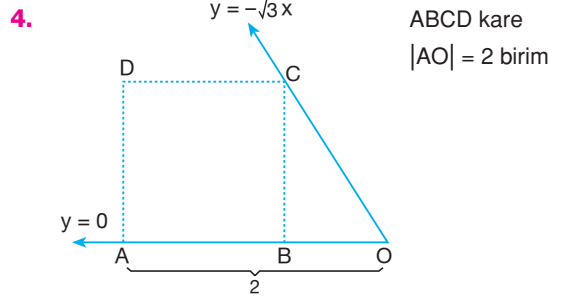
Buna göre, karesel bölgelerin alanları toplamı kaç br^2 dir?

- A) 22,5 B) 28 C) 32 D) 45 E) 56



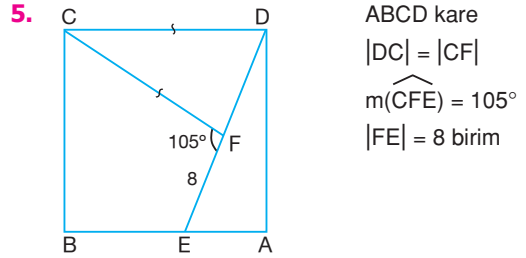
Buna göre, $|CF|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{29}$
D) $4\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{5}$



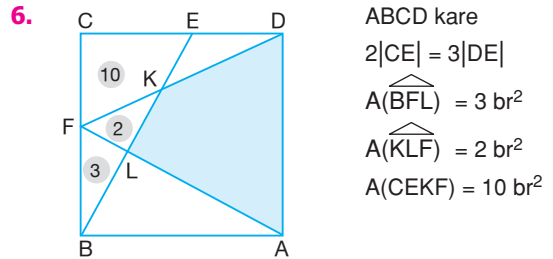
Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $3 - \sqrt{3}$ B) $2 - \sqrt{2}$ C) $3 - \sqrt{2}$
D) $\frac{3}{2}$ E) 1



Buna göre, $|DF|$ uzunluğu kaç birimdir?

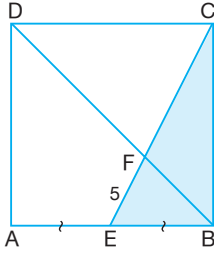
- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8



Buna göre, $A(\widehat{ADKL})$ kaç br^2 dir?

- A) 18 B) 20 C) 23 D) 26 E) 30

7.

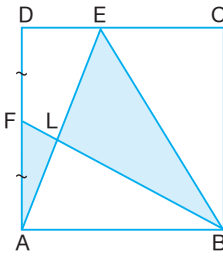


ABCD kare
[BD] köşegen
[BD] ∩ [EC] = {F}
|AE| = |EB|
|FE| = 5 birim

Buna göre, $A(\widehat{BEC})$ kaç br^2 dir?

- A) 50 B) 45 C) 40 D) 30 E) 25

8.

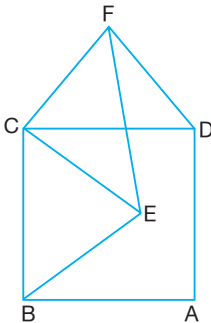


ABCD kare
|DF| = |FA|

Şekildeki AFL üçgeninin alanı $2 br^2$, LEB üçgeninin alanı $10 br^2$ olduğuna göre, karenin bir kenarının uzunluğu kaç birimdir?

- A) 8 B) 7 C) $2\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{2}$ E) 6

9.

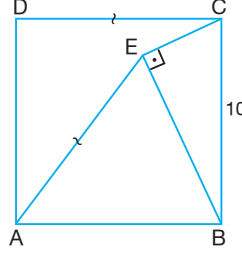


Şekildeki ABCD karesinin iki kenarı üzerinde BEC ve DCF eşkenar üçgenleri çizilmiştir.
|EF| = $2\sqrt{3}$ birim

Buna göre, |EB| uzunluğu kaç birimdir?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{6}$

10.



ABCD kare
[BE] ⊥ [EC]
|DC| = |AE|
|BC| = 10 birim

Buna göre, $A(\widehat{AEB})$ kaç birim karedir?

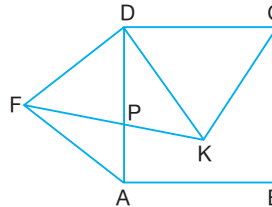
- A) 40 B) 35 C) 30 D) 25 E) 20

11. Bir eşkenar üçgeninin çevre uzunluğu, alanı $81 br^2$ olan bir karenin çevresine eşittir.

Buna göre, bu eşkenar üçgenin alanı kaç br^2 dir?

- A) $9\sqrt{3}$ B) $18\sqrt{3}$ C) $24\sqrt{3}$
D) $36\sqrt{3}$ E) $48\sqrt{3}$

12.



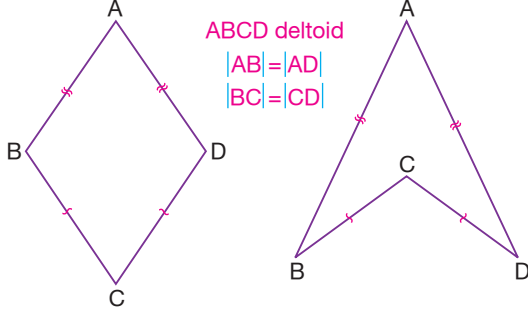
ABCD kare
DKC eşkenar üçgen
ADF eşkenar üçgen

Buna göre, DPF açısının ölçüsü kaç derecedir?

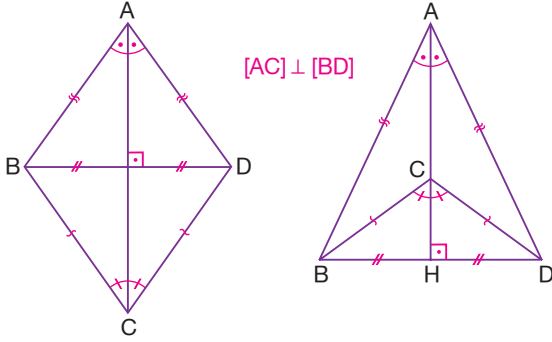
- A) 30 B) 45 C) 55 D) 60 E) 75

DELTOİD

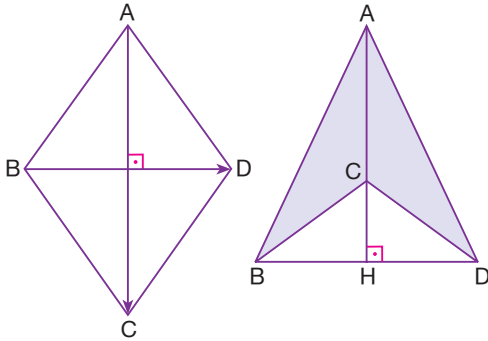
Köşegenlerinden biri, iki ikizkenar üçgenin tabanı olan dörtgene **deltoïd** denir.



- Bir deltoïdde köşegenler dik kesişir ve tepeleri birleştiren köşegen açıortaydır.



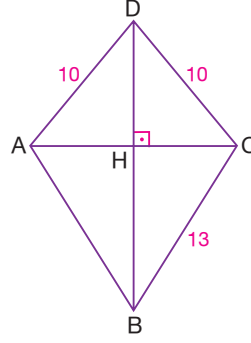
- Bir deltoïdın köşegen vektörleri $\vec{e}$ ve $\vec{f}$ ise deltoïdal bölgenin alanı,



$$\left. \begin{array}{l} \vec{AC} = \vec{e} \\ \vec{BD} = \vec{f} \\ \vec{e} \perp \vec{f} \end{array} \right\} \text{ olduğundan } A(ABCD) = \frac{\|\vec{e}\| \cdot \|\vec{f}\|}{2} \text{ dir.}$$

- Kare ve eşkenar dörtgen birer deltoïddir.

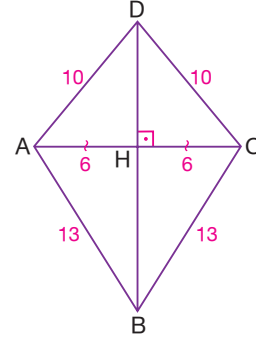
ÖRNEK - 1



ABCD deltoïd
 $|AD| = 10$ birim
 $|DC| = 10$ birim
 $|AC| = 12$ birim
 $|BC| = 13$ birim

Buna göre, $|BD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



ADC ikizkenar üçgen ve $[DH] \perp [AC]$ olduğundan,
 $|AH| = |HC| = 6$ birim olur.

$\triangle DHC$ nde Pisagor teoremi ile

$|HD| = 8$ birim ve

$\triangle BHC$ nde Pisagor teoremi ile

$|BH| = \sqrt{169 - 36} = \sqrt{133}$ birim olup.

Böylece, $|BD| = 8 + \sqrt{133}$ birim bulunur.

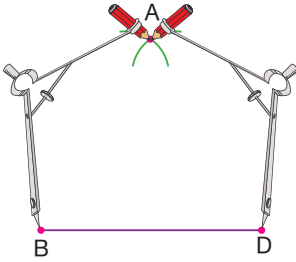


Deltoid Çizimi

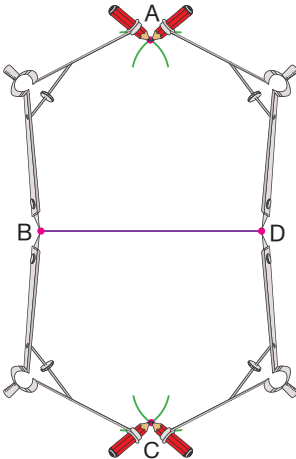
Bir [BD] doğru parçasını alalım.



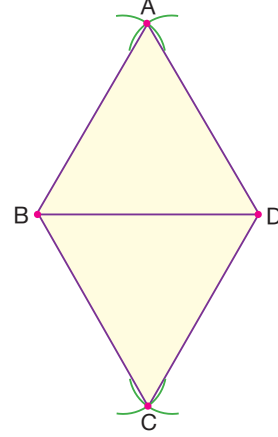
Pergelin arasını $\frac{|BD|}{2}$ den büyük olacak şekilde açıp [BD] nin üst kısmında B ve D merkezli yaylar çizilerek bir A noktası belirlenir.



Pergelin arasını $\frac{|BD|}{2}$ den büyük olacak şekilde önceki adımdakinden farklı açılır ve [BD] nin alt kısmında B ve D merkezli yaylar çizilerek bir C noktası belirlenir.

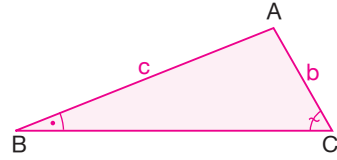


Noktalar sırayla birleştirilerek ABCD deltoidi elde edilir.

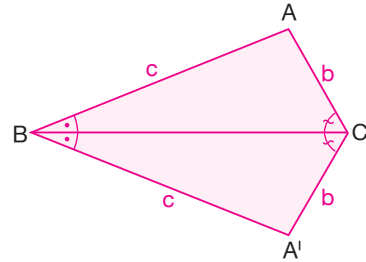


Bir Deltoidin Dönüşüm Uygulanarak Elde Edilmesi

Bir ABC üçgeninin bir kenarı üzerinden yansıtım.



Yukarıdaki ABC üçgeninin [BC] boyunca yatay yansıtım.



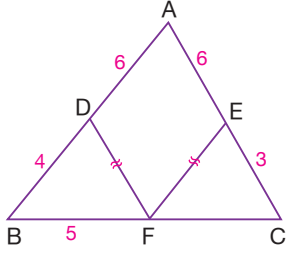
Yansıma dönüşümü uzunlukları ve açıları koruduğundan,

$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CBA'}), m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BCA'})$$

$$|AB| = |BA'| \text{ ve } |AC| = |CA'| \text{ olup}$$

ABA'C bir deltoid olur.

ÖRNEK - 1



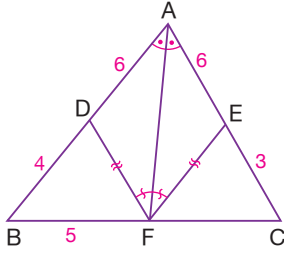
ABC üçgen
 $|AD| = 6$ birim
 $|AE| = 6$ birim
 $|DB| = 4$ birim
 $|BF| = 5$ birim
 $|EC| = 3$ birim
 $|DF| = |FE|$

Buna göre, $|FC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$|AD| = |AE|$ ve $|DF| = |FE|$ olduğundan,

ADFE dörtgeni deltoid olup deltoidde tepe noktalarını birleştiren köşegen açıortay olduğundan,



$\widehat{ABC}$ nde iç açıortay teoreminden,

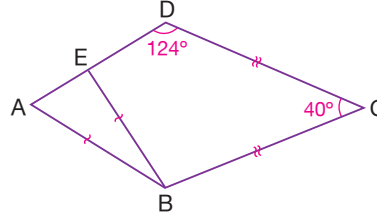
$$\frac{|AB|}{|BF|} = \frac{|AC|}{|FC|} \text{ yazılabilir.}$$

Böylece, $\frac{10}{5} = \frac{9}{|FC|} \Rightarrow |FC| = \frac{9}{2}$ birim bulunur.



Uçurtma yapımında genellikle deltoid modeli kullanılır.

ÖRNEK - 2

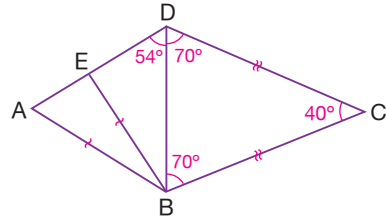


ABCD deltoid
 $m(\widehat{BCD}) = 40^\circ$
 $m(\widehat{ADC}) = 124^\circ$
 $|DC| = |CB|$
 $|AB| = |BE|$

Buna göre, EBC açısını bulalım.

ÇÖZÜM

[DB] köşegeni çizilirse,



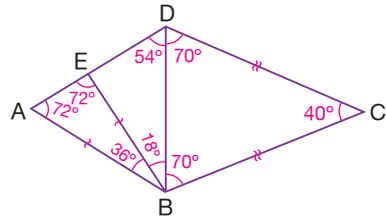
$m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{DBC}) = 70^\circ$ olur.

$|AB| = |AD|$ olduğundan,

$m(\widehat{ABD}) = 54^\circ$ ve

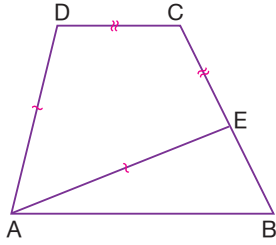
$m(\widehat{BAD}) = 72^\circ$ dir.

Böylece gerekli açılar yazılırsa,



$m(\widehat{EBC}) = 70^\circ + 18^\circ$
 $= 88^\circ$ bulunur.

ÖRNEK - 3



ABCD yamuk
 $[DC] \parallel [AB]$
 $|AD| = |AE|$
 $|CD| = |CE|$
 $|AB| - |CE| = 6$ birim

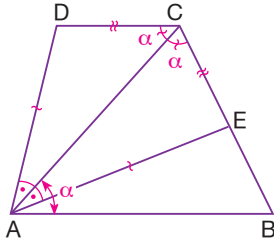
Buna göre, $|BE|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Deltoidde tepe noktalarını birleştiren köşegen açıortay olduğundan,

A ile C noktalarını birleştirirsek,

$m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{ACE})$ ve $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CAE})$ olur.



$m(\widehat{DCA}) = \alpha$ diyelim,

$[DC] \parallel [AB]$ olduğundan,

iç ters açıdan $m(\widehat{CAB}) = \alpha$ olur.

Böylece, $|AB| = |BC|$ olup

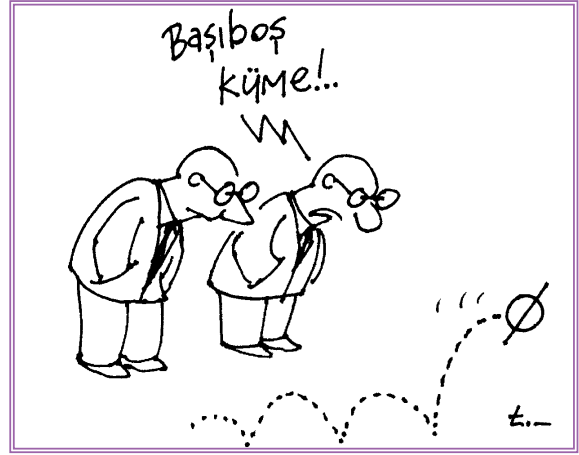
$|AB| = |BE| + |EC|$ eşitliği ile

$|BE| = |AB| - |EC| = 6$ birim bulunur.



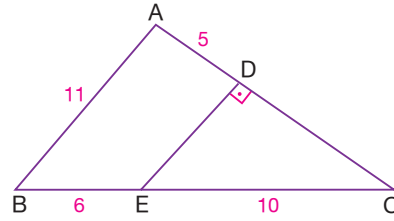
NOT :

Eşkenar dörtgen ve kare birer deltoidtir.



(Matematik Dünyası Dergisi-www.matematikdunyasi.org)

ÖRNEK - 4

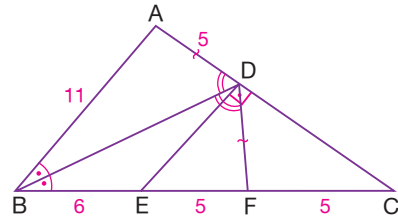


ABC üçgen
 $[ED] \perp [AC]$
 $|AB| = 11$ birim
 $|BE| = 6$ birim
 $|EC| = 10$ birim
 $|AD| = 5$ birim

Buna göre, $|DC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğu hipotenüs uzunluğunun yarısına eşit olduğundan,



$|EF| = |FC| = |FD| = 5$ birim dir.

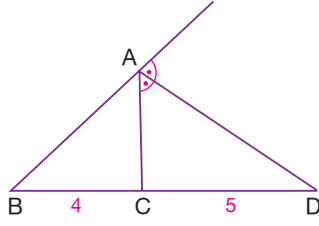
Böylece, **ABFD** deltoid olup

$[BD]$ köşegeni açıortay olduğundan,

iç açıortay teoremi ile

$$\frac{11}{5} = \frac{16}{|DC|} \Rightarrow |DC| = \frac{80}{11} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 5

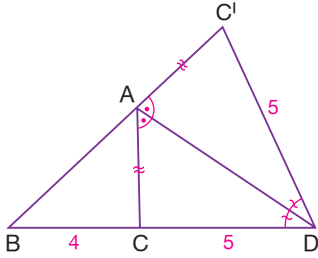


ABC üçgen
[AD] açıortay
|BC| = 4 birim
|CD| = 5 birim

Buna göre, $\frac{|AB|}{|AC|}$ oranını bulalım.

ÇÖZÜM

[AD] yansıma eksenini olacak şekilde, ACD üçgenini yansıtalım.

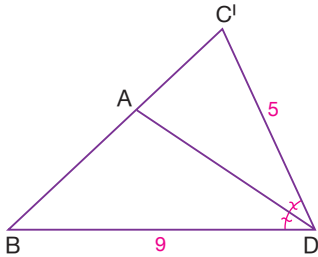


Yansıma dönüşümü uzunluk ve açıları değiştirmedikten $CAC'D$ deltoid olup

$$m(\widehat{BDA}) = m(\widehat{ADC'}) \text{ ve}$$

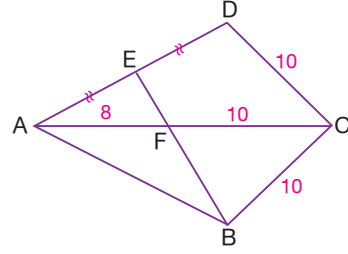
$$|CD| = |DC'| = 5 \text{ birim olduğu görülür.}$$

Böylece, $BC'D$ nde iç açıortay teoremiden,



$$\frac{|AB|}{|AC'|} = \frac{9}{5} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 6



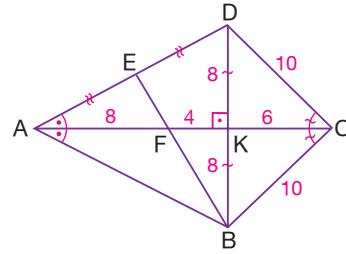
ABCD deltoid
|DC| = 10 birim
|CB| = 10 birim
|CF| = 10 birim
|AF| = 8 birim
|DE| = |EA|

Buna göre, |BF| uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Deltoidde köşegenler birbirini dik keser.

[BD] köşegeni çizilirse,



[AC] açıortay olduğundan,

$$|DK| = |KB| \text{ ve } [AC] \perp [BD] \text{ dir.}$$

Böylece,

(ABD) nde F noktası ağırlık merkezi olur.

$$|AF| = 8 \text{ birim} \Rightarrow |FK| = 4 \text{ birim ve}$$

$$|KC| = 6 \text{ birim dir.}$$

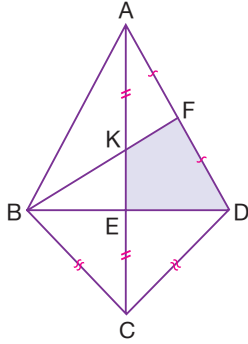
$\triangle BKC$ nde Pisagor teoremi ile,

$$|BK|^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow |BK| = 8 \text{ birim ve}$$

$\triangle FKB$ nde Pisagor teoremi ile

$$|FB|^2 = 4^2 + 8^2 \Rightarrow |FB| = 4\sqrt{5} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 7



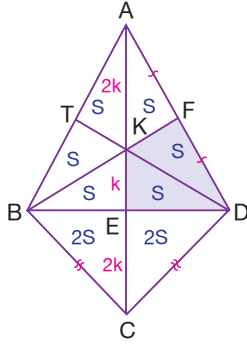
ABCD deltoid
 $|AF| = |FD|$
 $|BC| = |CD|$
 $|AK| = |EC|$
 $[AC] \cap [BD] = \{E\}$
 $A(ABCD) = 90 \text{ br}^2$

Buna göre, DEKF dörtgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

Deltoidde $|BE| = |ED|$ dir.

Böylece K noktası $\triangle ABD$ nin ağırlık merkezi olup

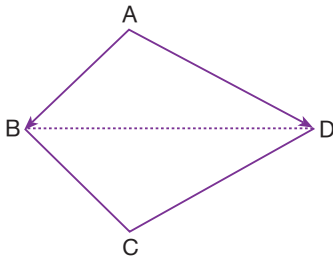


$10S = 90$ ve $S = 9 \text{ br}^2$
 $A(DEKF) = 18 \text{ br}^2$ bulunur.

ÖRNEK - 8

$\vec{AB} = (-1, 3)$ ve $\vec{AD} = (2, -4)$ olan ABCD deltoid-sel bölgesinin alanını bulalım.

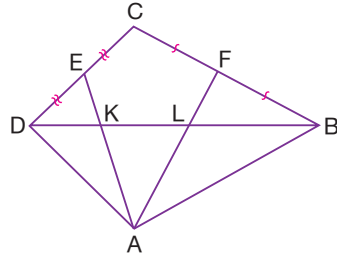
ÇÖZÜM



$$A(\triangle ABD) = \frac{1}{2} |6 - 4| = 1 \text{ br}^2 \text{ olup}$$

$$A(ABCD) = 2 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 9

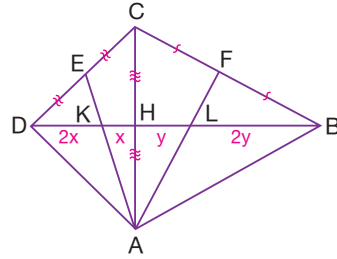


ABCD deltoid
 $[BD]$ köşegen
 $|DE| = |EC|$
 $|CF| = |FB|$
 $|DB| = 24 \text{ birim}$

Buna göre, $|KL|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$[AC]$ köşegeni çizilirse,



$|CH| = |HA|$ olacağından,

K ve L noktalarının sırasıyla,

ADC ve ABC

üçgensel bölgelerinin ağırlık merkezleri olduğu görülür.

Böylece,

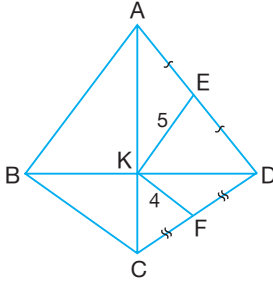
$$|KH| = x \Rightarrow |DK| = 2x$$

$$|HL| = y \Rightarrow |LB| = 2y \text{ olup}$$

$$3x + 3y = 24 \text{ birim olduğundan,}$$

$$|KL| = x + y = 8 \text{ birim bulunur.}$$

1.

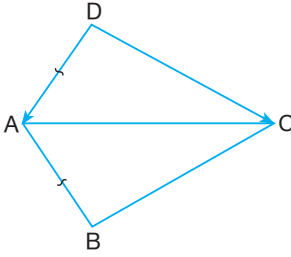


ABCD deltoid
 $|AB| = |AD|$
 $|EK| = 5$ birim
 $|KF| = 4$ birim

Buna göre, $\widehat{C(ABCD)}$ kaç birimdir?

- A) 32 B) 34 C) 36 D) 38 E) 40

2.

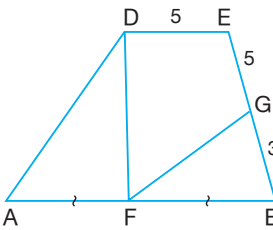


ABCD deltoid
 $|AB| = |AD|$
 $\vec{DA} = (3, -4)$
 $\vec{DC} = (-1, 2)$

Buna göre, $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

- A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

3.

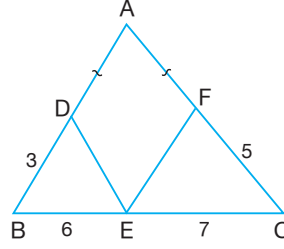


ABED dörtgen
 DEGF deltoid
 $[DE] \parallel [AB]$
 $|AF| = |FB|$
 $|DE| = 5$ birim
 $|EG| = 5$ birim
 $|GB| = 3$ birim

Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 14 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

4.

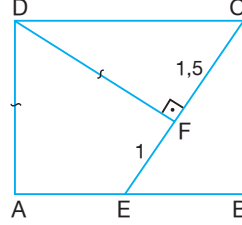


ADEF deltoid
 $|AF| = |AD|$
 $|DB| = 3$ birim
 $|BE| = 6$ birim
 $|EC| = 7$ birim
 $|CF| = 5$ birim

Buna göre, $\widehat{C(ABC)}$ kaç birimdir?

- A) 30 B) 36 C) 39 D) 40 E) 42

5.

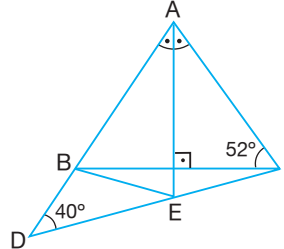


AEFD deltoid
 $|AD| = |DF|$
 $|CF| = 1,5$ birim
 $|FB| = 1$ birim

Buna göre, $\frac{|AE|}{|EB|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

6.

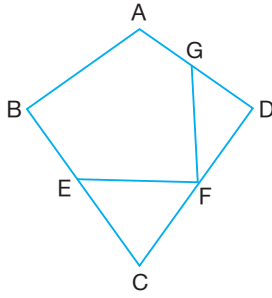


ABEC dörtgen
 $[AE] \perp [BC]$
 $[AE]$ açıortay
 $m(\widehat{ACB}) = 52^\circ$
 $m(\widehat{ADC}) = 40^\circ$

Buna göre, $m(\widehat{AEB})$ kaç derecedir?

- A) 78 B) 79 C) 80 D) 82 E) 83

7.

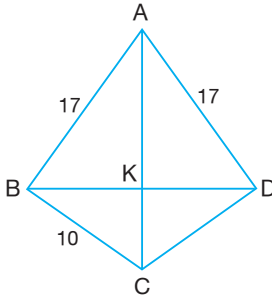


ABCD deltoid
E, F, G orta noktalar
 $|EF| = 4$ birim
 $|GF| = 5$ birim

Buna göre, $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

- A) 40 B) 41 C) 42 D) 43 E) 44

8.

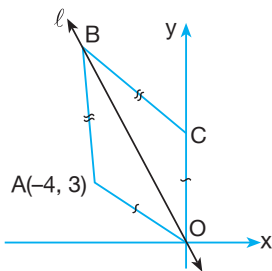


ABCD deltoid
 $|BD| = 16$ birim

Buna göre, $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

- A) 160 B) 164 C) 168 D) 170 E) 172

9.

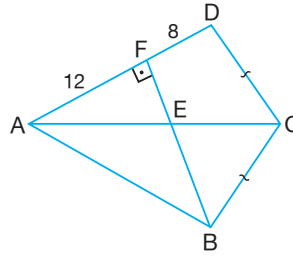


OABC deltoid

Buna göre, ℓ doğrusunun eğimi kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) -3 D) 2 E) 4

10.

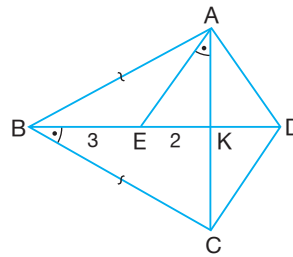


ABCD deltoid
 $[BF] \perp [AD]$
 $|BC| = |CD|$
 $|AF| = 12$ birim
 $|FD| = 8$ birim

Buna göre, $|EB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

11.

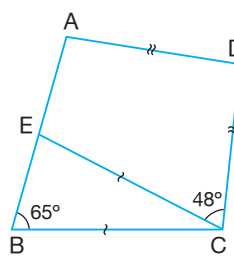


ABCD deltoid
 $[BD] \cap [AC] = \{K\}$
 $|AB| = |BC|$
 $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{EAC})$

Buna göre, $|AC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 3 B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{10}$ D) $2\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{10}$

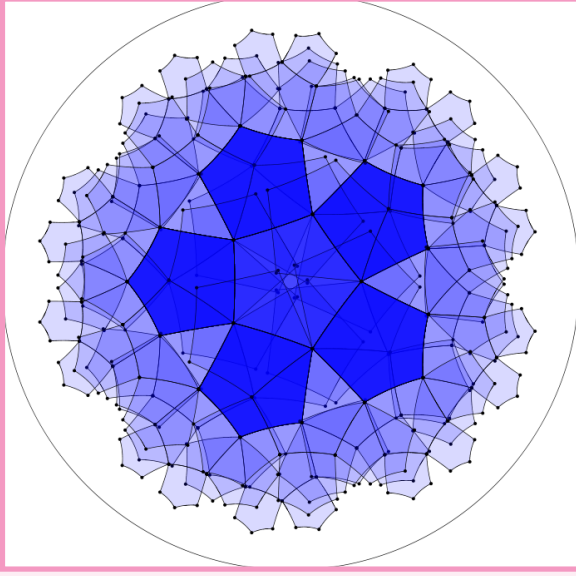
12.



ABCD deltoid
 $|BC| = |CE|$
 $m(\widehat{DCE}) = 48^\circ$
 $m(\widehat{EBC}) = 65^\circ$

Buna göre, $m(\widehat{ADC})$ kaç derecedir?

- A) 80 B) 85 C) 92 D) 95 E) 99



ÇOKGENLER

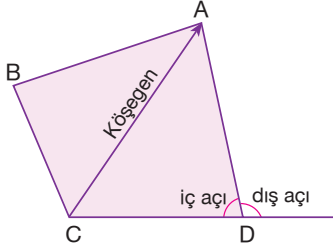


ÜNİTE – 8

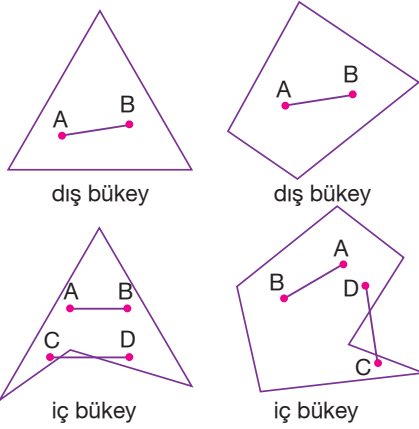
- Düzgün Beşgen
- Düzgün Altıgen

*Matematik sözcüğünün, Antik Yunancadaki "**matesis**" sözcüğünden geldiğini ve anlamının "**ben bilirim**" demek olduğunu biliyor muydunuz?*

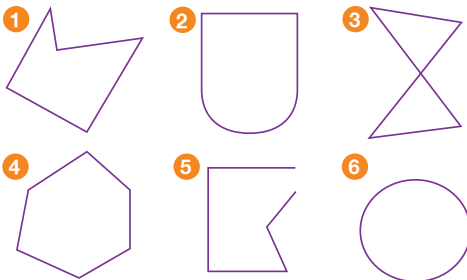
Tanım : Uç noktaları dışında kesişmeyen üç ya da daha fazla doğru parçasının uç uca eklenmesi ile elde edilen kapalı şekillere **çokgen** denir.



- Bir çokgenin kenarları ile sınırladığı bölgeye çokgensel bölge denir.
- Bir çokgensel bölgenin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası her zaman çokgensel bölge içinde kalıyorsa buna konveks (dışbükey) çokgen denir. Bu doğru parçası çokgensel bölgenin dışında da kalıyorsa konkav (iç bükey) çokgen denir.



ÖRNEK - 1



Yukarıdaki şekillerden hangileri çokgendir?

ÇÖZÜM :

2, 3, 5 ve 6. şekiller çokgen tanımına uymamaktadır. 1. ve 4. şekiller çokgendir.

Köşegen Sayısı

➤ n kenarlı bir çokgenin ardışık köşeleri 1, 2, 3 ... n şeklinde isimlendirilsin.

- 1. köşeden $(n - 3)$ tane köşegen geçer bunlardan farklı olarak,
- 2. köşeden $(n - 3)$ tane köşegen geçer bunlardan farklı olarak,
- 3. köşeden $(n - 4)$ tane köşegen geçer bunlardan farklı olarak,
- 4. köşeden $(n - 5)$ tane köşegen geçer bunlardan farklı olarak,
- ...
- $(n - 3)$. köşeden 2 tane köşegen geçer bunlardan farklı olarak,
- $(n - 2)$. köşeden 1 tane köşegen geçer.

O halde tüm köşegenlerin sayısı,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n - 3 + n - 3 = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$= \frac{(n-3) \cdot (n-2)}{2}$$

YA DA

- Bir köşeden $(n - 3)$ tane köşegen geçer.
- n köşeden $n(n - 3)$ tane köşegen geçer.

Bu köşegenlerden her biri iki kez sayıldığından,

$$\text{Tüm köşegenlerin sayısı} = \frac{n(n-3)}{2} \text{ dir.}$$

YA DA

➤ n kenarlı bir çokgenin köşe sayılarını,

$$A = \{1, 2, 3, \dots, n\} \text{ kümesi ile gösterelim.}$$

Köşegen çizmek için iki köşeye gerek olduğundan, $\binom{n}{2}$ tane köşe birleştirilmiş olur.

Bunlardan n tanesi kenar olduğundan tüm köşegenlerin sayısı $\binom{n}{2} - n$ ile bulunur.

ÖRNEK - 2

Bir sekizgenin tüm köşegenlerinin sayısını bulalım.

ÇÖZÜM :

Çizilen köşegenler bir daha çizilmemek şartı ile,

1. Köşeden 5 köşegen geçer.
2. Köşeden 5 köşegen geçer.
3. Köşeden 4 köşegen geçer.
4. Köşeden 3 köşegen geçer.
5. Köşeden 2 köşegen geçer.
6. Köşeden 1 köşegen geçer.

+ _____

Tüm köşegen sayısı = $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5$

$$= \frac{5 \cdot 6}{2} + 5$$

= 20 bulunur.

ÖRNEK - 3

Bir onüçgenin üç köşesinden en fazla kaç farklı köşegen geçer?

ÇÖZÜM :

Köşegenler birbirinden farklı olmak üzere,

1. Köşeden 10 köşegen geçer.
2. Köşeden 10 köşegen geçer.
3. Köşeden 9 köşegen geçer.

+ _____

Üç köşeden en fazla 29 tane köşegen geçer.

UYARI

Eğer köşegenler ardışık olmayan köşelerden alınmasaydı köşegen sayısı daha az olurdu.

ÖRNEK - 4

Köşegen sayısı kenar sayısının 4 katı olan çokgenin kenar sayısını bulalım.

ÇÖZÜM :

Kenar sayısı $\rightarrow n$

Köşegen sayısı $\frac{n(n-3)}{2}$ olup

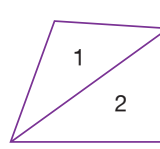
$$\frac{n(n-3)}{2} = 4 \cdot n \rightarrow n-3=8$$

$n=11$ bulunur.

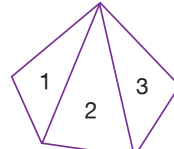
O halde çokgen 11 kenarlıdır.

➤ n kenarlı bir çokgenin bir köşesinden çizilen köşegenler çokgeni $(n-2)$ tane üçgene ayırır.

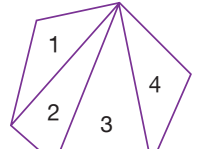
O halde iç açılar toplamı $(n-2) \cdot 180^\circ$ olur.



İç açılar toplamı
 $2 \cdot 180^\circ$



İç açılar toplamı
 $3 \cdot 180^\circ$



İç açılar toplamı
 $4 \cdot 180^\circ$

ÖRNEK - 5

İç açılarının ölçüleri toplamı dış açılarının ölçülerinin toplamının 6 katı olan bir konveks çokgenin kenar sayısını bulalım.

ÇÖZÜM :

İç açılarının ölçüler toplamı $\rightarrow (n-2) \cdot 180^\circ$

Dış açılarının ölçüler toplamı $\rightarrow 360^\circ$

Buna göre, $(n-2) \cdot 180^\circ = 6 \cdot 360^\circ$

$$(n-2) = 12$$

$$n = 14$$

O halde çokgen 14 kenarlıdır.

ÖRNEK - 6

Bir konveks çokgenin dış açılarından en fazla kaç tanesinin geniş açı olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

Dış açıların toplamı 360° olduğundan en fazla 3 dış açı geniş açıdır.

(Aynı mantıkla en fazla 3 iç açısı dar açıdır.)



Bir üçgenin çizilebilmesi için en az bir uzunluk ve iki açı bilinmelidir.

Buradan hareketle,

n kenarlı bir konveks çokgenin çizilebilmesi için en az $(n - 2)$ tanesi uzunluk olmak üzere; $(2n - 3)$ tane elemanın verilmesi gerekir.

(Burada elemandan kasıt açı ve uzunluktur, bunlar geometrinin ham maddesidir.)

ÖRNEK - 7

Bir konveks sekizgenin çizilebilmesi için en az kaç tane elemanın verilmesi gerektiğini bulalım.

ÇÖZÜM :

n kenarlı bir çokgenin çizilebilmesi için $2n - 3$ tane elemanın verilmesi gerekir.

O halde $n = 8$ için;

$$2 \cdot 8 - 3 = 13$$

elemanın verilmesi gerekir.

ÖRNEK - 8

Bir köşesinden çizilen köşegen sayısı ile çizilmesi için gereken eleman sayısının toplamı 12 olan dışbükey bir çokgenin toplam köşegen sayısını bulalım.

ÇÖZÜM :

n kenarlı bir dışbükey çokgenin bir köşesinden çizilen köşegen sayısı $n - 3$ ve eleman sayısı $2n - 3$ tür.

O halde,

$$n - 3 + 2n - 3 = 12$$

$$3n - 6 = 12$$

$$n = 6 \text{ olup}$$

Toplam köşegen sayısı,

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 9

En az 21 elemanla belirlenebilen bir çokgenin bir köşesinden en fazla kaç tane köşegen çizilebileceğini bulalım.

ÇÖZÜM :

n kenarlı bir çokgen en az $2n - 3$ elemanı ile bellidir.

O halde,

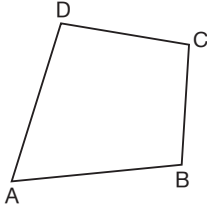
$$2n - 3 = 21$$

$$2n = 24$$

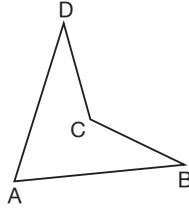
$$n = 12 \text{ olup}$$

Bir köşesinden $12 - 3 = 9$ tane köşegen çizilebilir.

Kenar sayısı (n) 3 ya da daha fazla olan kapalı geometrik şekillere çokgen denir.

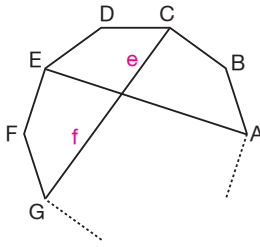


Konveks çokgen
(Dışbükey)



Konkav çokgen
(İçbükey)

Köşegen: Bir konveks çokgende komşu olmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçasıdır.

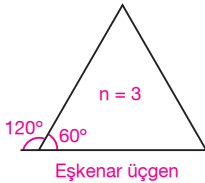


$$\text{Köşegen sayısı} = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

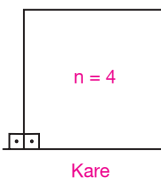
- 1. Köşeden $n - 3$ tane köşegen geçer, bunlardan farklı
- 2. Köşeden $n - 3$ tane köşegen geçer, bunlardan farklı
- 3. Köşeden $n - 4$ tane köşegen geçer, bunlardan farklı
- 4. Köşeden $n - 5$ tane köşegen geçer, bunlardan farklı
-
- $n - 2$. köşeden 1 tane köşegen geçer.

DÜZGÜN ÇOKGEN

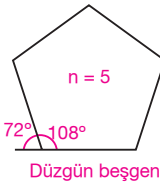
- Tüm kenar uzunlukları eşit, tüm iç açılar ölçüleri birbirine eş olan çokgene düzgün çokgen denir.



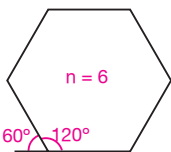
Eşkenar üçgen



Kare



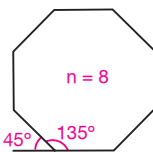
Düzgün beşgen



Düzgün altıgen



Düzgün yedigen



Düzgün sekizgen

n - KENARLI BİR KONVEKS ÇOKGENDE ;

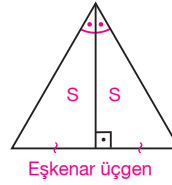
1. İç açıları toplamı $= (n - 2) \cdot 180^\circ$
2. Dış açıları toplamı $= 360^\circ$
3. Köşegen sayısı $= \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$
4. Bir köşeden $(n - 3)$ tane köşegen çizilir, bu köşegenler çokgeni $(n - 2)$ tane üçgene ayırır.
5. En az $(2n - 3)$ tane elemanı ile bellidir.
[Bunlardan en az $(n - 2)$ tanesi uzunluk, en çok $(n - 1)$ tanesi açıdır.]
6. Bir dış açı $= \frac{360^\circ}{n}$ dir.

✓ NOT

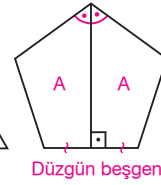
Bir konveks çokgenin en fazla üç iç açısı dar olabilir.

KENAR SAYISI TEK OLAN BİR DÜZGÜN ÇOKGENDE;

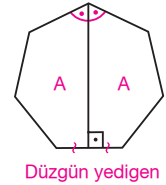
- Bir köşeden çıkan açıortay karşı kenarın ortasına dik olarak gider, çokgeni ortalar ve çokgenin simetri eksenisidir.



Eşkenar üçgen



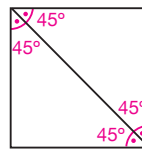
Düzgün beşgen



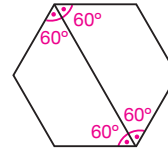
Düzgün yedigen

KENAR SAYISI ÇİFT OLAN BİR DÜZGÜN ÇOKGENDE;

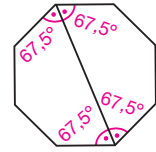
- Bir köşeden çıkan açıortay karşı köşeye açıortay olarak gider, çokgeni ortalar, çokgenin simetri eksenisidir.



Kare

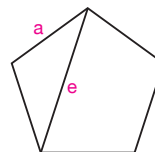


Düzgün altıgen



Düzgün sekizgen

BİR DÜZGÜN BEŞGENDE;

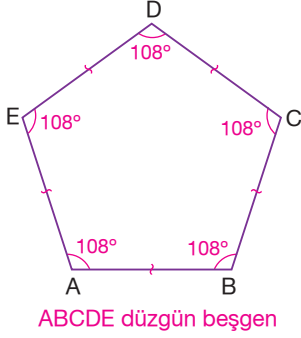


Düzgün beşgen

$$\frac{e}{a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \text{ (altın oran)}$$

Düzgün Beşgen

İç açılarının ölçüleri ve kenar uzunlukları eşit olan beşgene düzgün beşgen denir.



ARAŞTIRMA

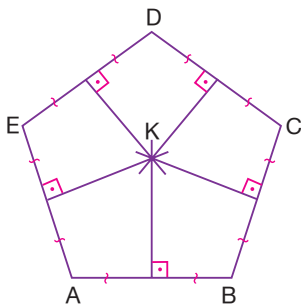
Beş kenar uzunluğu eşit olan bir beşgen düzgün beşgen midir?

Bunu bir örnekle gösterebilir miyiz?



Bir Düzgün Beşgenin Merkezi

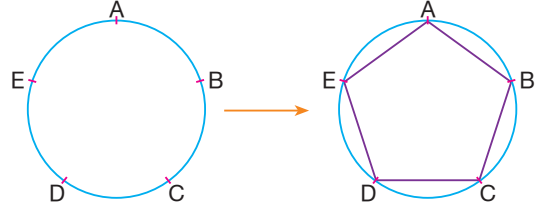
Bir düzgün beşgende kenar orta dikmelerinin kesişim noktası düzgün beşgenin merkezidir.



K noktası ABCDE düzgün beşgenin merkezidir.

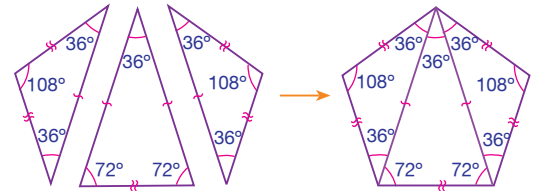
Bir Düzgün Beşgenin Çizimi

1. Yol : Bir çemberi 5 eş parçaya ayıracak şekilde noktalar belirleyelim.



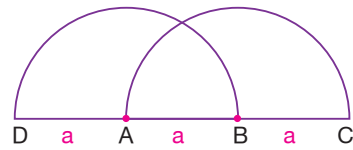
Bu noktaların birleştirilmesi ile oluşan çokgen düzgün beşgendir.

2. Yol : Yarı düzlem kaplama ile

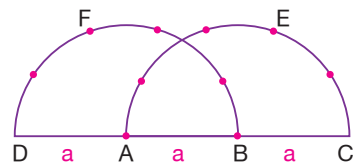


Yukarıdaki gibi 3 tane altın üçgenin birleştirilmesi ile düzgün beşgen elde edilebilir.

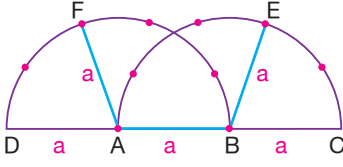
3. Yol : Yarıçap uzunlukları düzgün beşgenin bir kenarının uzunluğuna eşit olacak şekilde iki yarım çember çizilir.



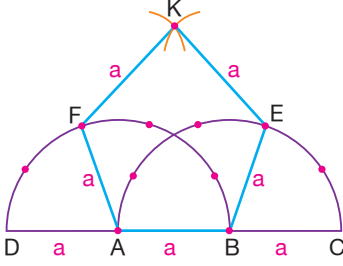
Yarım çember yayları beş eş parçaya ayrılır.



A ile F ve B ile E noktaları birleşecek şekilde doğru parçaları çizilir.



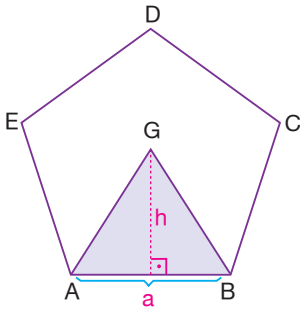
Pergelin uçları yarıçap kadar açılır. Sivri uç F ve E noktalarına konularak K noktası belirlenir.



K noktası F ve E ile birleştirilirse ABEKF düzgün beşgeni elde edilir.

Düzgün Beşgensel Bölgenin Alanı

Bir kenar uzunluğu a birim ve iç merkezin herhangi bir kenara uzaklığı h birim olan beşgensel bölgenin alanı;



$$A(ABCDE) = \frac{5 \cdot a \cdot h}{2} = \frac{\Ç \cdot h}{2}$$

$\Ç$: Düzgün beşgenin çevre uzunluğu

ARAŞTIRMA

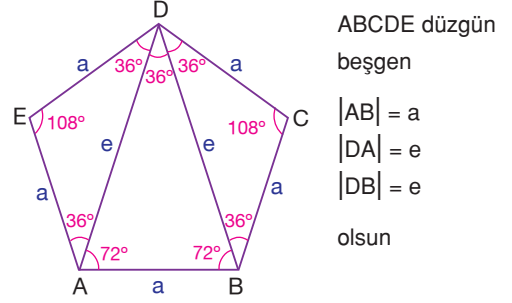
Altın üçgenleri kullanarak $\sin 18^\circ$ yi hesaplamaya çalışınız.



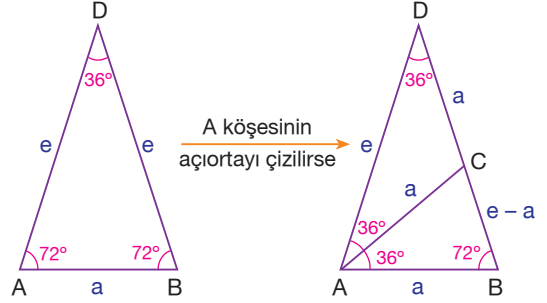
Teorem :

Bir düzgün beşgenin bir köşegen uzunluğunun bir kenar uzunluğuna oranı **altın oranı** (altın sayıyı) verir.

İspat :



Bu durumda,



$\triangle ABC$ nde açıortay teoremi ile, $\frac{a}{e-a} = \frac{e}{a}$ yazılabilir.

$$a^2 = e^2 - ae$$

$$a^2 + ae = e^2$$

(Her iki yana $\frac{e^2}{4}$ eklersek eşitliğin sol yanı tamkare olur.)

$$a^2 + ae + \frac{e^2}{4} = e^2 + \frac{e^2}{4}$$

$$\left(a + \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{5e^2}{4}$$

$$a + \frac{e}{2} = \frac{e\sqrt{5}}{2}$$

$$a = \frac{e(\sqrt{5}-1)}{2} \text{ olup}$$

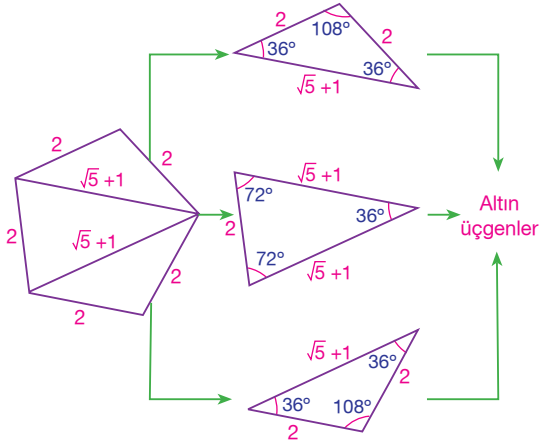
$$\frac{e}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ bulunur.}$$



HATIRLATMA

Altın oran $\rightarrow \varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$
(Altın sayı)

SONUÇ :



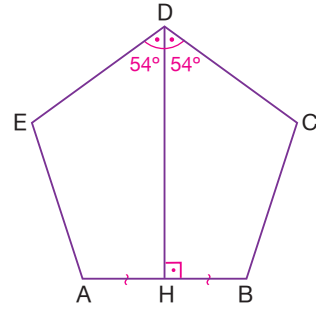
ARAŞTIRMA



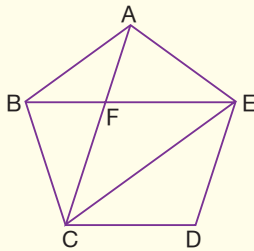
Acaba sadece düzgün beşgende mi altın oran vardır?

Cevabınız hayır ise başka hangi düzgün çokgenlerde altın oran olabilir? Araştırınız.

- Bir düzgün beşgende bir köşeden karşı kenara inilen dikme düzgün beşgeni ortalar.



NOT :

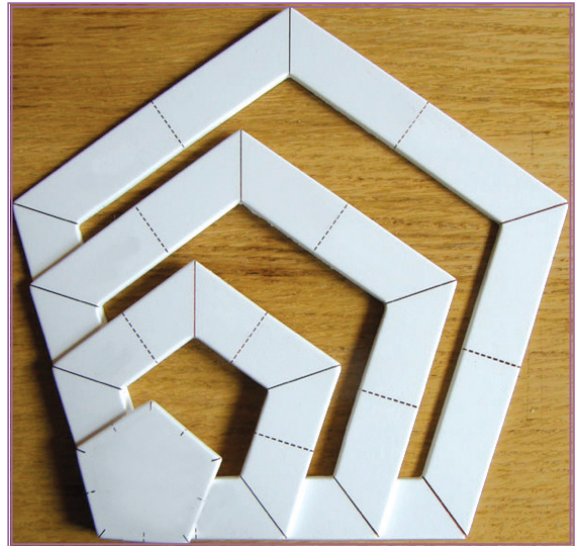


ABCDE düzgün beşgen

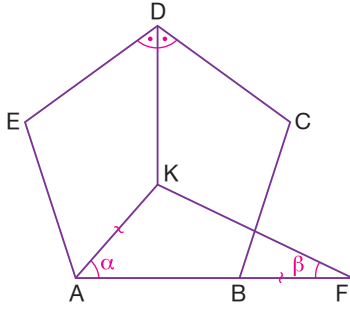
$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \text{ (Altın oran)}$$

$$\frac{|AF|}{|AE|} = \varphi, \frac{|CE|}{|EF|} = \varphi \text{ ve } \frac{|AB|}{|AF|} = \varphi$$

Düzgün beşgende köşegenler çizildiğinde çok miktarda **altın üçgenler** (Güzel üçgenler) olduğu görülür.



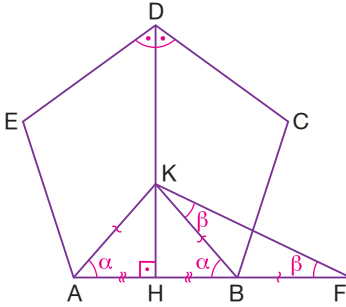
ÖRNEK - 1



ABCDE düzgün
beşgen
[DK] açıortay
 $m(\widehat{KAF}) = \alpha$
 $m(\widehat{KFA}) = \beta$
 $|AK| = |BF|$

Buna göre, α ile β arasındaki bağıntıyı bulalım.

ÇÖZÜM



ABCDE düzgün beşgen olduğundan,

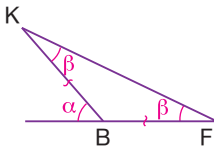
[DK] uzatılırsa,

$[DH] \perp [AF]$ ve $|AH| = |HB|$ olup.

Bundan dolayı,

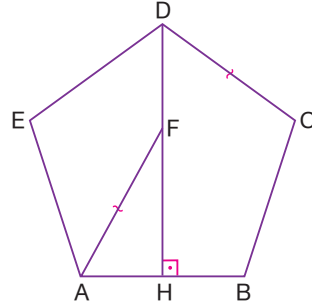
AKB ikizkenar üçgen olur.

$|AK| = |KB| = |BF|$ olduğundan,



$\alpha = 2\beta$ bulunur.

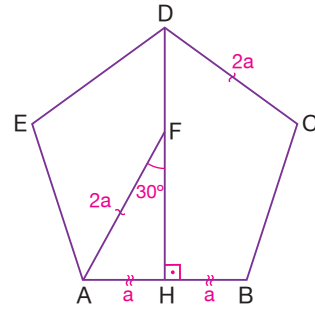
ÖRNEK - 2



ABCDE düzgün
beşgen
 $[DH] \perp [AB]$
 $|AF| = |DC|$

Buna göre, AFH açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM



Yukarıdaki düzgün beşgende,

$[DH] \perp [AB]$ olduğundan,

$|AH| = |HB| = a$ diyelim.

Bu durumda,

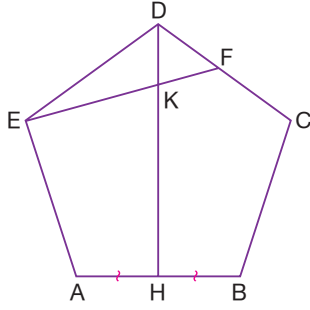
$|DC| = |AF| = 2a$ olur.

Dolayısıyla,

$\triangle AHF$ nde kenar uzunluklarından,

$m(\widehat{AFH}) = 30^\circ$ bulunur.

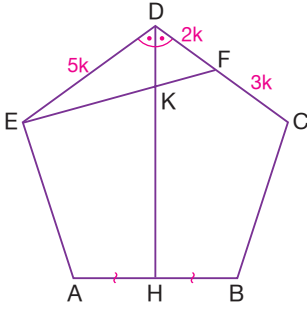
ÖRNEK - 3



ABCDE düzgün
beşgen
 $|AH| = |HB|$
 $2|FC| = 3|DF|$

Buna göre, $\widehat{DEK}$ nin alanının $\widehat{DKF}$ nin alanına oranını bulalım.

ÇÖZÜM



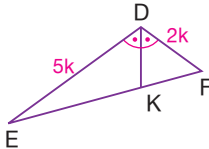
ABCDE düzgün beşgen olduğundan,

[DH] açıortaydır.

Verilen oranlar yerleştirildiğinde ve

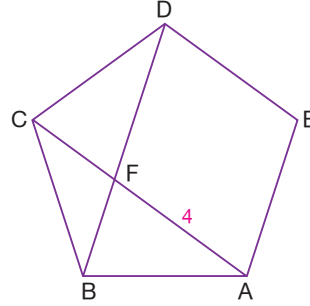
[DK] açıortay olduğundan ,

$\widehat{DEF}$ nde açıortay teoreminden,



$$\frac{|ED|}{|DF|} = \frac{|EK|}{|KF|} = \frac{A(\widehat{DEK})}{A(\widehat{DKF})} = \frac{5}{2} \text{ bulunur.}$$

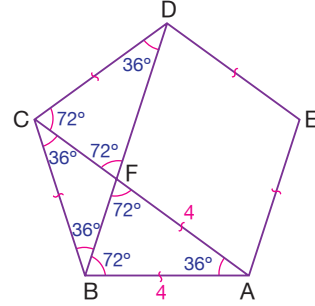
ÖRNEK - 4



ABCDE düzgün
beşgen
[AC] köşegen
[DB] köşegen
 $|AF| = 4$ birim

Buna göre, düzgün beşgenin çevre uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{ABC}) = 108^\circ$ ve

$|AB| = |BC|$ olduğundan,

$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACB}) = 36^\circ$ bulunur.

$\widehat{DBC}$ nde de aynı şekilde,

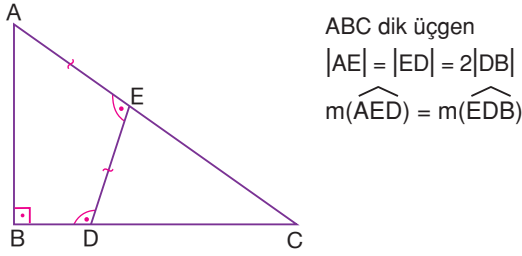
$m(\widehat{BDC}) = 36^\circ$, $m(\widehat{DFC}) = 72^\circ$ bulunur.

Dolayısıyla,

$\widehat{ABF}$ ikizkenar üçgen olur.

$\text{Ç}(\text{ABCDE}) = 4 \cdot 5 = 20$ birim bulunur.

ÖRNEK - 5

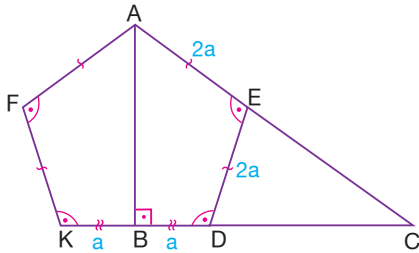


Buna göre, CED açısının ölçüsünü bulalım.

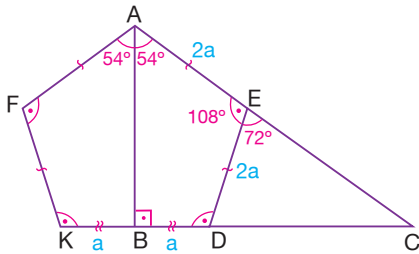
ÇÖZÜM

$|BD| = a$ diyelim.

Bu durumda, $|AE| = |ED| = 2a$ olup



ABDE dörtgeninin $[AB]$ na göre dikey yansımasını alırsak,



AFKDE düzgün beşgeni elde edilir.

Dolayısıyla,

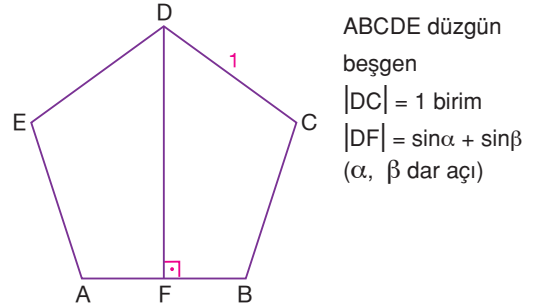
$m(\widehat{AED}) = 108^\circ$ ve $m(\widehat{DEC}) = 72^\circ$ bulunur.

ARAŞTIRMA

Beş kenarının uzunluğu birbirine eşit ve dört iç açısının ölçüsü birbirine eş olan bir beşgen daima bir düzgün beşgen midir? Arkadaşlarınızla tartışıp öğretmeninize değerlendirin.

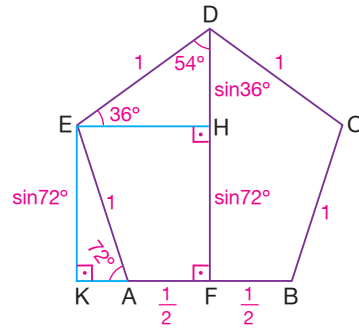


ÖRNEK - 6



Buna göre, $\alpha + \beta$ toplamını bulalım.

ÇÖZÜM



$\widehat{EDH}$ nde $|DH| = \sin 36^\circ$

$\widehat{AKE}$ nde $|EK| = \sin 72^\circ$ olup

$|DF| = \sin \alpha + \sin \beta \Rightarrow \sin 36^\circ + \sin 72^\circ$

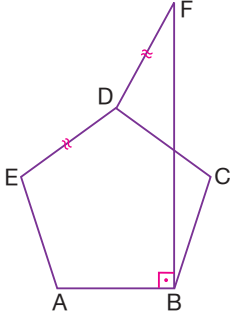
$\alpha = 36^\circ$ ve $\beta = 72^\circ$ alınabilir.

Böylece $\alpha + \beta = 108^\circ$ bulunur.



(Matematik Dünyası Dergisi-www.matematikdunyasi.org)

ÖRNEK - 7

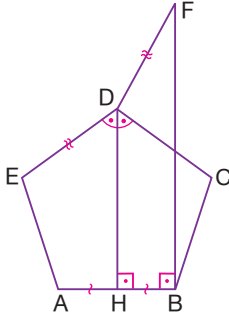


ABCDE
düzgün beşgen
 $|FD| = |DE|$
 $[FB] \perp [BA]$

Buna göre, $m(\widehat{DFB})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM

$[DH] \perp [AB]$ olacak şekilde $H \in [AB]$ seçelim.

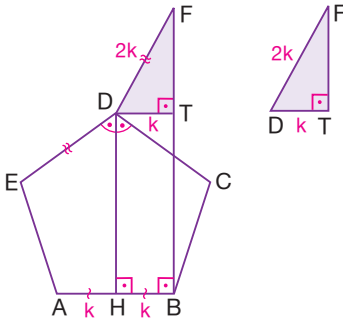


Bu durumda, $|AH| = |HB|$ olup

$m(\widehat{EDH}) = m(\widehat{HDC})$ dir.

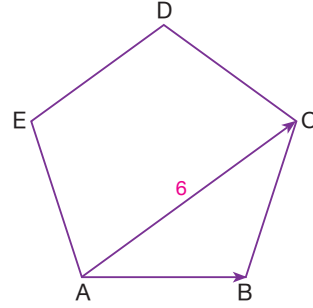
$|AH| = |HB| = k$ dersek,

$|DF| = 2k$ olup $[DT] \perp [FB]$ ile HDTB dikdörtgeni ve aşağıdaki şekil elde edilir.



Böylece, $\widehat{DFT}$ nde $m(\widehat{DFT}) = 30^\circ$ bulunur.

ÖRNEK - 8

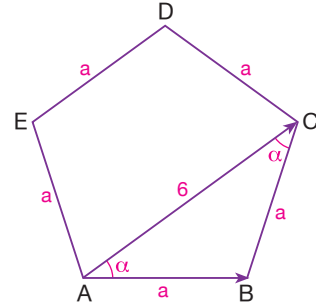


ABCDE düzgün
beşgen
 $|AC| = 6$ birim

Buna göre, $\langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle$ skaler çarpımını hesaplayalım.

ÇÖZÜM

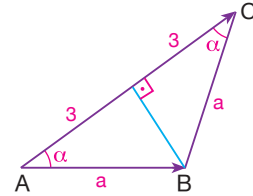
Düzgün beşgenin bir kenar uzunluğuna a diyelim.



$|AB| = |BC|$ olduğundan,

$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACB}) = \alpha$ olur. ($\alpha = 36^\circ$)

B noktasından $[AC]$ na inilen dikme $[AC]$ nı iki eşit parçaya ayırır.



Böylece,

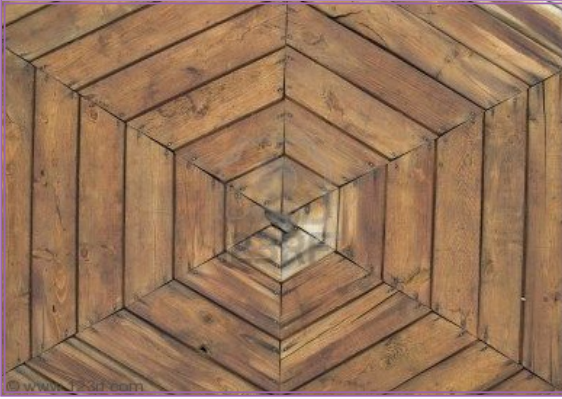
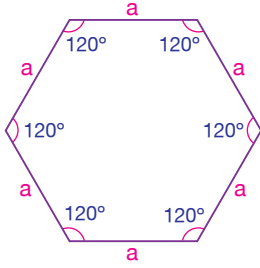
$$\langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle = |\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos \alpha$$

$$= 6 \cdot a \cdot \frac{3}{a}$$

$$= 18 \text{ bulunur.}$$

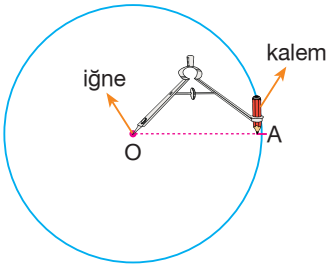
Düzgün Altıgen

Tanım : İç açılarının ölçüleri ve kenar uzunlukları eşit olan altıgenlere düzgün altıgen denir.

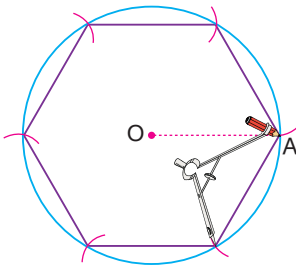


Düzgün Altıgenin Çizimi

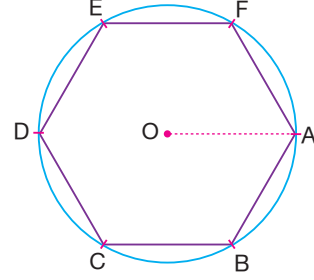
1. Yol : Pergel ile O merkezli bir çember çizelim.



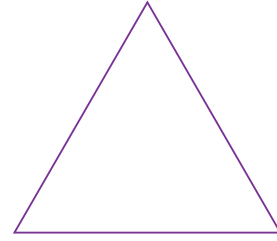
Pergel açıklığını değiştirmeden pergelin iğnesini A noktasına getirip çemberden geçen bir yay çizelim.



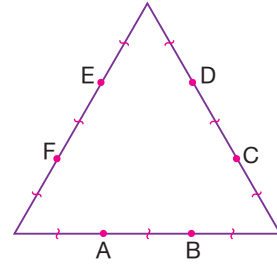
Bu işlemler çemberi kesen yay üzerinde her nokta için tekrarlanıp çember üzerinde noktalar birleştirilir.



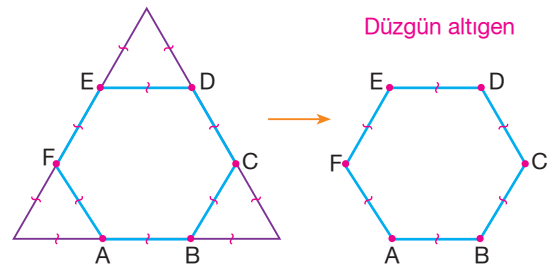
2. Yol : Bir eşkenar üçgen çizelim.



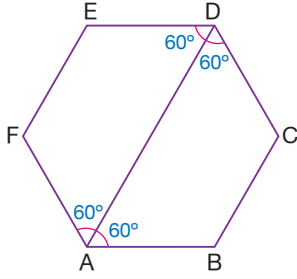
Bu eşkenar üçgenin tüm kenarlarını üç eş parçaya ayıralım.



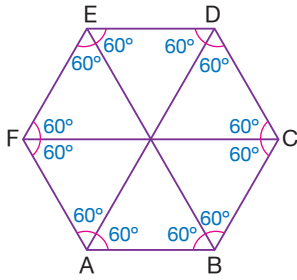
Noktaların ardışık olarak birleştirilmesi ile düzgün altıgen oluşur.



- Bir düzgün altıgende bir köşeden çıkan açığortay şekli ortalar.



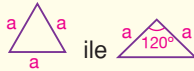
- Tüm köşeler için aynı çizimle 6 tane eşkenar üçgen oluşturulur.



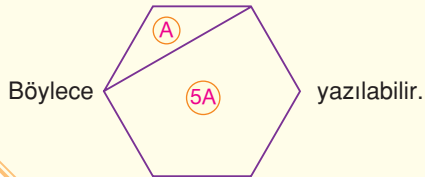
O halde, $A(ABCDEF) = \frac{6 \cdot a^2 \sqrt{3}}{4}$ ile hesaplanabilir.



NOT :



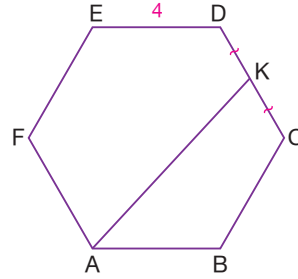
yukarıdaki iki üçgensel bölgenin alanlarının eşit olduğuna dikkat edelim.



Böylece

yazılabilir.

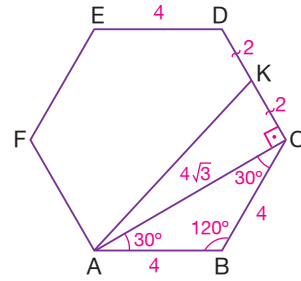
ÖRNEK - 1



ABCDEF düzgün altıgen
 $|DK| = |KC|$
 $|DE| = 4$ birim

Buna göre, $|AK|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



$|DK| = |KC| = 2$ birim olup

A ile C birleştirilirse,

$120^\circ - 30^\circ - 30^\circ$ üçgeni elde edilir.

$|AC| = 4\sqrt{3}$ birim bulunur.

$[AC] \perp [DC]$ olduğundan,

$\triangle ACK$ nde, Pisagor bağıntısı ile,

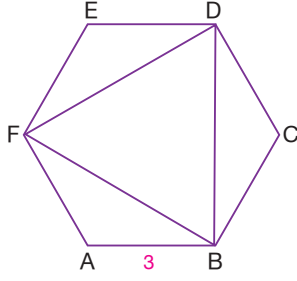
$$|AK|^2 = (4\sqrt{3})^2 + 2^2 \Rightarrow |AK|^2 = 52$$

$|AK| = 2\sqrt{13}$ birim bulunur.



Arı peteklerinin altıgen yapıda olduğunu biliyor muydunuz?

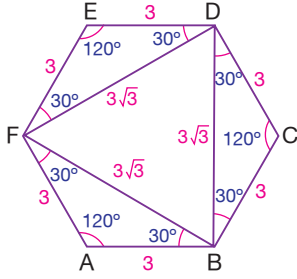
ÖRNEK - 2



ABCDEF düzgün
altıgen
 $|AB| = 3$ birim

Buna göre, FBD üçgeninin çevre uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



Düzgün altıgenin bir iç açısının ölçüsü 120° olduğundan $\triangle ABF$, $\triangle DBC$ ve $\triangle EFD$ üçgenleri $120 - 30 - 30^\circ$ üçgenleri olur.

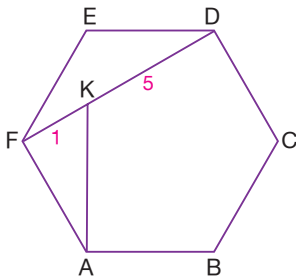
Dolayısıyla,

$$|BF| = |FD| = |DB| = 3\sqrt{3} \text{ birim bulunur.}$$

$$\triangle FBD \text{ için } \angle FBD = 30^\circ$$

$$= 9\sqrt{3} \text{ birim bulunur.}$$

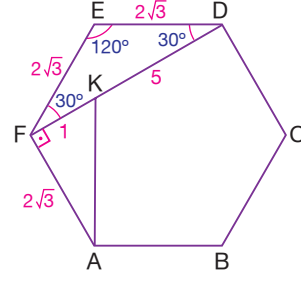
ÖRNEK - 3



ABCDEF düzgün
altıgen
[FD] köşegen
 $|FK| = 1$ birim
 $|KD| = 5$ birim

Buna göre, $|AK|$ uzunluğunu bulalım.

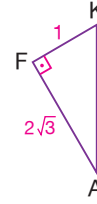
ÇÖZÜM



EFD üçgeni $120^\circ - 30^\circ - 30^\circ$ üçgeni olduğundan,

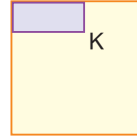
$$|EF| = |ED| = 2\sqrt{3} \text{ birim olur.}$$

$\triangle AFK$ nde Pisagor bağıntısı ile,

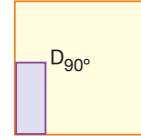


$$|AK|^2 = 1^2 + (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow |AK| = \sqrt{13} \text{ birim bulunur.}$$

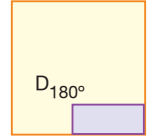
**Düzlemde Çokgenlerden Yararlanarak
Desen, Fraktal Görüntüsü Oluşturma**



Kendi
görüntüsü



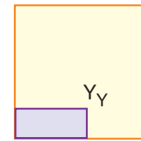
Saat yönünün
tersine 90°
dönme



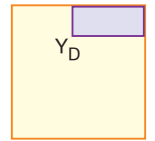
Saat yönünün
tersine 180°
dönme



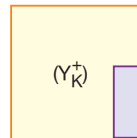
Saat yönünün
tersine 270°
dönme



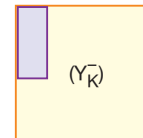
Yatay yansıma
(Yatay eksene göre)



Dikey yansıma
(Dikey eksene göre)



Sağ üst köşeden
sol alt köşeye çizilen
köşegene göre
yansıma



Sol üst köşeden
sağ alt köşeye çizilen
köşegene göre
yansıma

1. Bir düzgün çokgende bir köşeden çizilebilen köşegen sayısı kenar sayısının 3 katından 15 azdır.

Bu çokgenin bir dış açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 72

2. Bir kenarının uzunluğu 5 birim olan düzgün altıgenin uzun köşegeni kaç birimdir?

- A) 3 B) $4\sqrt{3}$ C) 8 D) $8\sqrt{3}$ E) 10

3. Bir düzgün çokgenin bir iç açısı ile bir dış açısının ölçüleri arasında $\frac{3}{2}$ oranı vardır.

Bu çokgenin köşegen sayısı kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

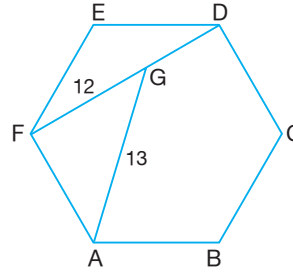
4. İç ve dış açılarının ölçüleri toplamı 3600° olan bir konveks çokgenin, köşegen sayısı kaçtır?

- A) 170 B) 172 C) 192 D) 196 E) 205

5. Bir köşesinden en fazla 21 köşegen çizilebilen bir düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 144 B) 150 C) 156 D) 160 E) 165

6.

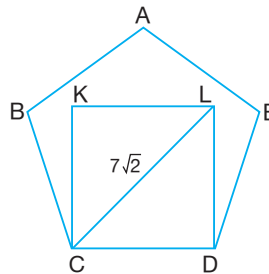


ABCDEF düzgün altıgen
[FD] köşegen
 $|FG| = 12$ birim
 $|AG| = 13$ birim

Buna göre, altıgenin çevresi kaç birimdir?

- A) 24 B) 30 C) 36 D) 42 E) 48

7.



ABCDE düzgün beşgen
CDLK kare
 $|CL| = 7\sqrt{2}$ birim

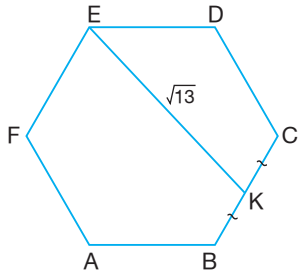
Buna göre, $\angle(ABCDE)$ kaç birimdir?

- A) 30 B) 32 C) 34 D) 35 E) 42

8. Köşegen sayısı 27 olan bir çokgenin belirlenebilmesi için (bir tek olarak çizilebilmesi için) en az kaç uzunluk elemanı verilmelidir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

9.

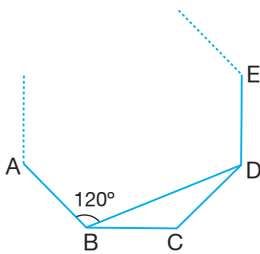


ABCDEF
düzgün altıgen
 $|BK| = |KC|$
 $|EK| = \sqrt{13}$ br

Buna göre, $|EA|$ uzunluğu kaç birimdir?

A) $\sqrt{13}$ B) $\sqrt{15}$ C) 4
D) $\sqrt{17}$ E) $2\sqrt{3}$

10.

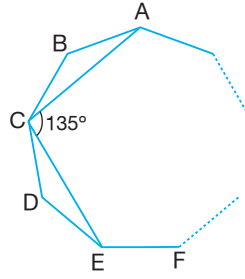


...ABCDE...
düzgün çokgen
 $m(\widehat{ABD}) = 120^\circ$

Buna göre, verilen çokgen kaç kenarlıdır?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

11.

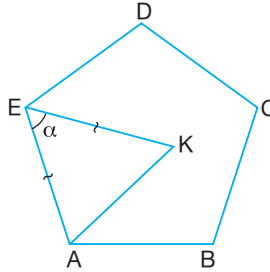


...ABCDEF...
düzgün çokgen
 $m(\widehat{ACE}) = 135^\circ$

Buna göre, bu çokgenin köşegen sayısı kaçtır?

A) 96 B) 104 C) 106 D) 108 E) 112

12.



ABCDE düzgün
beşgen
[AK] // [ED]
 $|EK| = |EA|$
 $m(\widehat{KEA}) = \alpha$

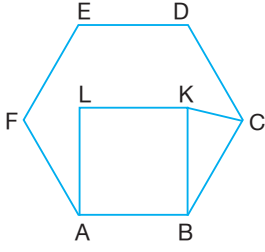
Buna göre, α kaç derecedir?

A) 36 B) 48 C) 56 D) 72 E) 84

13. Ardışık üç iç açısı 130° , 150° , 160° olan bir konveks çokgenin diğer iç açıları birbirine eşit ve 170° olduğuna göre, bu çokgen kaç kenarlıdır?

A) 18 B) 21 C) 24 D) 27 E) 29

1.

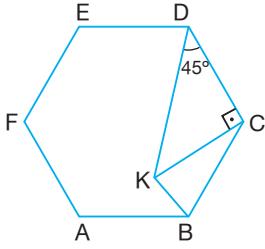


ABCDEF
düzgün altıgen
ABKL kare

Buna göre, $m(\widehat{DCK})$ kaç derecedir?

- A) 35 B) 40 C) 45 D) 50 E) 55

2.

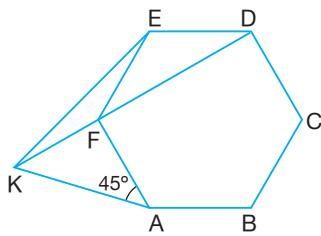


ABCDEF
düzgün altıgen
 $m(\widehat{KDC}) = 45^\circ$

Buna göre, $m(\widehat{ABK})$ kaç derecedir?

- A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

3.

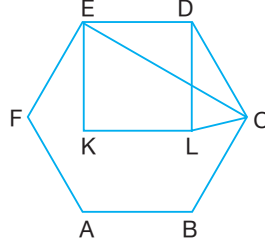


ABCDEF
düzgün altıgen
D, F, K doğrusal
 $m(\widehat{FAK}) = 45^\circ$

Buna göre, $m(\widehat{KEF})$ kaç derecedir?

- A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

4.

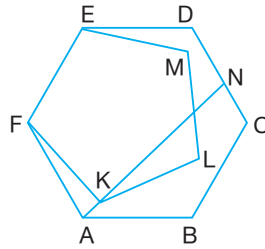


ABCDEF
düzgün altıgen
KLDE kare

Buna göre, $m(\widehat{ECL})$ kaç derecedir?

- A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

5.

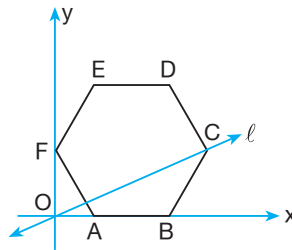


ABCDEF
düzgün altıgen
EFKLM
düzgün beşgen
A, K, N doğrusal

Buna göre, $m(\widehat{AND})$ kaç derecedir?

- A) 88 B) 90 C) 92 D) 94 E) 96

6.

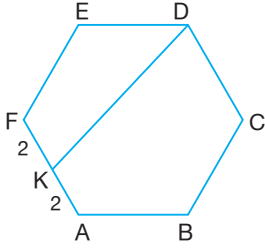


ABCDEF
düzgün altıgen

Buna göre, ℓ doğrusunun eğimi kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

7.

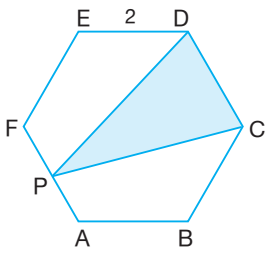


ABCDEF
düzgün altıgen
 $|FK| = 2$ birim
 $|DK| = 2$ birim

Buna göre, $|DK|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{15}$ B) $2\sqrt{14}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{6}$

8.

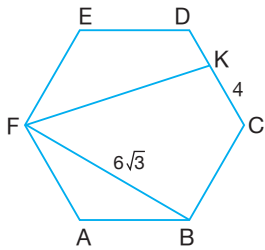


ABCDEF
düzgün altıgen
 $|ED| = 2$ birim

Buna göre, $A(PDC)$ kaç br^2 dir?

- A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ E) $3\sqrt{3}$

9.

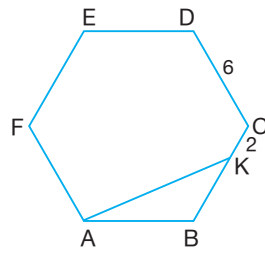


ABCDEF
düzgün altıgen
 $|KC| = 4$ birim
 $|FB| = 6\sqrt{3}$ birim

Buna göre, $|FK|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $4\sqrt{3}$ B) 8 C) $4\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{6}$ E) $4\sqrt{7}$

10.

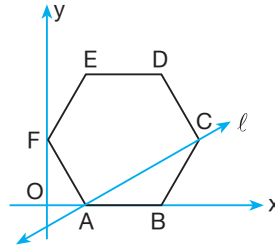


ABCDEF
düzgün altıgen
 $|DC| = 6$ birim
 $|CK| = 2$ birim

Buna göre, $|AK|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $4\sqrt{3}$ B) 8 C) $6\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{19}$ E) $4\sqrt{5}$

11.

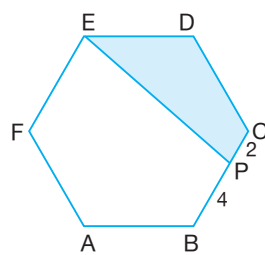


ABCDEF
düzgün altıgen

Buna göre, ℓ doğrusunun eğimi kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

12.

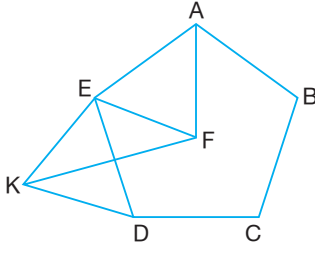


ABCDEF
düzgün altıgen
 $|CP| = 2$ birim
 $|PB| = 4$ birim

Buna göre, $A(PEDC)$ kaç br^2 dir?

- A) $15\sqrt{3}$ B) $16\sqrt{3}$ C) $17\sqrt{3}$
D) $18\sqrt{3}$ E) $19\sqrt{3}$

1.

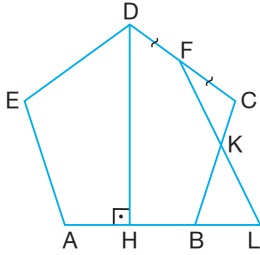


ABCDE
düzgün beşgen
AEF ve DEK eş-
kenar üçgen

Buna göre, $m(\widehat{FKD})$ kaç derecedir?

- A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

2.

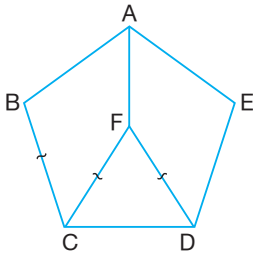


ABCDE
düzgün beşgen
 $|DH| = |FL|$
 $|DF| = |FC|$
F, K, L doğrusal

Buna göre, $m(\widehat{LFC})$ kaç derecedir?

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

3.

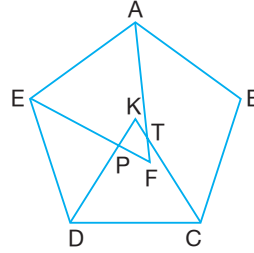


ABCDE
düzgün beşgen

Buna göre, $m(\widehat{AFD})$ kaç derecedir?

- A) 150 B) 145 C) 140 D) 135 E) 130

4.

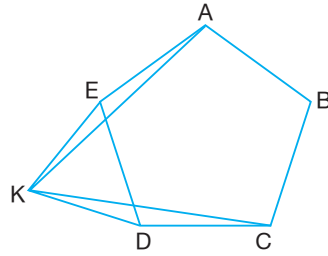


ABCDE
düzgün beşgen
AEF eşkenar üçgen
DKC eşkenar üçgen

Buna göre, $m(\widehat{ATC})$ kaç derecedir?

- A) 146 B) 148 C) 150 D) 152 E) 156

5.

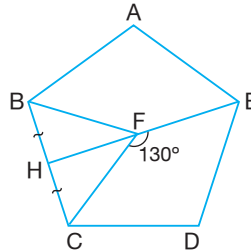


ABCDE
düzgün beşgen
DEK eşkenar üç-
gen

Buna göre, $m(\widehat{AKC})$ kaç derecedir?

- A) 50 B) 48 C) 46 D) 44 E) 42

6.

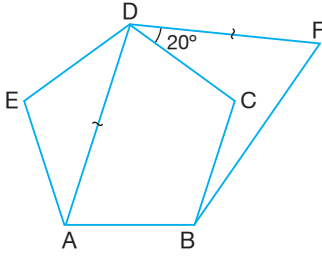


ABCDE
düzgün beşgen
E, F, H doğrusal
 $m(\widehat{CFE}) = 130^\circ$

Buna göre, $m(\widehat{ABF})$ kaç derecedir?

- A) 62 B) 64 C) 66 D) 68 E) 70

7.

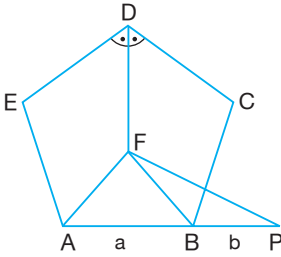


ABCDE
düzgün beşgen
 $|AD| = |DF|$

Buna göre, $m(\widehat{CBF})$ kaç derecedir?

- A) 22 B) 24 C) 26 D) 28 E) 30

8.

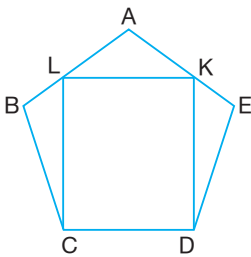


ABCDE
düzgün beşgen
A, B, P doğrusal
 $m(\widehat{FAP}) = 2m(\widehat{APF})$

Buna göre, $\widehat{C(ABF)}$ kaç br^2 dir?

- A) $a + 2b$ B) $2a + b$ C) $a + b$
D) $3a$ E) $a + 3b$

9.

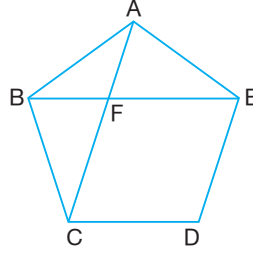


ABCDE
düzgün beşgen
CDKL dikdörtgen

Buna göre, $m(\widehat{DKE})$ kaç derecedir?

- A) 46 B) 48 C) 50 D) 52 E) 54

10.

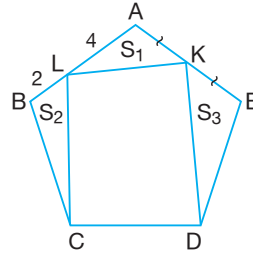


ABCDE
düzgün beşgen
 $[AC] \cap [BE] = \{F\}$
 $|AF| \cdot |BE| = 8$ birim

Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) 4 E) $4\sqrt{2}$

11.

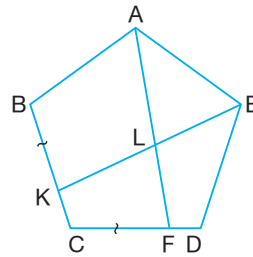


ABCDE
düzgün beşgen
 $|AL| = 4$ birim
 $|LB| = 2$ birim

Buna göre, $\frac{S_1 + S_2}{S_3}$ oranı kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2 E) $\frac{7}{3}$

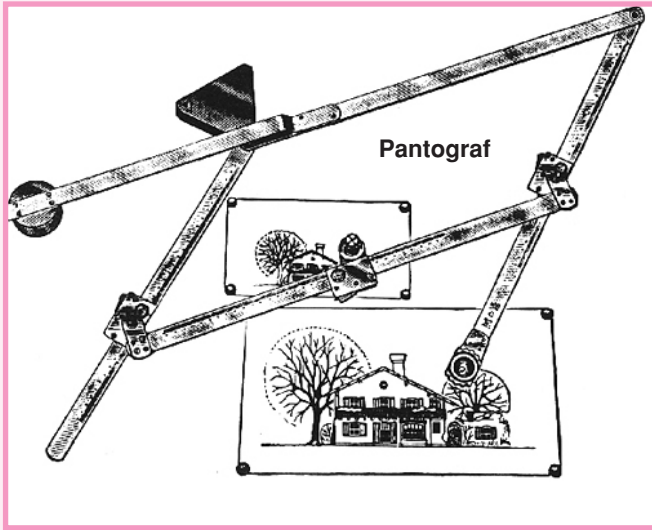
12.



ABCDE
düzgün beşgen

Buna göre, $m(\widehat{ALE})$ kaç derecedir?

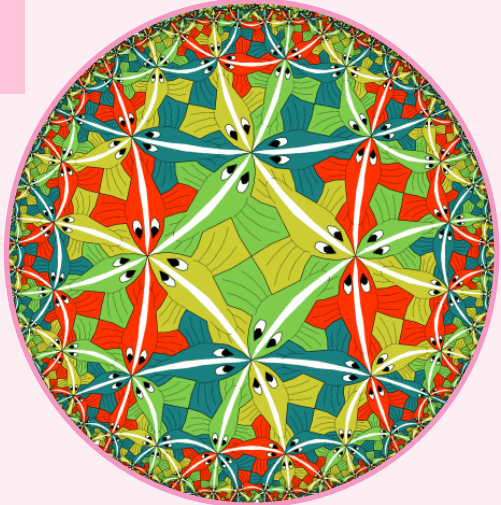
- A) 24 B) 36 C) 72 D) 80 E) 88



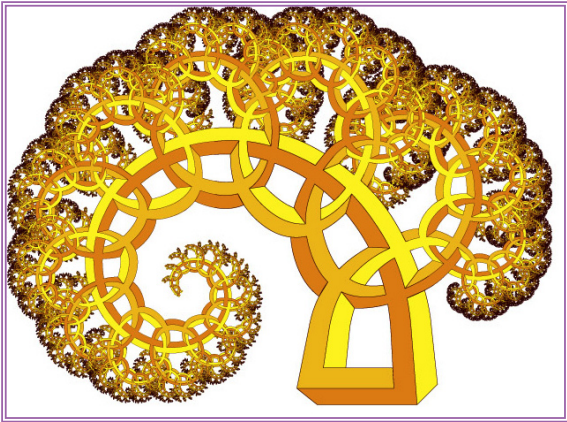
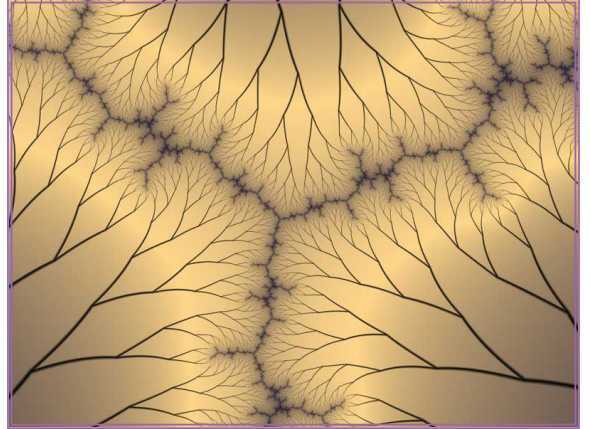
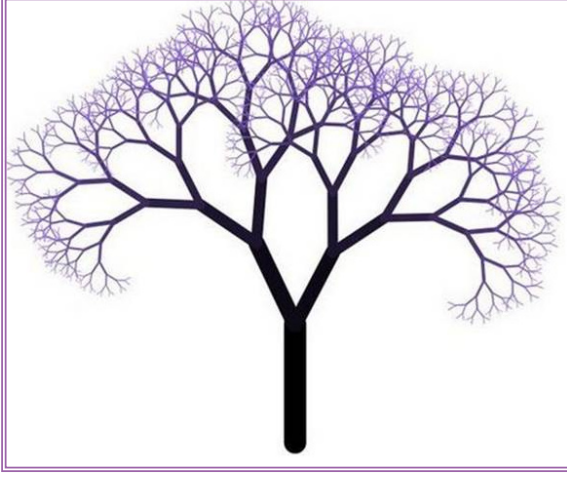
DÖNÜŞÜMLERLE GEOMETRİ

ÜNİTE - 9

- Öteleme
- Dönme
- Yansıma
- Şerit Süsleme
- Düzlemde Kaplamalar
- Tangram
- Altın üçgen
- Eşlik
- Homoteti
- Fraktal
- Üçgende Benzerlik ve Tales
- Dik Üçgende Metrik Bağlantılar (Öklid Bağlantıları)
- Özel Teoremler (Menelaus, Seva)

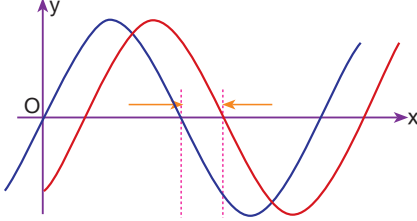


Bazı Fraktal Örnekleri

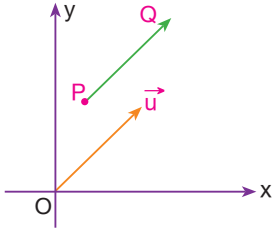


Tanım : Düzlemin noktalarını yine düzlemin noktalarına eşleyen birebir ve örten fonksiyona düzlemin bir dönüşümü denir.

ÖTELEME (Translation)



Düzlemde $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ olacak şekilde tanımlanan Q noktasına, P noktasının $\vec{u}$ vektörü doğrultusunda ötelenmiş denir. $Q = T_{\vec{u}}(P)$ şeklinde gösterilir.



Düzlemde her P noktası için,
 $T_{\vec{u}}(P) = P + \vec{u}$
 ötelemesi yazılabilir.

Yani $T_{\vec{u}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bir dönüşümdür.

ÖRNEK - 1

Düzlemde A(2, 6) noktasının $\vec{u} = (1, 7)$ vektörü doğrultusunda ötelenmiş olan noktayı bulalım.

ÇÖZÜM :

Aranan nokta B olsun,

$$B = T_{\vec{u}}A = A + \vec{u} \text{ olup}$$

$$B = (2, 6) + (1, 7) \Rightarrow B = (3, 13) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

Düzlemde A(-5, 4) noktasının $\vec{u}$ vektörü doğrultusunda ötelenmesi ile B(7, -6) noktası elde ediliyor.

Buna göre, $\vec{u}$ vektörünü bulalım.

ÇÖZÜM :

A noktasının $\vec{u}$ vektörü doğrultusundaki ötelenmiş B ise $B = A + \vec{u}$ olup

$$(7, -6) = (-5, 4) + \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = (12, -10) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

Düzlemde A noktasının $\vec{u} = (-2, 7)$ vektörü doğrultusunda ötelenmiş B(-6, 4) noktasıdır.

Buna göre, A noktasını bulalım.

ÇÖZÜM :

A noktasının $\vec{u}$ vektörü doğrultusunda ötelenmesi ile B noktası elde edilmiştir.

Bu öteleme,

$$B = A + \vec{u} \text{ olup}$$

$$(-6, 4) = (-2, 7) + A \text{ eşitliğinden}$$

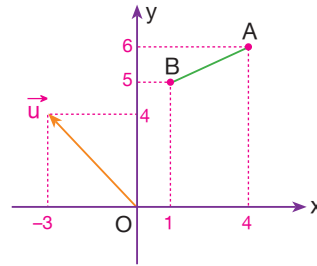
$$A = (-6, 4) - (-2, 7)$$

$$A = (-4, -3) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 4

Düzlemde A(4, 6) ve B(1, 5) noktaları ile elde edilen doğru parçasını $\vec{u} = (-3, 4)$ doğrultusunda öteleyelim.

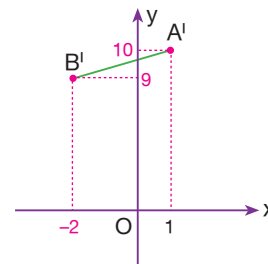
ÇÖZÜM :



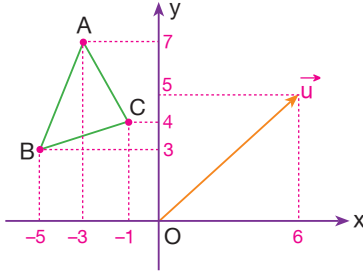
$$A' = A + \vec{u} = (4, 6) + (-3, 4) = (1, 10)$$

$$B' = B + \vec{u} = (1, 5) + (-3, 4) = (-2, 9)$$

olup ötelenmiş



ÖRNEK - 5



ABC üçgeninin $\vec{u} = (6, 5)$ vektörü doğrultusundaki ötelenmiş olan üçgenin köşe koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM :

Tüm köşeleri $\vec{u}$ vektörü doğrultusunda öteleyelim.

$\left. \begin{array}{l} A(-3, 7) \\ B(-5, 3) \\ C(-1, 4) \end{array} \right\}$ noktalarını $\vec{u}$ doğrultusunda
ötenmişleri A', B', C' olsun.

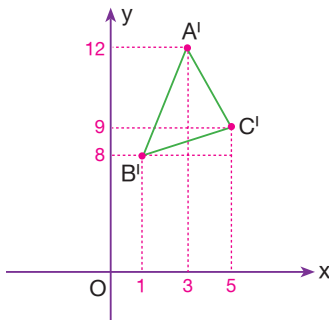
Bu durumda,

$$A' = A + \vec{u} = (-3, 7) + (6, 5) = (3, 12)$$

$$B' = B + \vec{u} = (-5, 3) + (6, 5) = (1, 8)$$

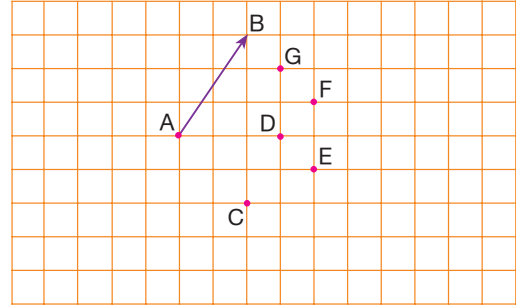
$$C' = C + \vec{u} = (-1, 4) + (6, 5) = (5, 9)$$

olup ötelenmiş üçgen



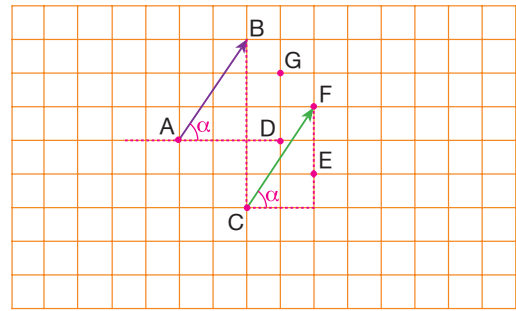
$A'B'C'$ üçgeni, ABC üçgeninin $\vec{u} = (6, 5)$ doğrultusunda ötelenmiştir.

ÖRNEK - 6



Şekilde C noktasını hangi nokta ile birleştirirsek $\vec{AB}$ aynı yönlü ve aynı doğrultulu olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM :



$\vec{AB}$ vektörüne 2 birim sağa 3 birim yukarıya ötelenmesi ile ulaşmıştır.

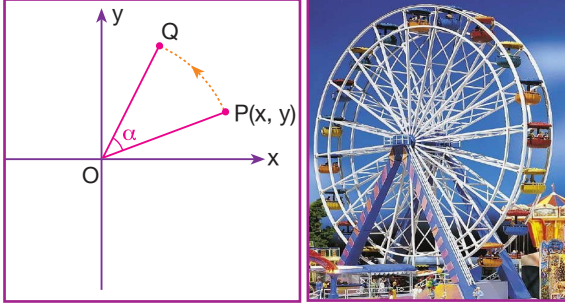
Bu nedenle C noktası ile F birleştirilirse $\vec{CF}$ de 2 birim sağa 3 birim yukarıya ötelenmesi ile oluşmaktadır.



"Satranç tahtasında taşlarla yapılan hamleler birer öteleme hareketi midir acaba?"

DÖNME (Rotation)

Düzlemdeki bir $P(x, y)$ noktasının orijin etrafında α° kadar döndürülmesi ile elde edilen nokta Q olsun.



$$Q = R_{(\alpha)}(P) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

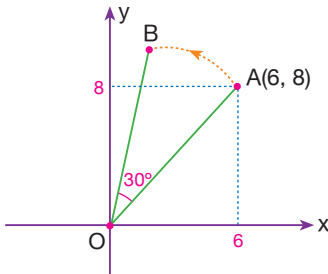
şeklinde gösterilir.

- Burada R_α ya dönme dönüşümü denir.
- Düzlemde her P noktası belli bir açı ile dönebileceğinden, $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bir dönüşümdür.

ÖRNEK - 1

Düzlemdeki $A(6, 8)$ noktasının orijin etrafında 30° dönmesi ile elde edilen noktanın koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM



Aranan nokta B olsun.

$$B = R_{30^\circ}(A) = (6\cos 30^\circ - 8\sin 30^\circ, 6\sin 30^\circ + 8\cos 30^\circ)$$

$$B = \left(6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 8 \cdot \frac{1}{2}, 6 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$B = (3\sqrt{3} - 4, 3 + 4\sqrt{3}) \text{ aranan noktadır.}$$

SONUÇ :

- ⇒ Dönme orijin hariç her noktayı değiştirir.
- ⇒ Değişmeyen noktaya dönme merkezi denir.

ÖRNEK - 2

Düzlemdeki $A(a, b)$ noktasının orijin etrafında 180° dönmesi ile $B(-7, -5)$ noktası elde ediliyor.

Buna göre, $a + b$ toplamını bulalım.

ÇÖZÜM

$$B = R_{180^\circ}(A) \text{ eşitliğinden,}$$

$$(-7, -5) = (a \cdot \cos 180^\circ - b \cdot \sin 180^\circ, a \cdot \sin 180^\circ + b \cdot \cos 180^\circ)$$

$$(-7, -5) = (a \cdot (-1) - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot (-1))$$

$$(-7, -5) = (-a, -b) \text{ olup}$$

$$a = 7 \text{ ve } b = 5 \text{ bulunur.}$$

O halde aranan nokta $(7, 5)$ olur.

$$a + b = 12 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

Düzlemdeki $A(m, n)$ noktasının orijin etrafında 90° dönmesi ile $B(4, -6)$ noktası elde ediliyor.

Buna göre, A noktasının koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM

$$B = R_{90^\circ}(A) \text{ eşitliğinden}$$

$$B = (m \cdot \cos 90^\circ - n \cdot \sin 90^\circ, m \cdot \sin 90^\circ + n \cdot \cos 90^\circ)$$

$$(4, -6) = (m \cdot 0 - n \cdot 1, m \cdot 1 + n \cdot 0)$$

$$(4, -6) = (-n, m)$$

$$4 = -n \text{ ve } -6 = m$$

$$\left. \begin{array}{l} n = -4 \\ m = -6 \end{array} \right\} \text{ olup bu durumda } A(-6, -4) \text{ bulunur.}$$



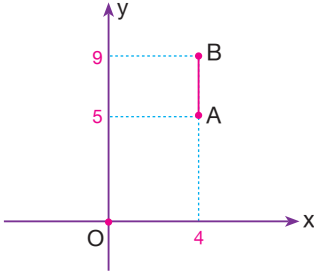
NOT :

90° ve 180° döndürülmelerinde şekil çizilerek de sonuca kolayca ulaşılabilir.

ÖRNEK - 4

Analitik düzlemdeki A(4, 5) ve B(4, 9) noktaları ile elde edilen [AB] doğru parçasının orijin etrafında 90° döndürülmesi ile elde edilen doğru parçasının uç noktalarının koordinatlarını bulalım.

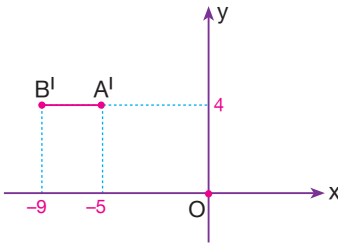
ÇÖZÜM  :



$$A' = R_{90^\circ}(A) = (4 \cdot \cos 90^\circ - 5 \cdot \sin 90^\circ, 4 \cdot \sin 90^\circ + 5 \cdot \cos 90^\circ)$$

$$B' = R_{90^\circ}(B) = (4 \cdot \cos 90^\circ - 9 \cdot \sin 90^\circ, 4 \cdot \sin 90^\circ + 9 \cdot \cos 90^\circ)$$

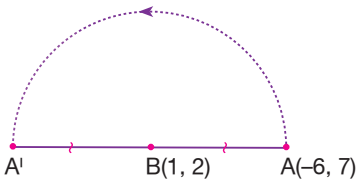
eşitliklerinden $A' = (-5, 4)$ ve $B' = (-9, 4)$ elde edilir.



ÖRNEK - 5

A(-6, 7) noktasının B(1, 2) noktası etrafında 180° döndürülmesi ile elde edilen noktayı bulalım.

ÇÖZÜM  :



B(1, 2) orta nokta olup $A'(8, -3)$ bulunur.

ÖRNEK - 6

Analitik düzlemde A(4, -7) noktasının K(-2, 5) noktası etrafında 45° döndürülmesi ile elde edilen noktanın koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM  :

Dönme merkezi olan K(-2, 5) noktasını $\vec{v} = (2, -5)$ doğrultusunda orijine öteleyelim.

Yani, (-2, 5) noktasını (0, 0) noktasına ötelenirse,

Bu durumda, (4, -7) noktası da aynı şekilde, (6, -12) noktasına ötelenmiş olur.

Şimdi örnek şu şekle geldi;

"A(6, -12) noktasının orijin etrafında 45° döndürülmesi ile elde edilen noktanın koordinatlarını bulalım."

$$A' = (6\cos 45^\circ + 12\sin 45^\circ, 6\sin 45^\circ - 12\cos 45^\circ)$$

$$A' = \left(6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$A' = (9\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$$

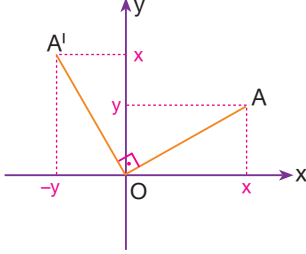
Şimdi bu noktayı $\vec{v} = (-2, 5)$ doğrultusunda ötersek $A''(9\sqrt{2} - 2, -3\sqrt{2} + 5)$ bulunur.

SONUÇ :

Dönme merkezi orijin olmayan döndürme problemlerinde önce uygun bir $\vec{u}$ ötelemesi ile dönme merkezi orijin yapılır ve daha sonra dönme formülleri uygulanır, bulunan nokta $-\vec{u}$ doğrultusunda tekrar ötelenir.

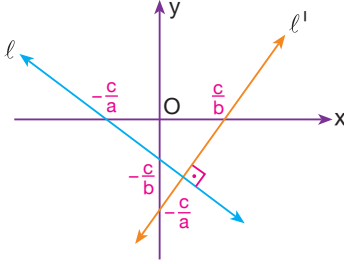
Bazı Özel Döndürmeler

- $A(x, y)$ noktasının orijin etrafında 90° döndürülmesi ile elde edilen nokta $A'(-y, x)$ noktasıdır.



- $\ell : ax + by + c = 0$ doğrusunun orijin etrafında 90° döndürülmesi ile elde edilen doğru;

$$\ell' : -ay + bx - c = 0 \text{ doğrusudur.}$$



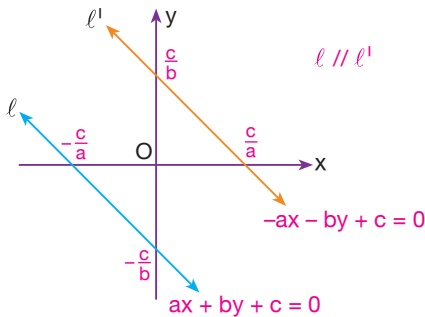
- $A(x, y)$ noktasının orijin etrafında 180° döndürülmesi ile elde edilen nokta,

$$R_{180^\circ}(A) = (x \cdot \cos 180^\circ - y \cdot \sin 180^\circ, x \cdot \sin 180^\circ + y \cdot \cos 180^\circ) = (-x, -y)$$

$$R_{180^\circ}(x, y) = (-x, -y) \text{ olur.}$$

- $\ell : ax + by + c = 0$ doğrusunun orijin etrafında 180° döndürülmesi ile elde edilen doğru,

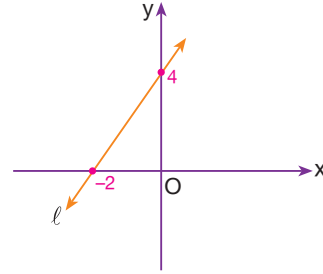
$$\ell' : -ax - by + c = 0 \text{ doğrusudur.}$$



ÖRNEK - 7

$y = 2x + 4$ doğrusunun orijin etrafında 90° döndürülmesi ile oluşan doğrunun denklemini bulalım.

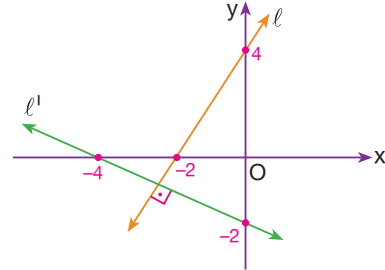
ÇÖZÜM :



$y = 2x + 4$ doğrusu üzerinde iki noktayı alıp orijin etrafında 90° dönderelim.

$$R_{90^\circ}(0, 4) = (-4, 0)$$

$$R_{90^\circ}A(-2, 0) = (0, -2) \text{ noktasını elde ederiz.}$$



Böylece aranan doğru $\ell' : 2y + x + 4 = 0$ bulunur.

Dikkat edilirse ℓ ve ℓ' doğruları eğimleri çarpımı -1 olan iki doğrudur. Yani $\ell \perp \ell'$ olur.

SONUÇ :

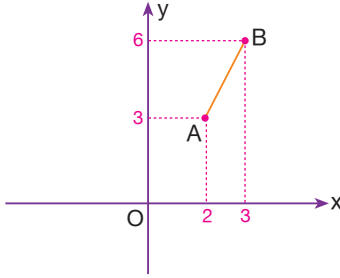
Bir doğru ile bu doğrunun orijin etrafında 90° dönmesi ile elde edilen doğru birbirine diktir.

ARAŞTIRMA

Bir doğrunun dışındaki bir noktaya göre dönmelerini düşününüz.



ÖRNEK - 8

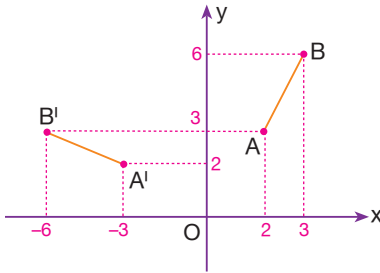


[AB] doğru parçası orijin etrafında 90° döndürülüyor elde edilen doğru parçasını bulalım.

ÇÖZÜM

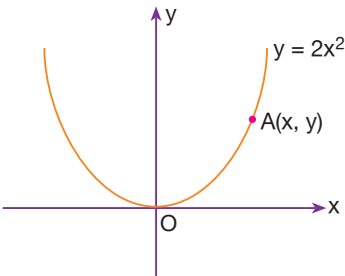
$$R_{90^\circ}(A) = R_{90^\circ}(2, 3) = A'(-3, 2) \text{ ve}$$

$$R_{90^\circ}(B) = R_{90^\circ}(3, 6) = B'(-6, 3) \text{ olup}$$



AB ve A'B' doğrularının dik kesiştiğine dikkat edelim.

ÖRNEK - 9



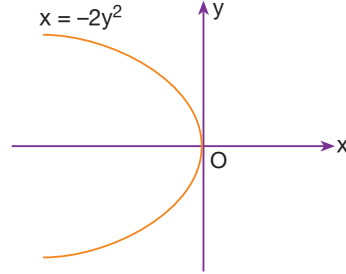
$y = 2x^2$ parabolünü orijin etrafında 90° dönmesi ile elde edilen parabolün denklemini bulalım.

ÇÖZÜM

Parabol üzerinde değişken bir $A(x, y)$ noktası alıp 90° döndürelim.

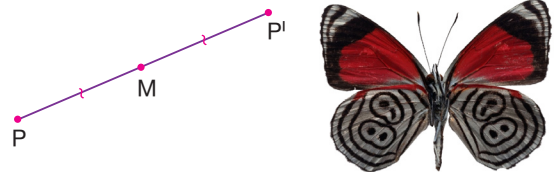
$$R_{90^\circ}(x, y) = (-y, x) \text{ olup}$$

aranan denklem $x = -2y^2$ bulunur.



YANSIMA (Reflection)

Düzlemde bir P noktasının, M noktasına göre simetriği olan nokta P' olsun.



$$P' \text{ noktası } P' = 2M - P \text{ bağıntısı ile bulunur.}$$

Burada M yansımaya merkezidir.

Bu dönüşüme de yansımaya dönüşümü denir.

$$P' = S_M(P) = 2M - P \text{ ile gösterilir.}$$

ÖRNEK - 1

A(3, 2) noktasının B(-5, 4) noktasına göre simetriğini bulalım.

ÇÖZÜM

A noktasının B noktasına göre simetriği A' olsun.

Bu durumda A'nın B'ye göre yansımaya dönüşümü

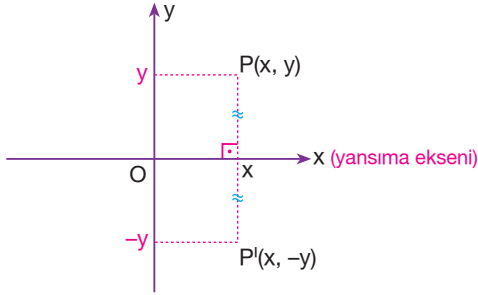
$$S_B(A) = A' = 2B - A \text{ dır.}$$

$$A' = 2(-5, 4) - (3, 2) = (-13, 6) \text{ olur.}$$

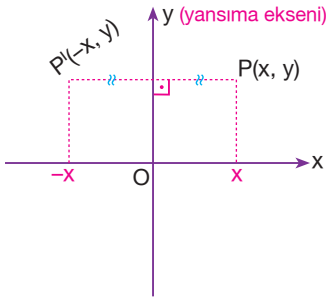


Düzlemdeki bir $P(x, y)$ noktasının,

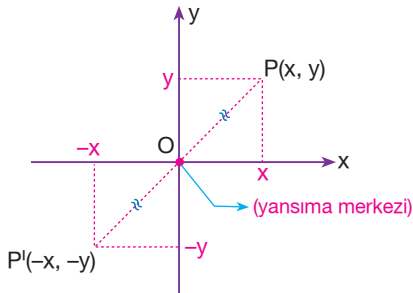
- x eksenine göre yansıması $P'(x, -y)$ dir.



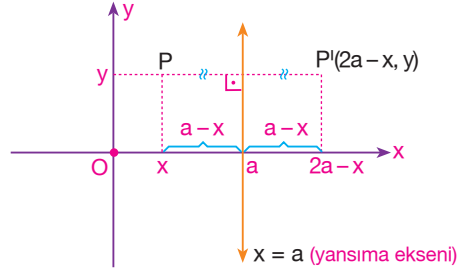
- y eksenine göre yansıması $P'(-x, y)$ tir.



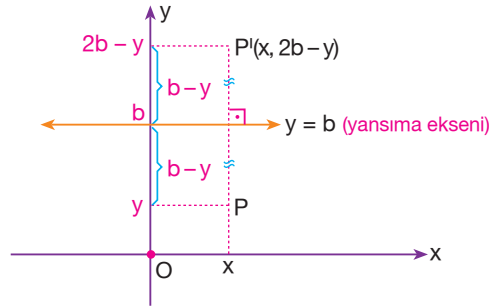
- Orijine göre yansıması $P'(-x, -y)$ dir.



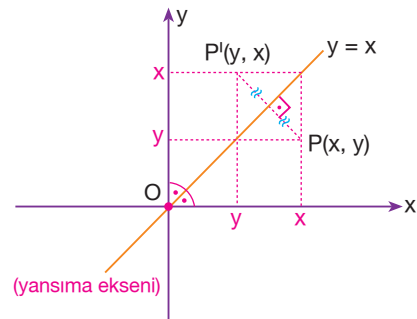
- $x = a$ doğrusuna göre yansıması $P'(2a - x, y)$ dir.



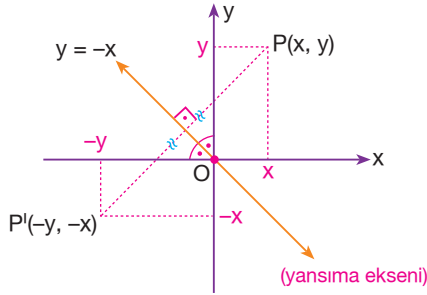
- $y = b$ doğrusuna göre yansıması $P'(x, 2b - y)$ dir.



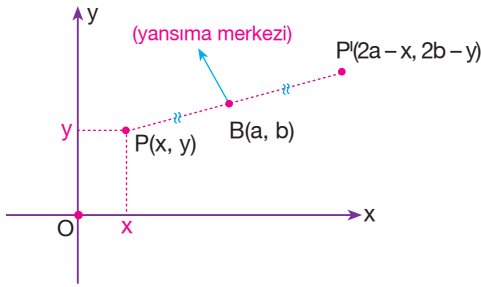
- $y = x$ (l. açkırtay) doğrusuna göre yansıması $P'(y, x)$ tir.



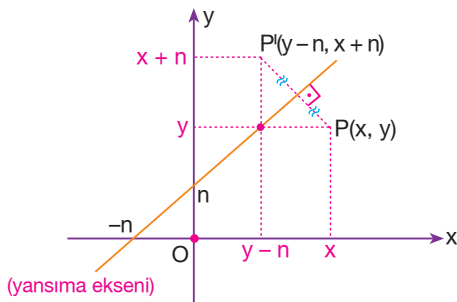
- $y = -x$ (II. açıortay) doğrusuna göre yansıması $P'(-y, -x)$ tir.



- $B(a, b)$ noktasına göre yansıması $P'(2a - x, 2b - y)$ dir.



- $y = x + n$ doğrusuna göre yansıması $P'(y - n, x + n)$ dir.



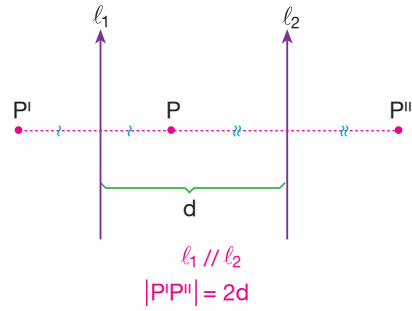
- Aynı şekilde $y = -x + n$ doğrusuna göre yansıması $P'(-y + n, -x + n)$ dir.



NOT :

Bir yansıma dönüşümünün tersi kendisine eşittir. Yani, $S_B(A) = C$ $S_B(C) = A$ olur.

- Düzlemde alınan bir P noktasının paralel iki doğruya göre yansımasının bileşkesi bu iki doğru arasındaki uzaklığın 2 katı kadar bir ötelemedir.

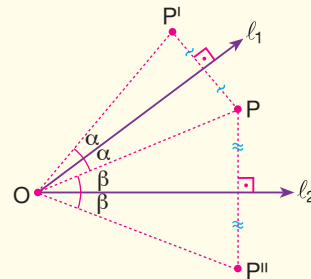


P'' noktası P' noktasının $2d$ kadar ötelenmesi ile elde edilmiştir.



NOT :

Düzlemde alınan bir P noktasının kesişen iki doğruya göre yansımasının bileşkesi, bu iki doğru arasındaki açının **iki katı** kadar bir dönelemedir.



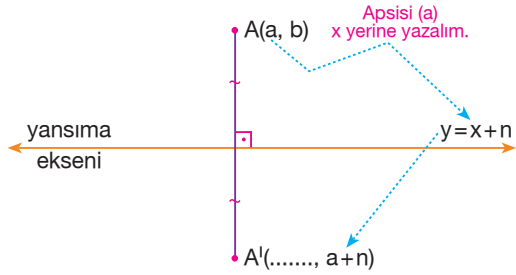


✓ **Pratik Bilgi**

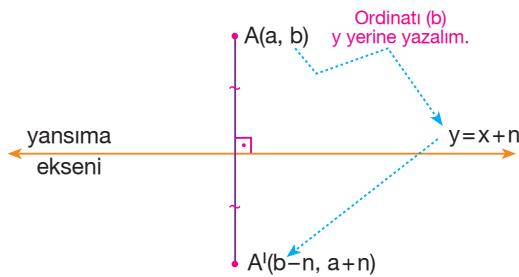
Bir noktanın, eğimi 1 ya da -1 olan bir doğruya göre simetriği alınırken noktanın apsisi denklemdeki x yerine yazılır.

Bulunan y değeri yansıyan noktanın ordinatıdır.

Yani,



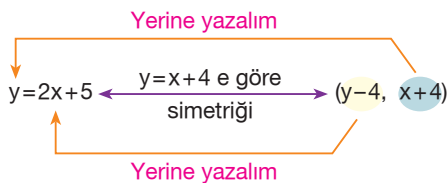
Aynı işlem ordinat için de tekrarlanır.



✓ **Pratik Bilgi**

Bir doğrunun, eğimi 1 ya da -1 olan bir doğruya göre simetriği alınırken yukarıdaki pratik yol aynı mantıkla izlenebilir.

Aşağıdaki örneği inceleyelim.



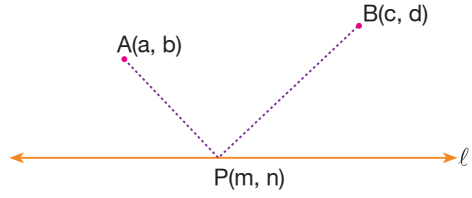
$$x + 4 = 2(y - 4) + 5$$

$$2y - x - 7 = 0$$

Sonuç olarak;

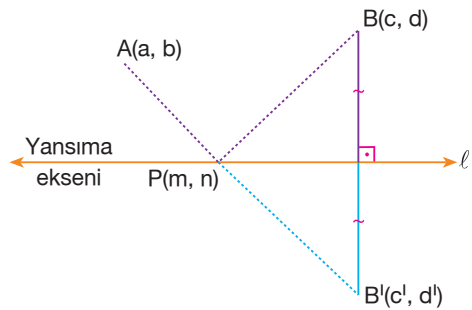
$$y = 2x + 5 \xrightarrow{y = x + 4 \text{ e göre simetriği}} 2y - x - 7 = 0 \text{ bulunur.}$$

✓ **Pratik Bilgi**



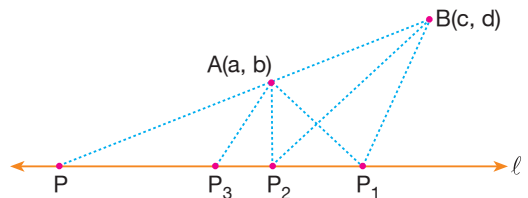
$|AP| + |PB|$ toplamının en küçük değerini bulmak için A ya da B den herhangi birinin l doğrusuna göre simetriği alınıp kırık çizgi düz hale getirilir.

Yani,



Böylece A, P, B' noktaları doğrusal olur, eğimler eşitlenerek ya da benzer üçgenler kullanarak P noktasının koordinatları bulunmuş olur.

✓ **Pratik Bilgi**



$||BP| - |AP||$ farkının en büyük olmasını sağlayan P noktası AB nin l doğrusunu kestiği noktadır.

Böylece, üçgen eşitsizliğinden $||AP| - |PB||$ nin en büyük değeri $|AB|$ olur.

Dikkat edilirse en küçük en büyük problemlerinde kırık çizgiler her zaman düzleştirilmeye çalışılıyor.

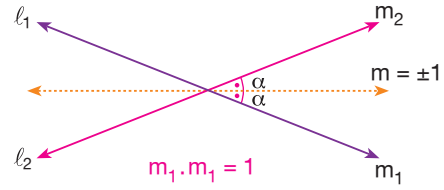


✓ **Pratik Bilgi**

- $A(a, b)$ noktasının $\xleftrightarrow{\text{x-eksenine göre simetrisi}}$ $B(a, -b)$
- $A(a, b)$ noktasının $\xleftrightarrow{\text{y-eksenine göre simetrisi}}$ $B(-a, b)$
- $A(a, b)$ noktasının $\xleftrightarrow{\text{O(0, 0) a göre simetrisi}}$ $B(-a, -b)$
- $A(a, b)$ noktasının $\xleftrightarrow{\text{x=c ye göre simetrisi}}$ $B(2c - a, b)$
- $A(a, b)$ noktasının $\xleftrightarrow{\text{y=c ye göre simetrisi}}$ $B(a, 2c - b)$
- $A(a, b)$ noktasının $\xleftrightarrow{\text{A(c, d) ye göre simetrisi}}$ $B(2c - a, 2d - b)$
- $A(a, b)$ noktasının $\xleftrightarrow{\text{y=x ye göre simetrisi}}$ $B(b, a)$
- $A(a, b)$ noktasının $\xleftrightarrow{\text{y=-x e göre simetrisi}}$ $B(-b, -a)$
- $ax + by + c = 0 \xleftrightarrow{\text{x - eksenine göre simetrisi}} ax - by + c = 0$
- $ax + by + c = 0 \xleftrightarrow{\text{y- eksenine göre simetrisi}} -ax + by + c = 0$
- $ax + by + c = 0 \xleftrightarrow{\text{O(0, 0) a göre simetrisi}} -ax - by + c = 0$
- $ax + by + c = 0 \xleftrightarrow{\text{x=k ye göre simetrisi}} a(2k - x) + by + c = 0$
- $ax + by + c = 0 \xleftrightarrow{\text{y=k ye göre simetrisi}} ax + b(2k - y) + c = 0$
- $ax + by + c = 0 \xleftrightarrow{\text{y=x ye göre simetrisi}} ay + bx + c = 0$
- $ax + by + c = 0 \xleftrightarrow{\text{y=-x e göre simetrisi}} -ay - bx + c = 0$
- $ax + by + c = 0 \xleftrightarrow{\text{A(p, q) ya göre simetrisi}} a(2p - x) + b(2q - y) + c = 0$

✓ **Pratik Bilgi**

Kesişen iki doğrunun oluşturduğu açının açılırtay doğrusunun eğimi 1 ya da -1 ise doğruların eğimleri çarpımı 1 dir.



ÖRNEK - 1

$$l_1 : 2x - 3y + 5 = 0 \text{ ve } l_2 : ax + 5y - 4 = 0$$

doğrularının oluşturduğu açının açılırtay doğrularından birinin denklemi $l_3 : y + x - 7 = 0$ ise a değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

$$l_1 \text{ doğrusunun eğimi ; } m_1 = \frac{2}{3}$$

$$l_2 \text{ doğrusunun eğimi ; } m_2 = -\frac{a}{5} \text{ ve}$$

$$l_3 \text{ (açılırtay) doğrusunun eğimi } -1$$

olduğundan $m_1 \cdot m_2 = 1$ olmalıdır.

$$\text{O halde, } \frac{2}{3} \cdot -\frac{a}{5} = 1 \Rightarrow a = -\frac{15}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

$y + 3x - 4 = 0$ doğrusu $(0, 4)$ noktası etrafında 90° döndürüldüğünde elde edilen doğrunun kapaalı denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

Aradığımız doğru ℓ olsun.

$$m_\ell = -3 \text{ ve } \ell \perp \ell' \text{ olduğundan } m_{\ell'} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

$(0, 4)$ noktası $y + 3x - 4 = 0$ doğrusu üzerinde olduğundan, eğimi ve bir noktası belli olan doğru denkleminde,

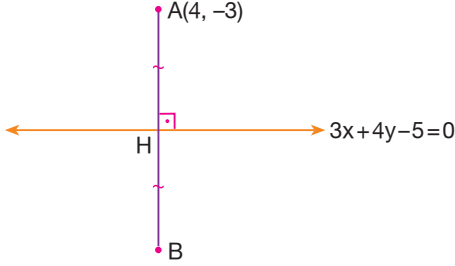
$$y - 4 = \frac{1}{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow 3y - x - 12 = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 4

$A(4, -3)$ noktasının $3x + 4y - 5 = 0$ doğrusuna göre yansıması B noktasıdır.

Buna göre, $|AB|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM  :



$$|AH| = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow |AH| = 1 \text{ birim}$$

Dolayısıyla, $|AB| = 2|AH| = 2 \text{ birim}$ bulunur.



Tac Mahal

ÖRNEK - 5

$3x + 2y - 5 = 0$ doğrusunun $y - 3 = 0$ doğrusuna göre, simetriği olan doğrunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM  :

$3x + 2y - 5 = 0$ doğrusu üzerinde alınan temsili bir $A(x, y)$ noktasının $y = 3$ doğrusuna göre simetriği $A(x, 6 - y)$ olduğundan,

$3x + 2y - 5 = 0$ doğrusunun $y = 3$ doğrusuna göre simetriği,

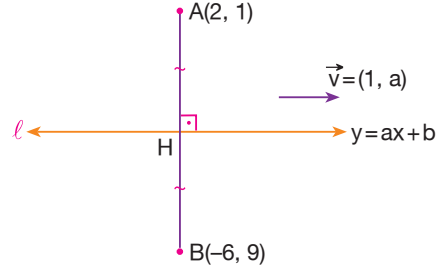
$$3x + 2 \cdot (6 - y) - 5 = 0$$

$$3x - 2y + 7 = 0 \text{ doğrusudur.}$$

ÖRNEK - 6

$A(2, 1)$ noktasının $y = ax + b$ doğrusuna göre simetriği olan nokta $B(-6, 9)$ olduğuna göre, $a \cdot b$ çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM  :



ℓ doğrusunun bir doğrultman vektörü $\vec{v} = (1, a)$ dir.

$\overrightarrow{AB} \perp \vec{v}$ olduğundan, $\langle \overrightarrow{AB}, \vec{v} \rangle = 0$ dir.

$$\overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-8, 8) \text{ olur.}$$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \vec{v} \rangle = 1(-8) + a \cdot 8$$

$$-8 + 8a = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ olup}$$

H noktası A ile B nin orta noktası olduğundan,

$$H\left(\frac{2-6}{2}, \frac{1+9}{2}\right) \text{ yani } H(-2, 5) \text{ dir.}$$

H noktası doğru denkleminde yerine yazılırsa,

$$5 = -2 + b \Rightarrow b = 7 \text{ olur.}$$

Böylece, $a \cdot b = 7$ bulunur.

ÖRNEK - 7

$5x + 4y = 5$ doğrusunun $x + 1 = 0$ doğrusuna göre yansıması olan doğrunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM  :

$5x + 4y = 5$ doğrusu üzerinde alınan bir $A(x, y)$ noktasının $x = -1$ doğrusuna göre yansıması

$$A'(-2 - x, y) \text{ olduğundan,}$$

$5x + 4y = 5$ doğrusunun $x = -1$ doğrusuna göre yansıması $5(-2 - x) + 4y = 5$

$$5x - 4y + 15 = 0 \text{ doğrusudur.}$$

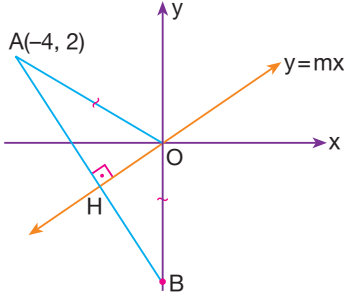
ÖRNEK - 8

A(-4, 2) noktasının $y = mx$ doğrusuna göre simetriği y eksenindeki B noktasıdır.

Buna göre, B noktasının ordinatını bulalım.

ÇÖZÜM  :

I. Durum : $m > 0$ olsun.



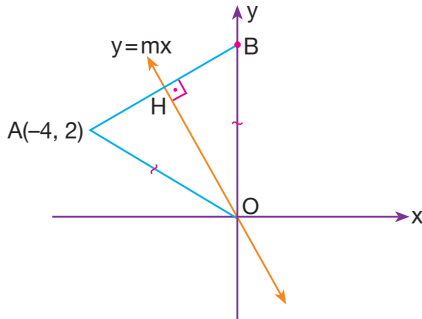
$|AH| = |HB|$ ve $[AB] \perp HO$ olduğundan,

$|AO| = |OB|$ dir.

$$|AO| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} \Rightarrow |AO| = 2\sqrt{5} \text{ birim}$$

O halde, B noktasının ordinatı $-2\sqrt{5}$ olabilir.

II. Durum : $m < 0$ olsun.

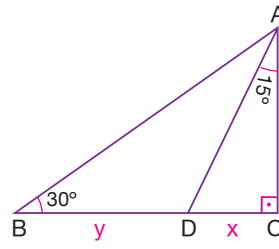


Bu durumda,

$|AH| = |HB|$ ve $[OH] \perp [AB]$ olduğundan,

B noktasının ordinatı $2\sqrt{5}$ olur.

ÖRNEK - 9



ABC dik üçgen

$$|BD| = y$$

$$|DC| = x$$

$$m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$$

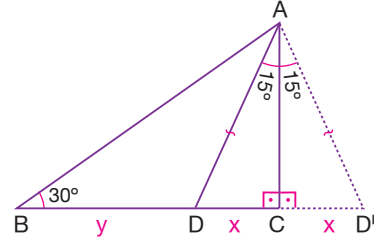
$$m(\widehat{DAC}) = 15^\circ$$

$$2x + y = 8 \text{ birim}$$

Buna göre, ABC üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM  :

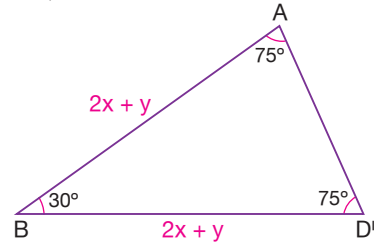
$[AD]$ nın $[AC]$ na göre yansımaları alalım.



Yansıma dönüşümü altında uzunluklar ve açılar aynı kaldığından, $|AD| = |AD'|$, $|DC| = |CD'|$ ve

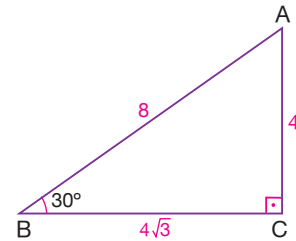
$$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CAD'}) = 15^\circ \text{ olmalıdır.}$$

Böylece,



ABD' ikizkenar üçgeni elde edilir.

O halde, $|AB| = 8$ birim olur.



$$A(\widehat{ABC}) = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 10

Analitik düzlemin IV. bölgesindeki bir noktanın orijine göre simetriği olan nokta B, B noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği olan nokta C dir.

Buna göre, C noktasının hangi bölgede olduğunu bulalım.

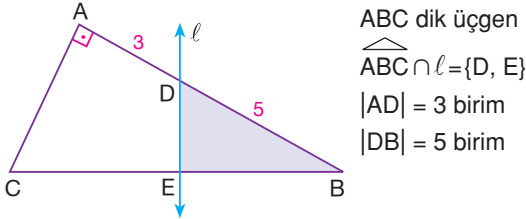
ÇÖZÜM :

$A(a, b)$ olsun. O halde $(a > 0 \text{ ve } b < 0 \text{ dir.})$

(a, b) noktasının orijine göre simetriği, $B(-a, -b)$ ve $B(-a, -b)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği, $C(b, a)$ noktasıdır.

$a > 0 \text{ ve } b < 0$ olduğundan C noktası II. bölgededir.

ÖRNEK - 11

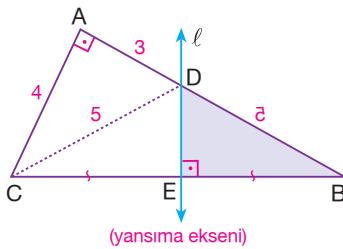


Yukarıda B ve C noktaları l doğrusuna göre simetrik noktalar olduğuna göre, BDE üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

Yansıma dönüşümü uzunlukları ve açıları koruduğundan,

$|BE| = |EC|$ ve $\widehat{m}(\widehat{DEB}) = \widehat{m}(\widehat{DEC}) = 90^\circ$ olmalıdır.



Böylece $|BD| = |DC| = 5$ birim olup.

Pisagor bağıntısı ile $|AC|$ uzunluğu 4 birim bulunur.

$$\widehat{A}(\widehat{BDC}) = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \text{ br}^2 \text{ olup}$$

$$\widehat{A}(\widehat{BDE}) = 5 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 12

Bir noktanın bir doğruya göre simetriğini vektörel olarak ifade edelim.

ÇÖZÜM :

$A(x_0, y_0)$ noktasının $y = mx + n$ doğrusuna göre simetriğini bulalım.

$y = mx + n$ doğrusu üzerindeki bir nokta $T(p, r)$ olsun. O halde doğrunun vektörel denklemi,

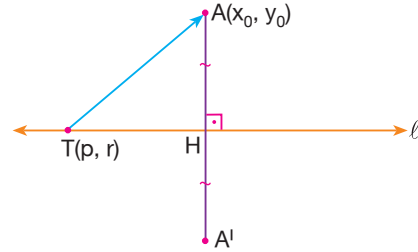
$$(x, y) = (p, r) + k(1, m) \text{ olur.}$$

Hatırlayalım, $(x, y) = (p, r) + k(1, m)$ denkleminde,

$(p, r) \Rightarrow$ doğru üzerinde bir nokta ve

$\vec{d} = (1, m) \Rightarrow$ doğrunun bir doğrultman vektörü idi.

Şimdi soruyu vektörel olarak düşünelim.



$A' = 2H - A$ olduğundan H noktasını bulmamız yeterli olacaktır.

$|\vec{TH}| : \vec{TA}$ nın l üzerindeki izdüşüm uzunluğudur.

$\vec{TH} : \vec{TA}$ nın l üzerindeki izdüşüm vektörüdür.

$\vec{TA} = (x_0 - p, y_0 - r)$ ve $\vec{d} = (1, m)$ olup

$$\vec{TH} = \frac{\langle \vec{TA}, \vec{d} \rangle}{\langle \vec{d}, \vec{d} \rangle} \cdot \vec{d} \Rightarrow H - T = \frac{\langle \vec{TA}, \vec{d} \rangle}{\langle \vec{d}, \vec{d} \rangle} \cdot \vec{d}$$

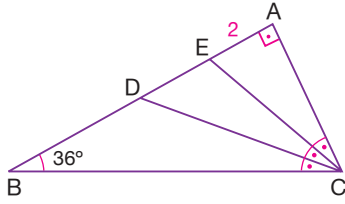
$$H = T + \frac{\langle \vec{TA}, \vec{d} \rangle}{\langle \vec{d}, \vec{d} \rangle} \cdot \vec{d} \text{ ifadesi}$$

$A' = 2H - A$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$A' = 2 \left(T + \frac{\langle \vec{TA}, \vec{d} \rangle}{\langle \vec{d}, \vec{d} \rangle} \cdot \vec{d} \right) - A$$

$$A' = 2T - A + 2 \cdot \frac{\langle \vec{TA}, \vec{d} \rangle}{\langle \vec{d}, \vec{d} \rangle} \cdot \vec{d} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 13



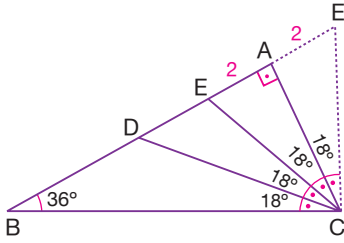
ABC dik üçgen
 $m(\widehat{ABC}) = 36^\circ$
 $|AE| = 2$ birim

$$m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{ECD}) = m(\widehat{DCB})$$

Buna göre, $|BD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

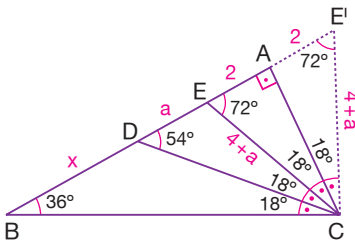
$[EC]$ nin $[AC]$ na göre yansımasını alalım.



Yansıma dönüşümü altında uzunluklar ve açılar aynı kaldığından, $|CE| = |CE'|$, $|EA| = |AE'| = 2$ birim ve

$$m(\widehat{ECA}) = m(\widehat{ACE'}) = 18^\circ \text{ olmalıdır.}$$

Böylece gerekli açılar yazılırsa,



$|DE| = a$ diyelim.

O halde,

$$m(\widehat{E'DC}) = m(\widehat{E'CD}) = 54^\circ \text{ olduğundan,}$$

$$|E'D| = |E'C| = 4 + a \text{ ve}$$

$$m(\widehat{E'EC}) = m(\widehat{CE'E}) = 72^\circ \text{ olduğundan,}$$

$$|E'C| = |EC| = 4 + a \text{ ve}$$

$$m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{ECB}) = 36^\circ \text{ olduğundan,}$$

$$|EB| = |EC| \text{ olup } x + a = 4 + a \text{ eşitliğinden,}$$

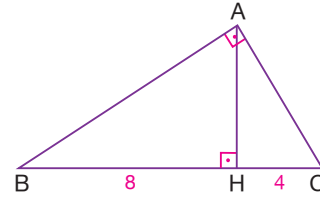
$$|BD| = x = 4 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 14

Bir ABC dik üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ ve $[AH] \perp [BC]$ olacak şekilde $H \in [BC]$ alınıyor.

$|BH| = 8$ birim, $|HC| = 4$ birim ve A noktasının $[BC]$ na göre simetriği A' olduğuna göre, $|AA'|$ uzunluğunu bulalım.

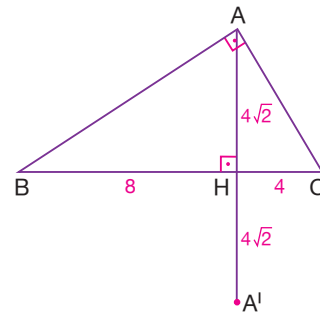
ÇÖZÜM



ABC dik üçgeninde Öklid bağıntısı ile

$$|AH|^2 = 8 \cdot 4 \Rightarrow |AH| = 4\sqrt{2} \text{ birim}$$

A noktasının $[BC]$ na göre simetriği A' ise



$$|AA'| = 2 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ birim bulunur.}$$

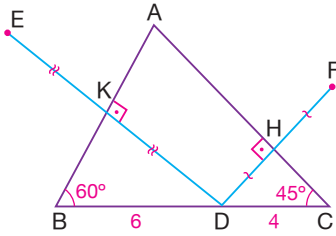
ÖRNEK - 15

Bir $\triangle ABC$ nde $|BD| = 6$ birim ve $|DC| = 4$ birim olacak şekilde $D \in [BC]$ alınıyor.

$$m(\widehat{ABC}) = 60^\circ \text{ ve } m(\widehat{ACB}) = 45^\circ \text{ dir.}$$

D noktasının $[AB]$ na göre simetriği E noktası ve D noktasının $[AC]$ na göre simetriği F noktası ise $|DE| + |DF|$ toplamını bulalım.

ÇÖZÜM

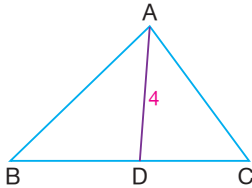


$$\triangle BDK \text{ nde } |DK| = 3\sqrt{3} \text{ birim} \Rightarrow |DE| = 6\sqrt{3} \text{ birim}$$

$$\triangle DHF \text{ nde } |DH| = 2\sqrt{2} \text{ birim} \Rightarrow |DF| = 4\sqrt{2} \text{ birim}$$

$$|DE| + |DF| = 6\sqrt{3} + 4\sqrt{2} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 16



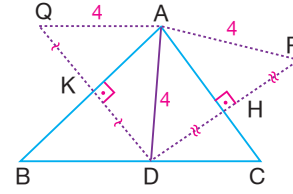
ABC üçgen
 $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$
 $|AD| = 4$ birim

Buna göre,

D noktasına $[AC]$ na göre simetriği P
D noktasına $[AB]$ na göre simetriği Q

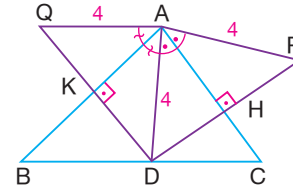
PQ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



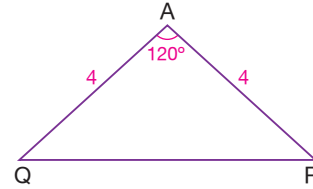
D noktasının $[AC]$ na göre simetriği P ise
 $|DH| = |HP|$ ve $[AC] \perp [DP]$ olup

$$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CAP}) \text{ dir.}$$



D noktasının $[AB]$ na göre simetriği Q ise
 $|DK| = |KQ|$, $[AB] \perp [DQ]$ ve $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{BAQ})$ dir.

$$\text{O halde, } m(\widehat{BAC}) = 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{QAP}) = 120^\circ \text{ dir.}$$



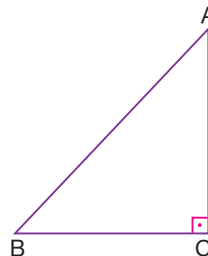
Böylece, $|QP| = 4\sqrt{3}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 17

Bir ikizkenar üçgende tepeden tabana çizilen yüksekliğin hem açıortay hem de kenarortay olacağını dönüşüm geometrisinden yararlanarak gösterelim.

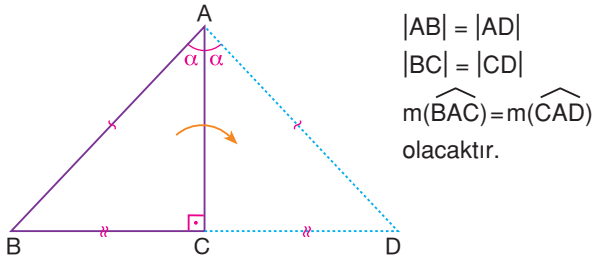
ÇÖZÜM

Herhangi bir dik üçgen çizelim.



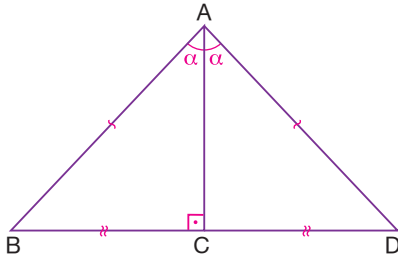
Yandaki dik üçgenin $[AC]$ na göre yansımasını (simetriğini) alalım.

Bu durumda bu dönüşümde,

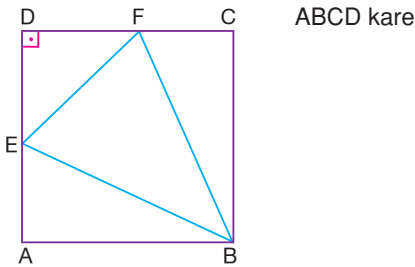


Elde edilen $\triangle ABD$ ikizkenar üçgen olup

$[AC]$ nın hem açıortay hem de kenarortay olduğu kanıtlanmıştır.



ÖRNEK - 18



ABCD kare

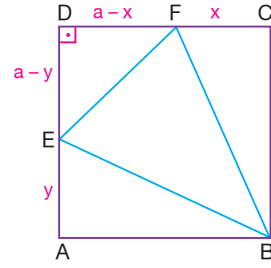
$\widehat{\angle DEF} = |DC| + |DA|$ olduğuna göre, EBF açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

Karenin bir kenar uzunluğuna a diyelim.

$|FC| = x$ dersek $|DF| = a - x$ ve

$|AE| = y$ dersek $|DE| = a - y$ olup

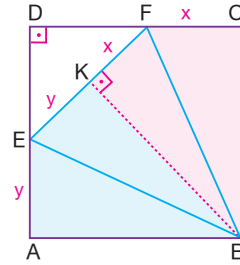


$\widehat{\angle DEF} = |DC| + |DA| = 2a$ (verilmiş)

O halde, $|EF| = x + y$ dir.

$|EK| = y$ ve $|KF| = x$ olacak şekilde

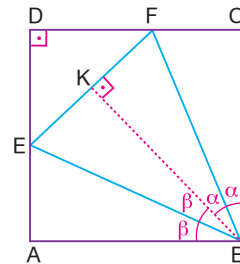
$K \in [EF]$ seçelim.



Böylece $[FB]$ doğru parçası CFB ve KFB üçgenlerinin yansıma eksenini ve aynı şekilde $[EB]$ doğru parçasında ABE ve KBE üçgenlerinin yansıma eksenidir.

Bu durumda $[FB]$ ve $[EB]$ nın açıortay olduğu görülür.

Böylece,



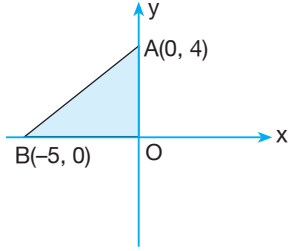
$2\alpha + 2\beta = 90^\circ$ eşitliğinden

$\alpha + \beta = m(\widehat{EBF}) = 45^\circ$ bulunur.

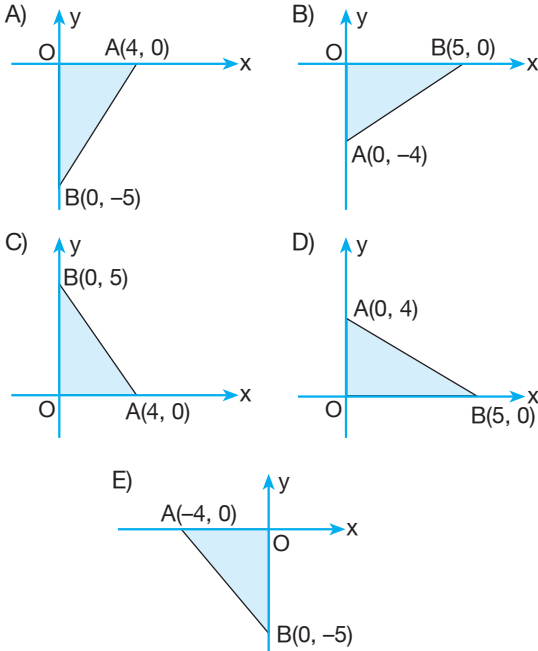
1. Dik koordinat sisteminde $A(4, -6)$ noktasının $\vec{v} = (-3, 4)$ doğrultusundaki ötelenmişi B noktası olduğuna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

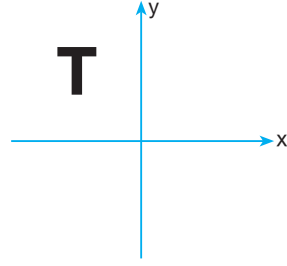
2.



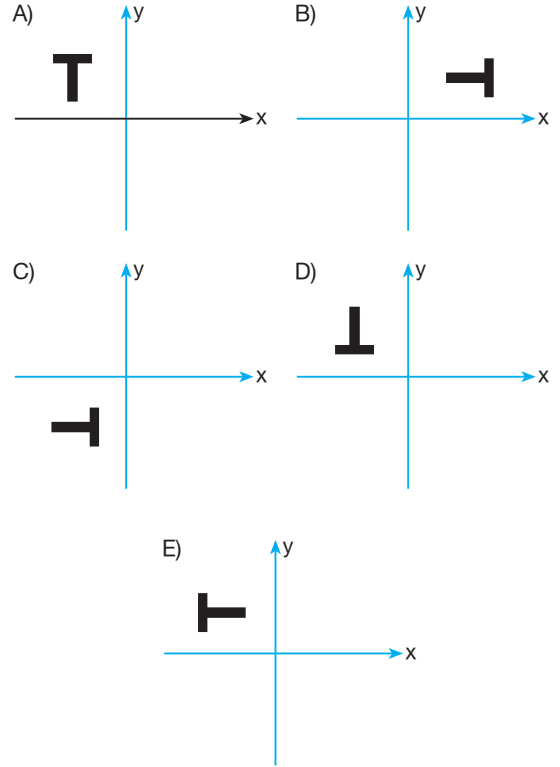
AOB üçgeninin orijin etrafında saatin tersi yönde 270° döndürülmesi ile elde edilen üçgen aşağıdakilerden hangisidir?



3.



Yukarıdaki şekilde kalıp harf önce x eksenine göre simetriği alınıp, sonra saat yönünde 90° döndürülürse hangi şekli alır?



4. Dik koordinat sisteminde $A(-5, 6)$ noktasının orijin etrafında 180° döndürülmesi ile elde edilen noktanın $\vec{u} = (4, 3)$ doğrultusundaki ötelenmişi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (9, 3) B) (9, -3) C) (3, 9)
D) (6, 3) E) (7, 4)

5. $A(a, b)$ noktasının $\vec{v} = (3, 5)$ doğrultusunda ötelenmişi $B(-2, 4)$ olduğuna göre, A noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1, 5)$ B) $(3, 5)$ C) $(-2, -5)$
D) $(2, -5)$ E) $(-5, -1)$

6. Dik koordinat sisteminde A noktasının $\vec{v} = (2, 3)$ doğrultusunda ötelenmesi ile elde edilen nokta B olsun.

Buna göre, $\langle \vec{AB}, \vec{v} \rangle$ çarpımı kaçtır?

A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

7. Dik koordinat sisteminde $A(6, 4)$ noktasının orijin etrafında 45° döndürülmesi ile elde edilen noktanın koordinatları çarpımı kaçtır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

8. Dik koordinat düzleminde $A(-6, 5)$ noktasının orijin etrafında 90° döndürülmesi ile elde edilen nokta aşağıdakilerden hangisidir?

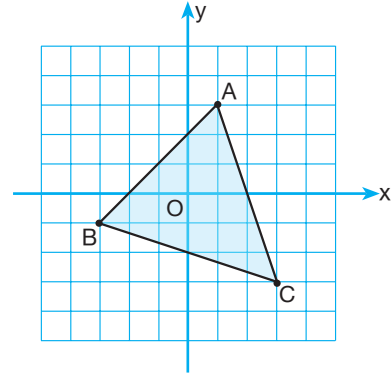
A) $(5, 6)$ B) $(6, 5)$ C) $(-5, -4)$
D) $(-5, -6)$ E) $(-4, 5)$

9. Dik koordinat sisteminde $A(3, 4)$, $B(-2, 5)$, $C(6, 1)$ noktaları veriliyor.

Buna göre, A noktasının $\vec{BC}$ doğrultusundaki ötelenmişi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(11, 0)$ B) $(7, 4)$ C) $(7, 3)$
D) $(-7, 0)$ E) $(4, 11)$

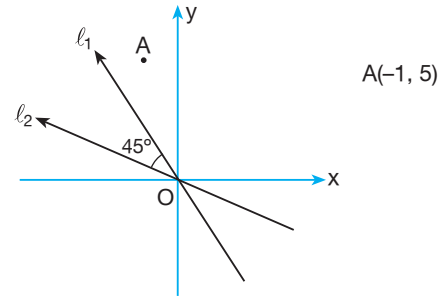
10.



Yukarıdaki zeminde ABC üçgenini 1. bölgeye taşımak için en az aşağıdaki ötelemelerden hangisi yapılmalıdır?

A) $(2, -1)$ B) $(3, -1)$ C) $(4, 4)$
D) $(4, 6)$ E) $(4, 2)$

11.



A noktasının ℓ_1 doğrusuna göre yansıması olan noktanın ℓ_2 doğrusuna göre simetriği olan nokta aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1, -5)$ B) $(-5, -1)$ C) $(-\sqrt{26}, -1)$
D) $(-1, -\sqrt{26})$ E) $(-6, 0)$

1.

(c, 1)	orijine göre yansıması	(2, f)
(-2, b)	x eksenine göre yansıması	(e, 5)
(a, 3)	y eksenine göre yansıması	(-4, d)

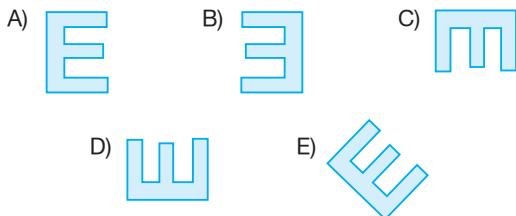
Yukarıdaki tabloya göre, $2a - b \cdot c - 2d + 2f$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) -12 B) -10 C) -5 D) 7 E) 9

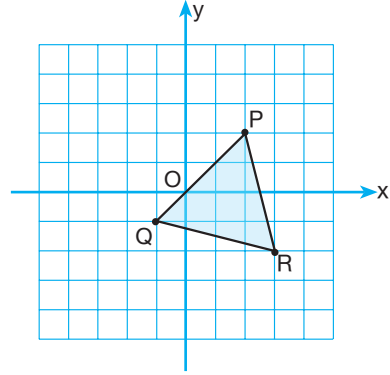
2. A(6, 7) noktası hangi nokta etrafında 180° döndürülürse B(-4, 3) noktası elde edilir?

- A) (2, 3) B) (2, 0) C) (1, 5)
D) (3, -2) E) (2, -5)

3. Yandaki şekil saatin ters yönünde 57 kez 90° lik dönme hareketi yaparsa aşağıdaki şekillerden hangisine dönüşür?



4.

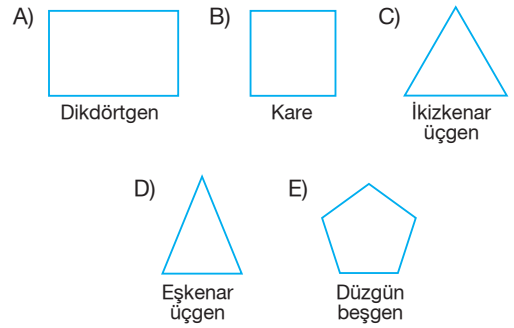


Yukarıdaki şekilde PQR üçgeninin y eksenine göre yansıması sonucunda P'Q'R' üçgeni oluşmuştur.

Buna göre, Q' noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

- A) 0 B) -3 C) -5 D) 5 E) 3

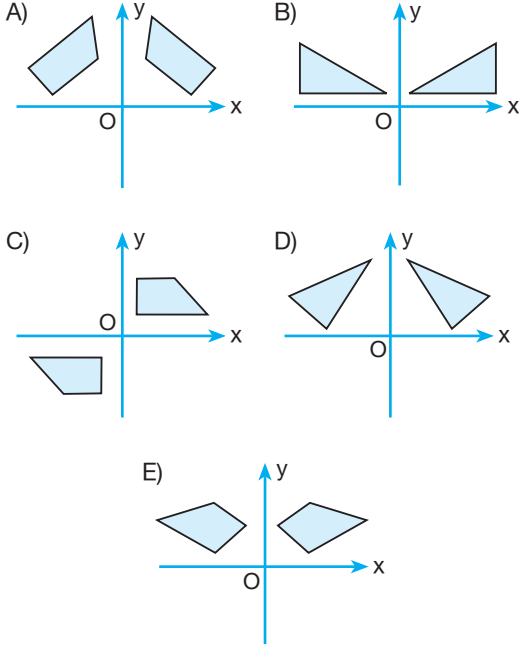
5. Aşağıdaki şekillerden hangisinin simetri eksen sayısı en fazladır?



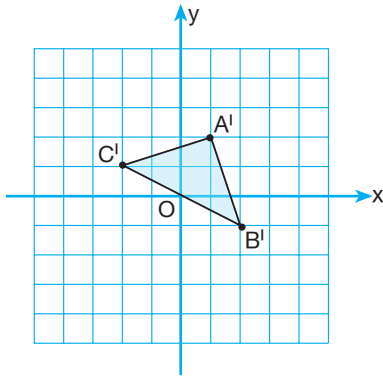
6. Eşkenar üçgenin simetri eksen sayısının düzgün beşgenin simetri eksen sayısına oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) 1

7. Aşağıdakilerden hangisinde şeklin y eksenine göre yansıması yanlış verilmiştir?



8.



Yukarıdaki şekilde orijine göre yansıması alınmış üçgenin köşe noktalarının koordinatları verilmiştir.

Buna göre, üçgenin yansımadan önceki köşe noktaları aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $A(-1, -2)$, $B(-2, -1)$, $C(2, 1)$
- B) $A(-1, -2)$, $B(-2, 1)$, $C(2, -1)$
- C) $A(-1, -2)$, $B(-2, -1)$, $C(-2, 1)$
- D) $A(1, -2)$, $B(-2, 1)$, $C(2, -1)$
- E) $A(-1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(2, -1)$

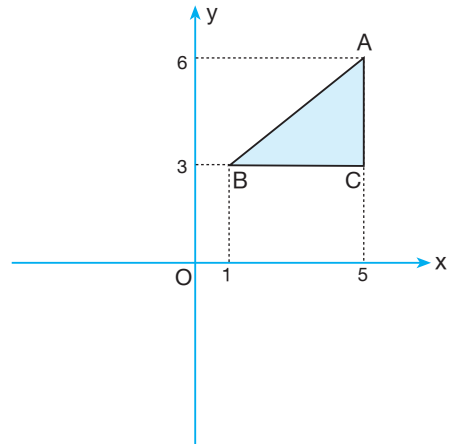
9.

ABC üçgeninin köşe noktalarının koordinatları	ABC üçgeninin x eksenine göre yansıması ile oluşan A'B'C' üçgeninin köşe noktalarının koordinatları
$A(0, -3)$	$A'(0, c)$
$B(a, b)$	$B'(-2, 4)$
$C(0, -5)$	$C'(0, d)$

Yukarıdaki tabloya göre, $a \cdot c - b \cdot d$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) -26 B) -14 C) 14 D) 26 E) 28

10.



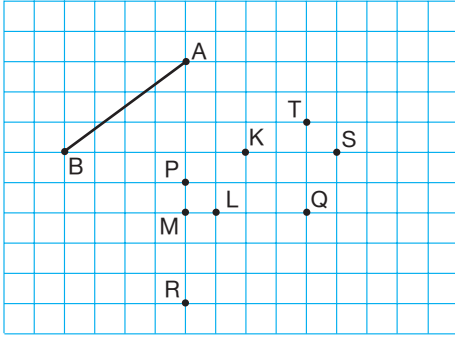
Yukarıdaki dik koordinat sisteminde verilen ABC üçgeninin y eksenine göre yansıması alınıyor ve A ile A', B ile B', C ile C' simetrik nokta çiftleri olacak şekilde A'B'C' üçgeni elde ediliyor.

Elde edilen bu üçgen B' noktası etrafında saatin tersi yönde 90° döndürülüyor.

Bu dönme sonucunda A' noktasına karşılık gelen A'' noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-4, -1)$ B) $(-5, -1)$ C) $(-4, -2)$
- D) $(-3, -4)$ E) $(-3, -5)$

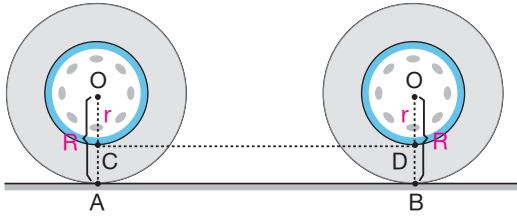
1.



Yukarıdaki zeminde [AB] nin P noktasına göre simetriği olan doğru parçası aşağıdakilerden hangisidir?

- A) [SL] B) [QR] C) [TM]
D) [KR] E) [QM]

2.



A noktasında bulunan ve birbirine yapışık olan iki tekerlek bir tur atarak B noktasına geliyor.

Böylece büyük tekerlek ile küçük tekerlek eşit $|AB|$ ve $|CD|$ mesafelerini almıştır.

O halde,

$$|AB| = 2\pi R, |CD| = 2\pi r \text{ olup}$$

$$|AB| = |CD| \text{ olduğundan,}$$

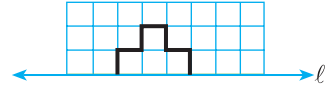
$$2\pi R = 2\pi r \text{ ve } R = r \text{ bulunur.}$$

Yukarıda $R = r$ ilişkisi yanlış bir düşünce sonucunda bulunmuştur.

Bu yanlış düşüncenin sebebi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) İşlemlerde yanlışlık yapılmıştır.
B) Küçük tekerlek büyük tekerlektten daha az yol almıştır.
C) Tekerleklerin ötelemeli dönme yaptığı göz ardı edilmiştir.
D) $|AB| > |CD|$ olmalıydı.
E) Büyük tekerlek daha fazla tur atmıştır.

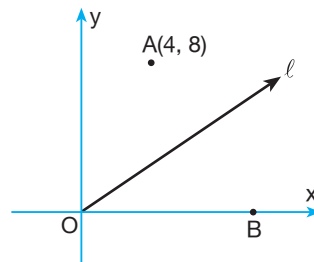
3.



Yukarıdaki şekli 4 birim sağa öteleyip l doğrusuna göre, yansımasını aldığımızda oluşan şekil aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- B)
- C)
- D)
- E)

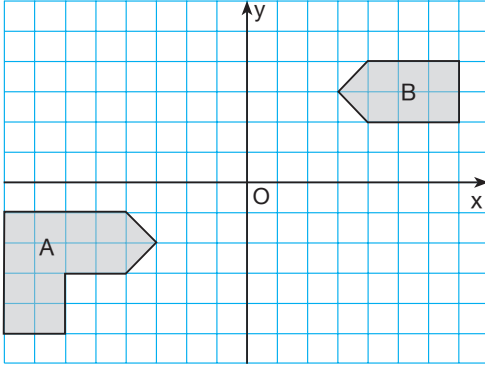
4.



Yukarıdaki analitik düzlemde $A(4, 8)$ noktasının l doğrusuna göre yansıması olan nokta B ise $|OB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $3\sqrt{2}$ B) $\sqrt{19}$ C) $4\sqrt{5}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{7}$

5.



Yukarıdaki şekilde A şekli 6 birim yukarı ötelenip y eksenine göre yansıtılıyor. B şekli ise 1 birim yukarı ve 2 birim sağa öteleniyor.

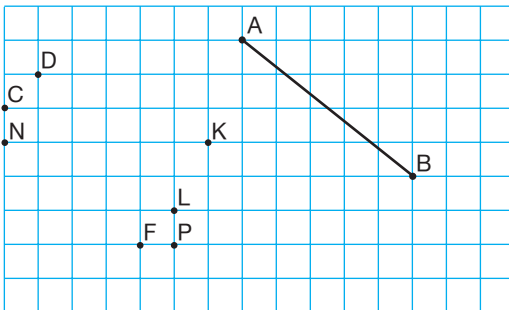
Son durumda A ve B şeklinin kaç br^2 lik alanları kesişir?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

6. A(5, 4), B(3, 8) olmak üzere [AB] hangi nokta etrafında 180° döndürülürse tekrar [AB] elde edilir?

- A) (4, 6) B) (3, 2) C) (-3, 2)
D) (2, -4) E) (-2, 4)

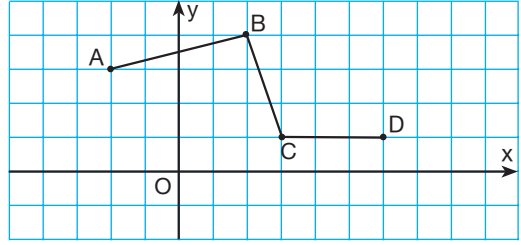
7.



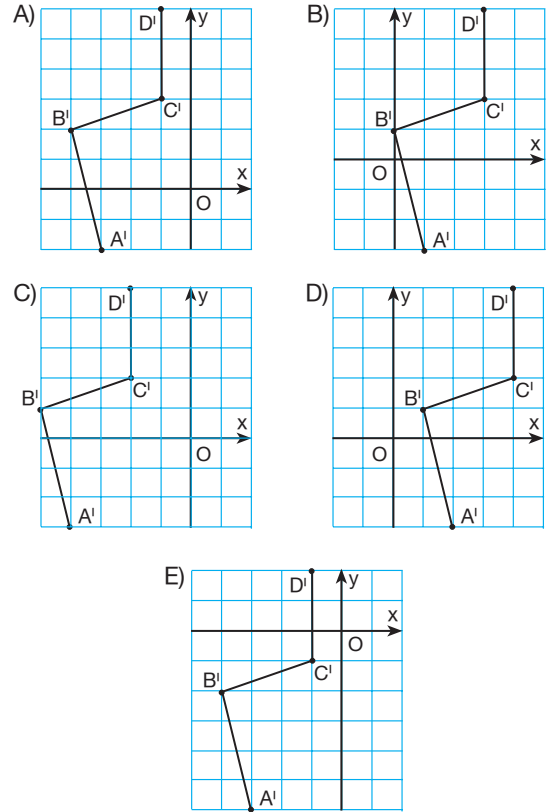
Yukarıdaki zeminde [AB] doğru parçasının K noktasına göre yansıması olan doğru parçası aşağıdakilerden hangisidir?

- A) [CL] B) [DF] C) [CP] D) [DP] E) [DL]

8.



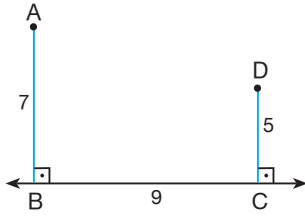
Yukarıdaki ABCD şeklinin orijin etrafında 90° döndürülmesi ile elde edilen şekil ($A'B'C'D'$) aşağıdakilerden hangisidir?



9. Analitik düzlemde A(4, -5) noktasının orijin etrafında saat yönünün tersi yönde 45° döndürülmesi ile elde edilen noktanın koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(4\cos 45^\circ - 4\sin 45^\circ, -5\sin 45^\circ - 2\cos 45^\circ)$
B) $(4\cos 45^\circ - 4\sin 45^\circ, 3\sin 45^\circ - 2\cos 45^\circ)$
C) $(3\cos 45^\circ - 2\sin 45^\circ, 3\sin 45^\circ + 2\cos 45^\circ)$
D) $(4\cos 45^\circ + 5\sin 45^\circ, 4\sin 45^\circ - 5\cos 45^\circ)$
E) $(3\cos 45^\circ + 4\sin 45^\circ, 3\cos 45^\circ + 5\cos 45^\circ)$

1.

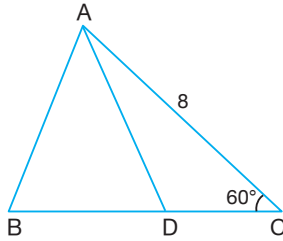


Şekilde
 $[AB] \perp [BC]$
 $[DC] \perp [BC]$
 $|AB| = 7$ birim
 $|DC| = 5$ birim
 $|BC| = 9$ birim

Buna göre, D noktasının $[BC]$ na göre simetriği D' olduğuna göre, $|AD'|$ kaç birimdir?

- A) 20 B) 17 C) 16 D) 15 E) 14

2.

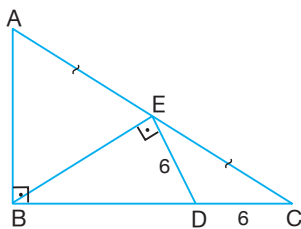


ABC üçgen
 $m(\widehat{ACB}) = 60^\circ$
 $|AC| = 8$ birim

Buna göre, A noktasının $[BC]$ na göre simetriği A' olduğuna göre, $|AA'|$ kaç birimdir?

- A) $10\sqrt{3}$ B) $9\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{3}$
 D) $7\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

3.

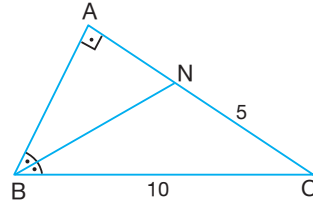


ABC dik üçgen
 $[AB] \perp [BC]$
 $[BE] \perp [ED]$
 $|ED| = |DC|$
 $|AE| = |EC|$
 $|ED| = 6$ birim

Buna göre, E noktasının $[BC]$ na göre simetriği E' olduğuna göre, $|EE'|$ kaç birimdir?

- A) $7\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{3}$
 D) $4\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

4.

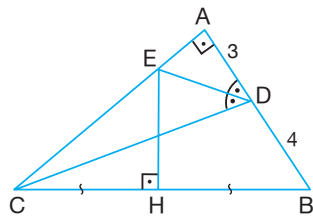


ABC dik üçgen
 $[AB] \perp [AC]$
 $[BN]$ açıortay
 $|NC| = 5$ birim
 $|BC| = 10$ birim

Buna göre, N noktasının $[AB]$ na göre simetriği N' olduğuna göre, $|NN'|$ kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

5.

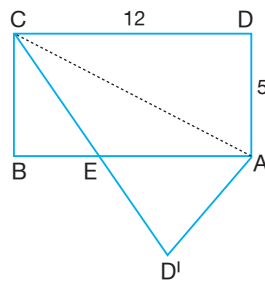


ABC dik üçgen
 $[AB] \perp [AC]$
 $[EH] \perp [BC]$
 $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{EDC})$
 $|BH| = |HC|$
 $|AD| = 3$ birim
 $|DB| = 4$ birim

Buna göre, D noktasının $[AC]$ na göre simetriği D' olduğuna göre, $|CD'|$ kaç birimdir?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

6.

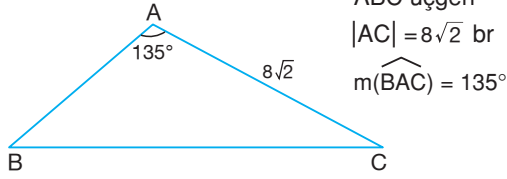


ABCD dikdörtgen
 $[AC]$ köşegen
 $|DC| = 12$ birim
 $|AD| = 5$ birim

DAC üçgeninin $[AC]$ na göre simetriği ACD' üçgeni olduğuna göre, $|CE|$ kaç birimdir?

- A) $\frac{165}{24}$ B) $\frac{167}{24}$ C) $\frac{169}{24}$
 D) $\frac{171}{24}$ E) $\frac{173}{24}$

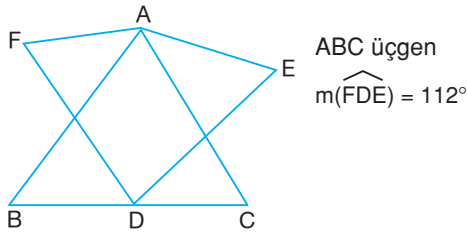
7.



Buna göre, C noktasının $[AB]$ na göre simetriği C' olduğuna göre, $|CC'|$ kaç birimdir?

- A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

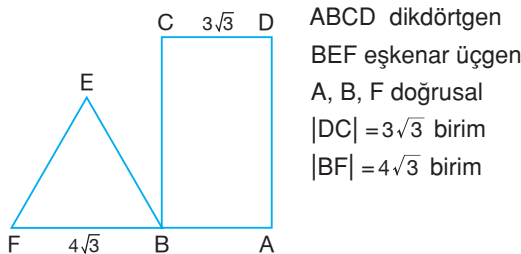
8. D noktasının $[AC]$ na göre simetriği E, D noktasının $[AB]$ na göre simetriği F dir.



Buna göre, $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

- A) 68 B) 70 C) 72 D) 74 E) 76

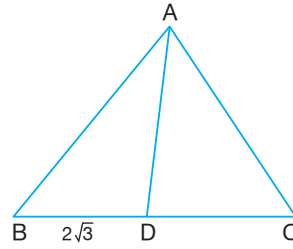
9.



Buna göre, E noktasının $[BC]$ na göre simetriği E' olduğuna göre, E' noktasının $[AD]$ na uzaklığı kaç birimdir?

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

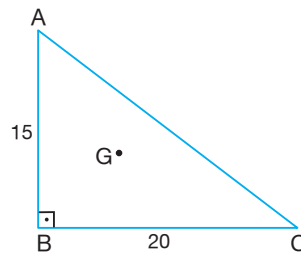
10.



Buna göre, D nin $[AB]$ na göre simetriği D' olduğuna göre, $|DD'|$ kaç birimdir?

- A) 6 B) $\sqrt{38}$ C) $2\sqrt{10}$
 D) $2\sqrt{11}$ E) $4\sqrt{3}$

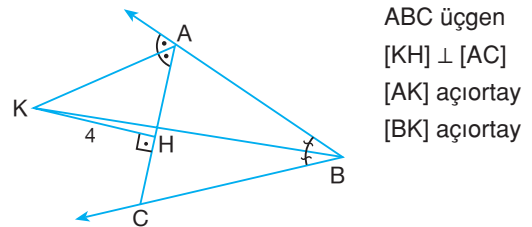
11.



Buna göre, G noktasının $[AC]$ na göre simetriği G' olduğuna göre, $|GG'|$ kaç birimdir?

- A) $\frac{16}{5}$ B) $\frac{18}{5}$ C) 4 D) $\frac{32}{5}$ E) 8

12.



K noktasının $[BC]$ na göre simetriği K' olduğuna göre, $|KK'|$ kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8



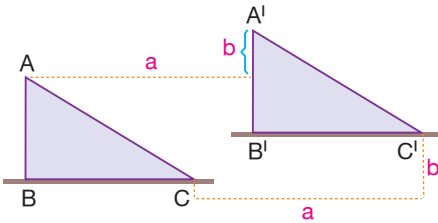
ŞERİT SÜSLEME

Bir motifin bir doğrultu boyunca ötelenmesi ile oluşan süslemelere şerit süslemeleri denir.

- Öteleme
- Ötelemeli yansıma
- Yatay yansıma
- Dikey yansıma
- 180° lik dönme (yarım dönme)

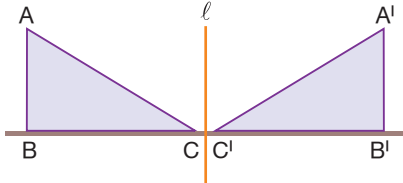
dönüşümlerinden biri kullanılarak süsleme yapılabilir.

Öteleme :



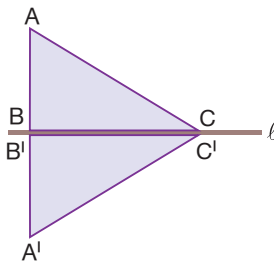
$A'B'C'$ üçgeni ABC üçgeninin a birim sağa ($\rightarrow$), b birim yukarıya ($\uparrow$) ($\vec{v} = (a, b)$ doğrultusunda) ötelenmiştir.

Dikey Yansıma :



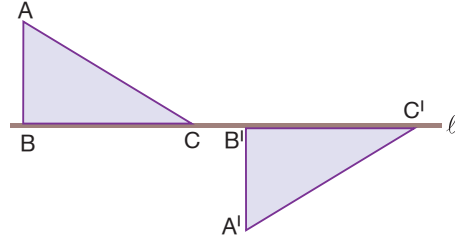
$A'B'C'$ üçgeni ABC üçgeninin l doğrusuna göre dikey yansımasıdır.

Yatay Yansıma :



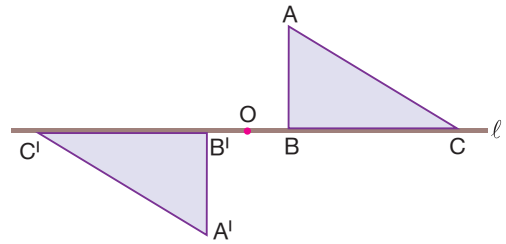
$A'B'C'$ üçgeni ABC üçgeninin l doğrusuna göre yatay yansımasıdır.

Ötelemeli Yansıma :



$A'B'C'$ üçgeni ABC üçgeninin l doğrusuna göre ötelemeli yansımasıdır.

180° lik dönme (Yarı dönme):



$A'B'C'$ üçgeni ABC üçgeninin O noktası etrafında 180° dönmüş halidir.

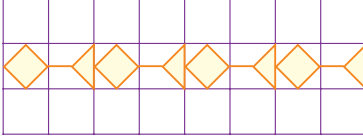
Aşağıda  resmi ile önce başlangıç motifi sonrada şerit süslemeleri oluşturulmuştur.

Uygulanan dönüşüm	Başlangıç motifi	Şerit süsleme
Öteleme		
Dikey yansıma		
Yatay yansıma		
Ötelemeli yansıma		
180° lik dönme		



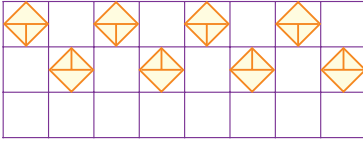
Öteleme İle Süsleme

Aşağıdaki şerit süsleme  motifinin ötelenmesi ile oluşturulmuştur.



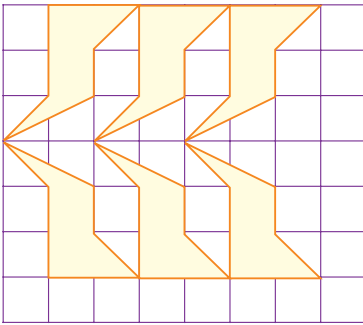
Ötelemeli Yansıma İle Süsleme

Aşağıdaki şerit süsleme  motifinin ötelemeli yansıması ile oluşturulmuştur.



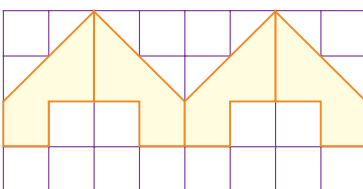
Yatay Yansıma İle Süsleme

Aşağıdaki şerit süsleme  motifinin yatay yansıması ile oluşturulmuştur.



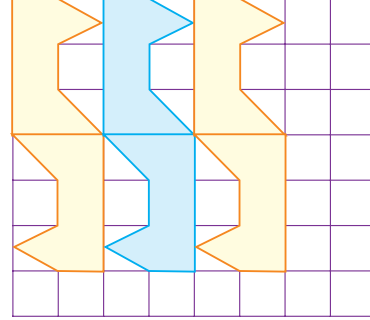
Dikey Yansıma İle Süsleme

Aşağıdaki şerit süsleme  motifinin dikey yansıması ile oluşturulmuştur.



Yarı Dönme (180° lik dönme) İle Süsleme

Aşağıdaki şerit süsleme  motifinin yarı dönmesi ile oluşturulmuştur.

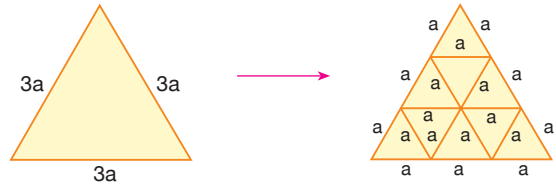


Düzlemde Kaplamalar

Düzlemde bir bölgenin bir motifle boşluk kalmayacak şekilde ve motifler çakışmayacak şekilde dönüşümler (yansıma, dönme, öteleme ve ötelemeli yansıma) yardımıyla örtülmesine düzgün kaplama denir.



motifini kullanarak aşağıdaki üçgeni düzgün kaplayalım.



Düzlemde bir bölgenin farklı motiflerle boşluk kalmayacak ve motifler çakışmayacak şekilde dönüşümler (yansıma, dönme, öteleme ve ötelemeli yansıma) yardımı ile örtülmesine yarı düzgün kaplama denir.

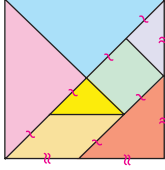
 Aşağıda dünyaca ünlü grafist ESHER'in kaplamaları üzerine yaptığı bir çalışma görülmektedir.



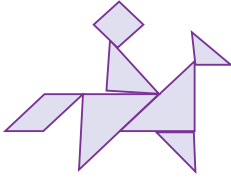


TANGRAM

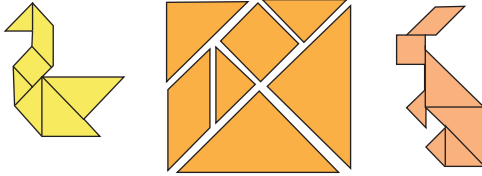
Geometrik biçimlerdeki yedi adet parçayı bir araya getirerek çeşitli şekiller oluşturma esasına dayalı yaratıcı bir zeka oyunudur.



Bu parçalar, farklı büyüklüklerdeki **beş adet üçgen, bir adet kare ve bir adet paralelkenardır.**



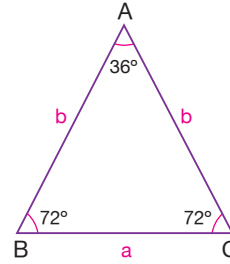
Amacımız geometrik bir şekil, hareket halindeki bir insan figürü, hayvan figürü, alfabedeki bir harf ya da benzeri bir şey olabilir. Hedef olarak belirlenen şekli oluşturabilmek için, yedi parçanın tamamını kullanmak gerekmektedir.



Altın Üçgen (Güzel Üçgen) :

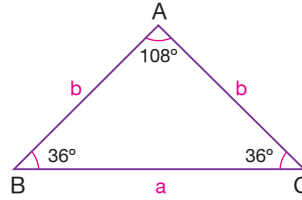
Açıları 36° , 72° , 72° olan bir ABC üçgeninde ikiz olan kenarlardan birinin uzunluğunun taban uzunluğuna oranı $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ dir.

Bu orana **altın oran** denir ve φ (phi) fi ile gösterilir.



$$\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Altın oran} \\ \text{ya da} \\ \text{Altın sayı} \end{array} \right)$$

YA DA

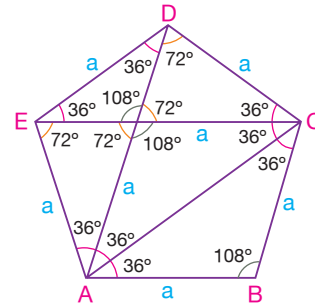


$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad (\text{Altın oran})$$

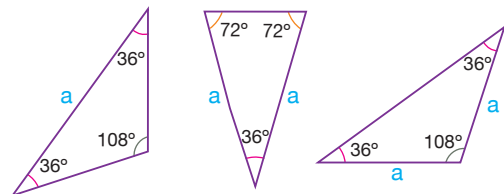
Altın orana sahip yukarıdaki üçgenlere **altın üçgen** denir.

Örneğin :

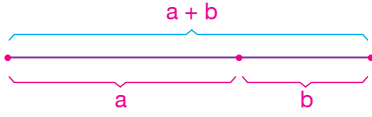
Aşağıda ABCDE düzgün beşgeninin altın üçgenlerle **yarı düzgün kaplaması** görülmektedir.



Kullanılan motifler aşağıdaki altın üçgenleridir.



👉 Aşağıdaki altın oran örneklerini inceleyiniz.



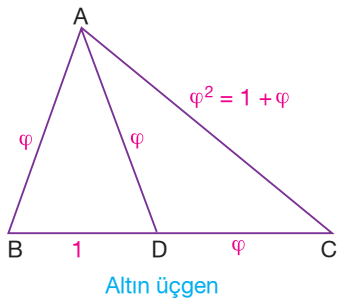
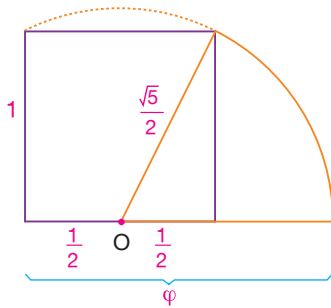
$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1,618... = \varphi$$



$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$



$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$



Fibonacci sayıları;

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

$$\frac{233}{144} = 1,618$$

$$\frac{987}{610} = 1,618$$

$$\frac{377}{233} = 1,618$$

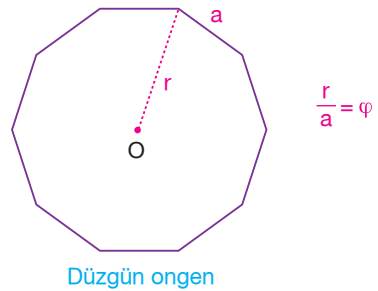
$$\frac{1597}{987} = 1,618$$

$$\frac{610}{377} = 1,618$$

$$\frac{2584}{1597} = 1,618$$



$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$



	Şerit süsleme	Dönüşüm
I.		Ötelemeli yansıma
II.		Öteleme
III.		Yatay yansıma
IV.		Dikey yansıma
V.		Yarı dönme

Yukarıdaki şerit süslemelerinin kaç tanesinde dönüşümler doğru olarak verilmiştir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. Aşağıdaki süslemelerden hangisinde sadece öteleme dönüşümü kullanılmıştır?

	Şerit süsleme
A)	
B)	
C)	
D)	
E)	

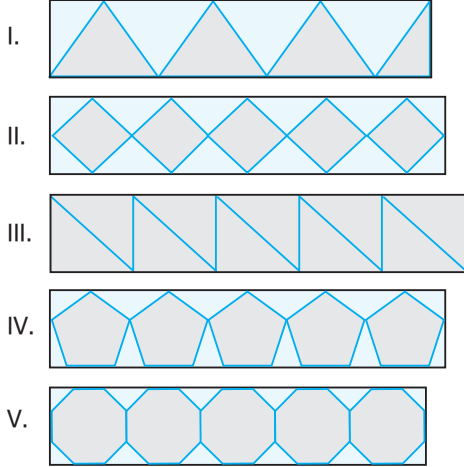
3. Aşağıdaki şerit süslemelerin hangisinde dikey yansıma kullanılmıştır?

	Şerit süsleme
A)	
B)	
C)	
D)	
E)	

4. Aşağıdaki şerit süslemelerin hangisinde dönüşümler doğru olarak verilmiştir?

	Şerit süsleme	Dönüşüm
A)		Yansıma
B)		Dikey yansıma
C)		Ötelemeli yansıma
D)		Yatay yansıma
E)		Yarı dönme

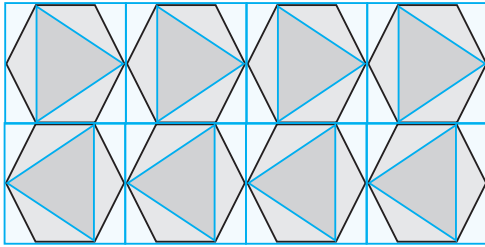
5.



Yukarıdaki kaplamaların kaç tanesi düzgün kaplamadır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

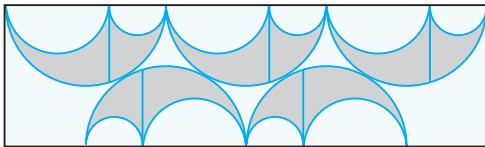
6.



Yukarıdaki yarı düzgün kaplamada kaç farklı çokgen kullanılmıştır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

7.

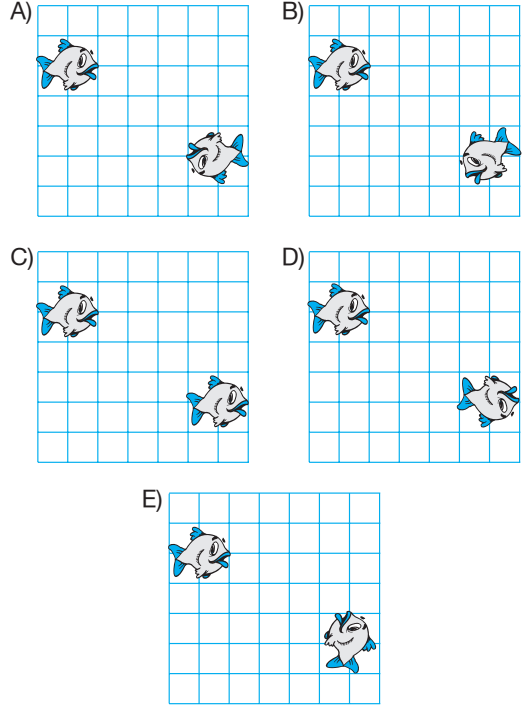


Yukarıdaki yarı düzgün kaplamada aşağıdaki dönüşümlerden kaç tanesi kullanılmıştır?

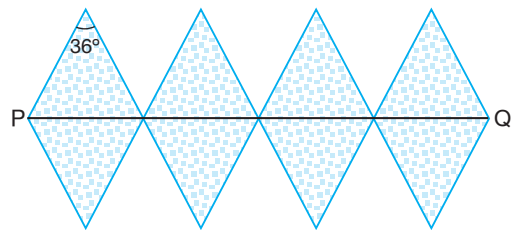
- I. Öteleme
II. Dikey yansıma
III. Yatay yansıma
IV. Ötelemeli yansıma
V. Yarı dönme

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8. Aşağıdakilerden hangisinde şekiller birbirinin ötelemeli yansımasıdır?



9.



Yukarıdaki şerit süslemenin başlangıç motifi tepe açısı 36° olan altın üçgendir.

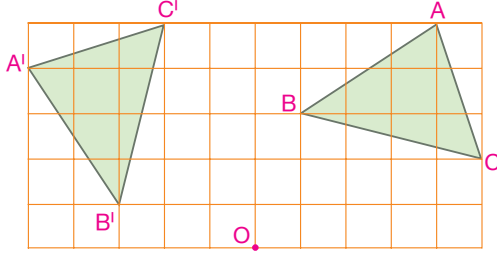
$|PQ| = 8$ birim olduğuna göre, şeklin çevre uzunluğu kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{5} + 2$ B) $2\sqrt{5} + 4$ C) $3\sqrt{5} + 4$
D) $16\sqrt{5} + 16$ E) $24\sqrt{5} + 18$

Eşlik

Düzlemde öteleme, dönme, yansıma ya da bunların birkaçının bir arada kullanılması ile yapılan dönüşümlere **izometri dönüşümleri** denir.

Bu dönüşümler sonucunda oluşan bir şekle bu şeklin simetrisi (eş) denir.



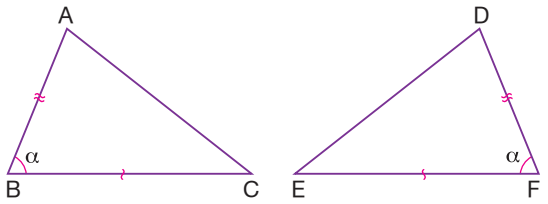
Yukarıdaki ABC üçgeninin orijin etrafında 90° dönürülmesi ile oluşan A'B'C' üçgenleri eş üçgenlerdir.



Kenar Açık Kenar Eşlik Aksiyomu

İki üçgen arasındaki yapılan birebir eşlemede karşılıklı kenarlar ve bu kenarların arasındaki açılar eş ise bu iki üçgene eş üçgenler denir.

Bu eşliğe kenar açı kenar (K.A.K.) **eşlik aksiyomu** denir.

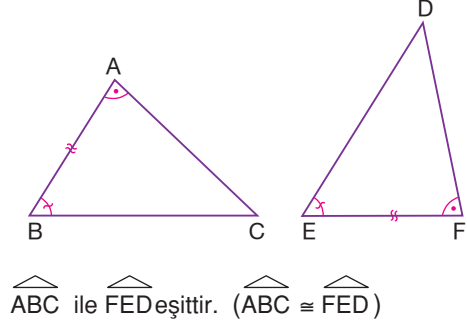


$|AB| = |DF|$, $|BC| = |EF|$ ve $m(\angle ABC) = m(\angle DFE)$ olduğundan üçgenler eştir.

Açık Kenar Açık Eşlik Teoremi

İki üçgen arasında yapılan birebir eşlemede bu üçgenlerin karşılıklı ikişer açıları ve bu açılardan ortak olan kenarları eş ise bu iki üçgen eştir.

Bu eşliğe açı kenar açı (A.K.A.) eşliği denir.

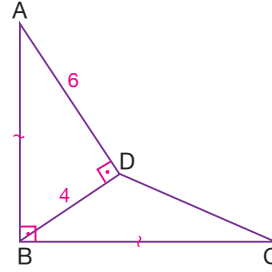


Kenar Kenar Kenar Eşlik Teoremi

İki üçgen arasında yapılan birebir eşlemede karşılıklı kenarlar eş ise, bu üçgenler eştir.

Bu eşliğe kenar kenar kenar (K.K.K.) eşliği denir.

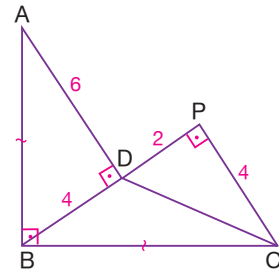
ÖRNEK - 1



$[AB] \perp [BC]$
 $[AD] \perp [DB]$
 $|AD| = 6$ birim
 $|BD| = 4$ birim
 $|AB| = |BC|$

Buna göre, $|DC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

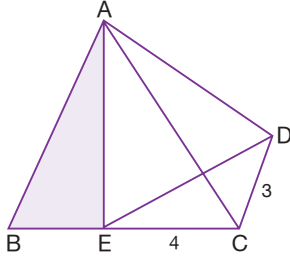


$|BD| = |PC|$ ve $[BP] \perp [PC]$ olacak şekilde P noktası belirleyip B, D, P doğrusalını oluşturalım. Böylece ADB ile BPC eş üçgenleri elde edilir. (A.K.A.)

Bu durumda $|BD| = |PC| = 4$ birim olup uzunluklar yerine yazılırsa

$|DC|$ uzunluğu Pisagor bağıntısı ile $2\sqrt{13}$ birim bulunur.

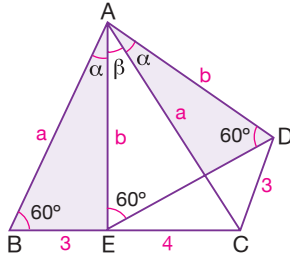
ÖRNEK - 2



ABC eşkenar üçgen
AED eşkenar üçgen
 $|DC| = 3$ birim
 $|EC| = 4$ birim

Buna göre, ABE üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM



$|AB| = a$ birim, $|AE| = b$ birim olsun.

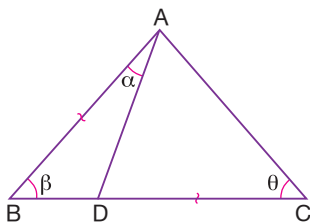
$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{CAD})$ olduğundan BAE ve CAD üçgenlerinin eş üçgenler olduğu görülür. (K.A.K)

Böylece $|CD| = |BE| = 3$ birim olur.

Dolayısıyla $a = 7$ birim olup

$$A(\widehat{BAE}) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

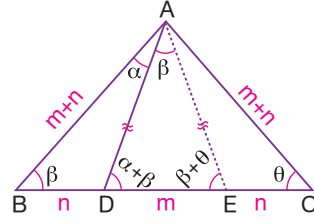
ÖRNEK - 3



ABC üçgen
 $|AB| = |DC|$
 $2\alpha + 3\beta = 180^\circ$

Buna göre, β nın θ cinsinden eşitini bulalım.

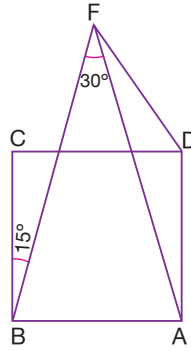
ÇÖZÜM



$|AD| = |AE|$ olacak şekilde $[DC]$ üzerinde E noktası belirleyelim. Bu durumda, hem ABE üçgeninin ikizkenar olduğu hem de ABD ile ACE üçgenlerinin eş olduğu görülür. (K.A.K)

Gerekli açılar yerlerine yazılırsa $\beta = \theta$ olur.

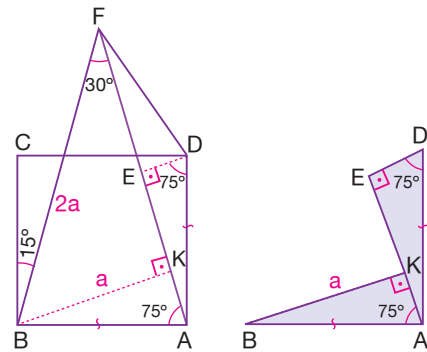
ÖRNEK - 4



ABCD kare
 $m(\widehat{AFB}) = 30^\circ$
 $m(\widehat{FBC}) = 15^\circ$

Buna göre, FDC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

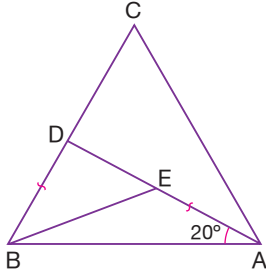


D ve B noktalarından $[AF]$ ye dikme indirildiğinde AKB ve DEA üçgenlerinin eş olduğu görülür. (K.A.K)

Böylece $|AE| = |EF| = a$ birim olup bu durum ADF üçgeninin ikizkenar olduğunu gösterir.

Dolayısıyla FDC açısının ölçüsü 60° bulunur.

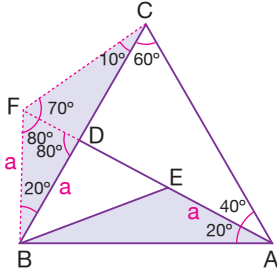
ÖRNEK - 5



ABC eşkenar üçgen
 $|AE| = |BD|$
 $m(\widehat{BAD}) = 20^\circ$

Buna göre, EBC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM



$|AE| = |BD| = a$ birim olsun.

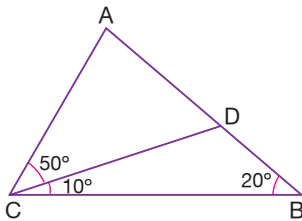
$|AB| = |AF|$ olacak şekilde bir F noktası seçelim.

Böylece EAB ile FBC eş üçgen olup (K.A.K)

$m(\widehat{ABE}) = 10^\circ$ bulunur.

Böylece $m(\widehat{EBC}) = 50^\circ$ bulunur.

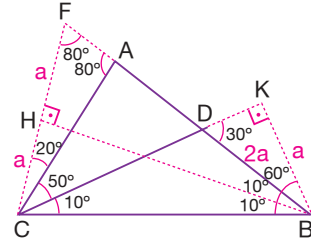
ÖRNEK - 6



ABC üçgen
 $m(\widehat{ABC}) = 20^\circ$
 $m(\widehat{BCD}) = 10^\circ$
 $m(\widehat{ACD}) = 50^\circ$

Buna göre, $\frac{|AC|}{|DB|}$ oranını bulalım.

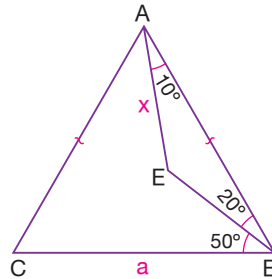
ÇÖZÜM



$|BC| = |BF|$ olacak şekilde B, A, F doğrusalını çizelim.

$[BH] \perp [FC]$ ve $[CK] \perp [BK]$ olacak şekilde seçilen K ve H noktaları ile $\widehat{BHC}$ ve $\widehat{CKB}$ eş üçgenler (A.K.A) olup istenen oran 1 dir.

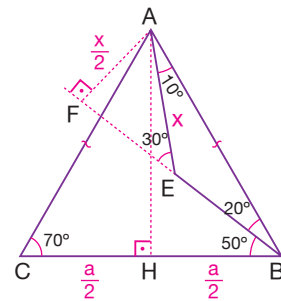
ÖRNEK - 7



ABC üçgen
 $|AB| = |AC|$
 $m(\widehat{BAE}) = 10^\circ$
 $m(\widehat{ABE}) = 20^\circ$
 $m(\widehat{EBC}) = 50^\circ$
 $|AE| = x$
 $|BC| = a$

Buna göre, x in a türünden değerini bulalım.

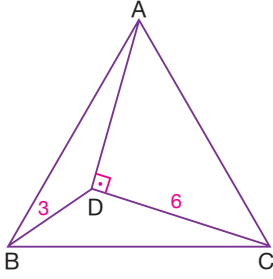
ÇÖZÜM



$[AF] \perp [BF]$ olacak şekilde F noktası seçelim. Bu durumda ABF ile CAH üçgenlerinin eş olduğu görülür. (A.K.A)

O halde $x = a$ bulunur.

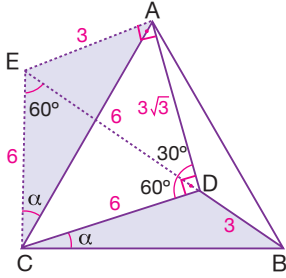
ÖRNEK - 8



ABC eşkenar üçgen
 $[AD] \perp [DC]$
 $|BD| = 3$ birim
 $|DC| = 6$ birim

Verilenlere göre, $|AD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

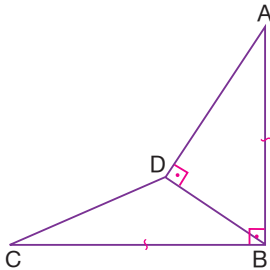


DBC üçgeninde eş EAC üçgenini çizelim. (K.A.K)

Bu durumda CDE bir eşkenar üçgen ve ADE bir 30°, 60°, 90° üçgeni olur.

O halde $|AD| = 3\sqrt{3}$ birim bulunur.

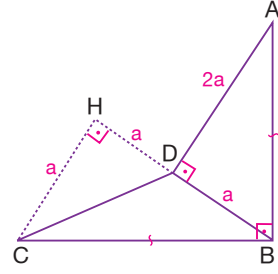
ÖRNEK - 9



$[AB] \perp [BC]$
 $[AD] \perp [DB]$
 $|AD| = 2|BD|$
 $|AB| = |BC|$

Buna göre, BDC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

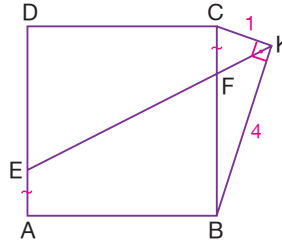


$[BH] \perp [HC]$ olacak şekilde H noktası seçelim.

Böylece, ABD ile BHC eş üçgenleri elde edilir. (A.K.A)

O halde $m(\angle BDC) = 135^\circ$ bulunur.

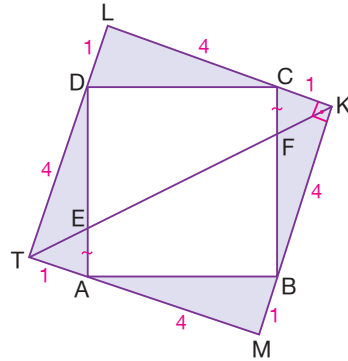
ÖRNEK - 10



ABCD kare
 $[CK] \perp [BK]$
 $|AE| = |FC|$
 $|CK| = 1$ birim
 $|BK| = 4$ birim

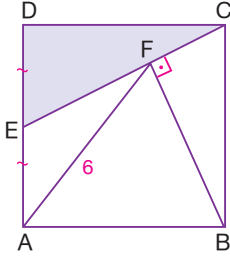
Verilenlere göre, $|KF| + |KE|$ toplamını bulalım.

ÇÖZÜM



CKB dik üçgeni diğer köşelere şekildeki gibi dönüşümler uygulanarak taşınırsa KLTM karesi elde edilir. Bu durumda $|KF| = |TE|$ olup $|KF| + |KE|$ toplamı bu karenin köşegen uzunluğu olup $5\sqrt{2}$ birim bulunur.

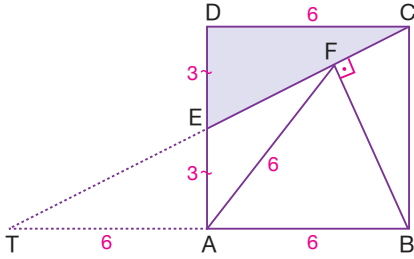
ÖRNEK - 11



ABCD kare
 $[BF] \perp [EC]$
 $|DE| = |AE|$
 $|AF| = 6$ birim

Verilenlere göre, DEC üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

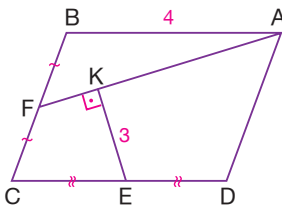


$CE \cap BA = \{T\}$ olsun.

O halde, $\triangle DEC$ ile $\triangle AET$ eş üçgenlerdir. (K.A.K.)

$$A(\triangle DEC) = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

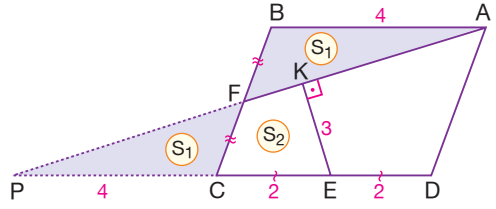
ÖRNEK - 12



ABCD paralelkenar
 $[EK] \perp [AF]$
 $|DE| = |EC|$
 $|BF| = |FC|$
 $|AB| = 4$ birim
 $|EK| = 3$ birim

Verilenlere göre, ABCEK beşgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM



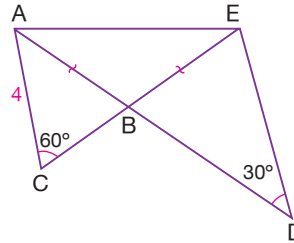
$AF \cap DC = \{P\}$ olsun.

Böylece, $\triangle ABF$ ile $\triangle PCF$ eş üçgenlerdir. (K.A.K.)

$A(\triangle ABCEK) = A(\triangle KPE)$ olup

$$A(\triangle ABCEK) = \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

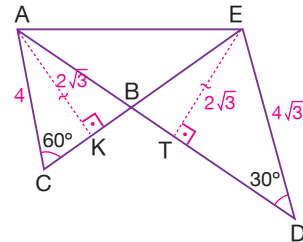
ÖRNEK - 13



ABC üçgen
 $|AB| = |BE|$
 $|AC| = 4$ birim
 $m(\angle ACE) = 60^\circ$
 $m(\angle ADE) = 30^\circ$

Verilenlere göre, $|DE|$ uzunluğunu bulalım.

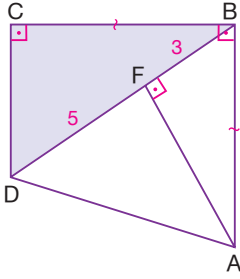
ÇÖZÜM



$[AK]$ ve $[ET]$ dikmeleri çizilirse ve $\triangle AKB$ ile $\triangle ETB$ eş üçgenleri elde edilir. (A.K.A.)

O halde $|ED| = 4\sqrt{3}$ birim bulunur.

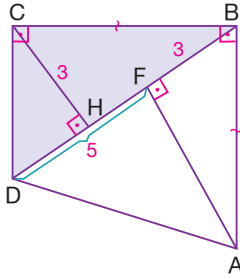
ÖRNEK - 14



ABCD dörtgen
 $[DC] \perp [CB]$
 $[CB] \perp [BA]$
 $[AF] \perp [BD]$
 $|AB| = |BC|$
 $|DF| = 5$ birim
 $|FB| = 3$ birim

Verilenlere göre, DCB üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM

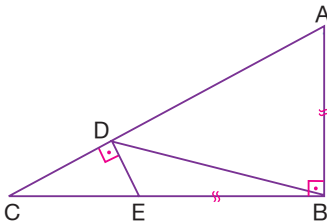


$[CH]$ dikmesi ile ABF üçgenine eş (A.K.A.) olan BHC dik üçgeni elde edilir.

Dolayısıyla $|FB| = |CH| = 3$ birim olup

$$A(DCB) = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

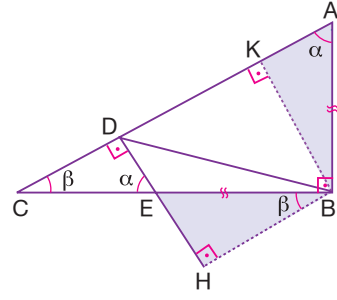
ÖRNEK - 15



ABC dik üçgen
 $[ED] \perp [AC]$
 $|AB| = |BE|$

Verilenlere göre, ADB açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM



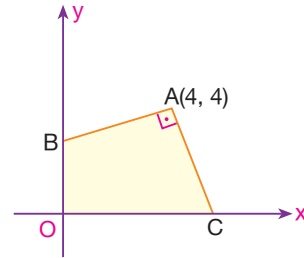
$[BK] \perp [AC]$ dikmesi ile $[BH] \perp [HD]$ olacak şekilde D, E, H doğrusalını çizelim.

Böylece, AKB ile EHB üçgenlerinin eş olduğu görülür. (K.A.K.)

O halde, $|BK| = |HB|$ olup bu durum $[DB]$ nin açıortay olduğunu gösterir.

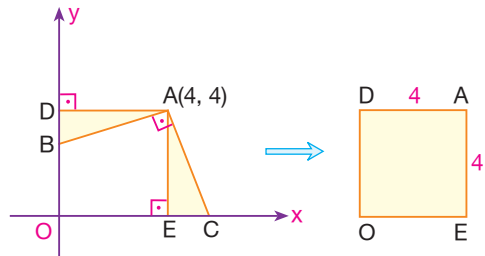
$$m(\widehat{ADB}) = 45^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 16



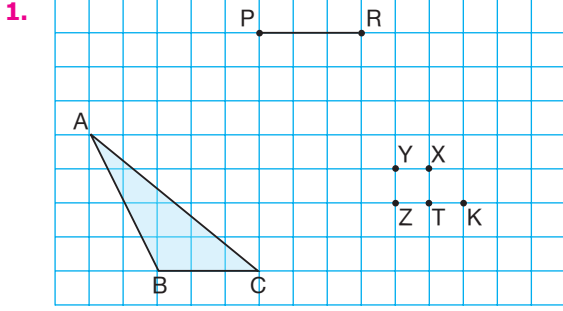
Yukarıdaki analitik düzlemde ABOC dörtgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM



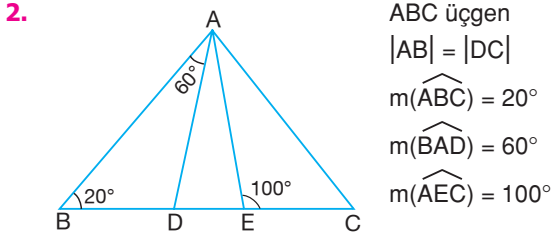
$[AD] \perp Oy$ ve $[AE] \perp Ox$ olacak şekilde D ve E noktaları ile ADOE karesi, ADB ve AEC eş üçgenleri elde edilir. (A.K.A)

Böylece, $A(ABOC) = A(ADOE) = 16 \text{ br}^2$ bulunur.



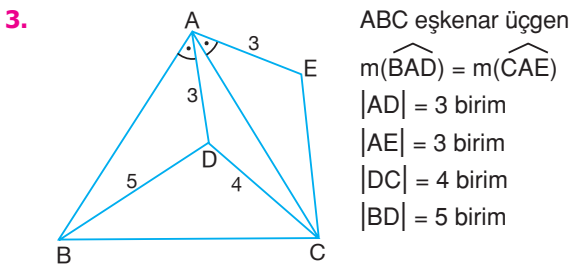
Yukarıda bir kenarı [PR] olan üçgenin diğer köşesi aşağıdaki noktalardan hangisi olursa ABC üçgenine eş olur?

- A) X B) Y C) Z D) T E) K



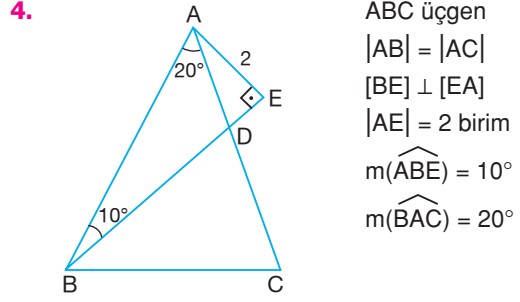
Buna göre, $m(\widehat{ACB})$ kaç derecedir?

- A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50



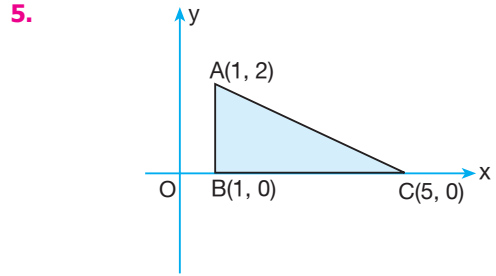
Buna göre, $m(\widehat{ADC})$ kaç derecedir?

- A) 90 B) 105 C) 120 D) 135 E) 150



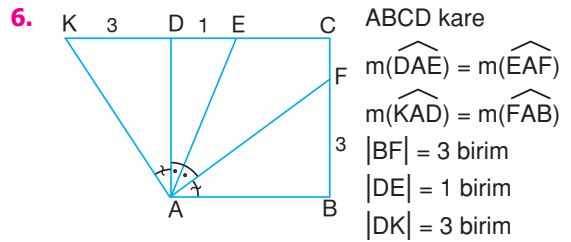
Buna göre, $|BC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) 4 E) 6



Yukarıdaki dik koordinat sisteminde ABC üçgeninin C köşesi etrafında saatin tersi yönde 90° dönmesi ile elde edilen üçgenin A köşesinin koordinatları toplamı kaçtır?

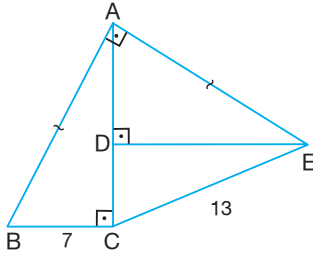
- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3



Buna göre, $|AF|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{6}$ B) 5 C) $\sqrt{17}$ D) 4 E) $2\sqrt{3}$

7.

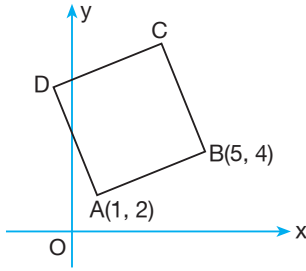


ABCE dörtgen
 $[BA] \perp [AE]$
 $[AC] \perp [BC]$
 $[ED] \perp [AC]$
 $|AB| = |AE|$
 $|BC| = 7$ birim
 $|CE| = 13$ birim

Buna göre, $|DC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

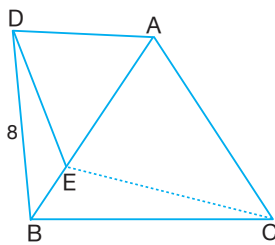
8.



Yukarıdaki koordinat sistemindeki ABCD karesinin C noktasının koordinatları çarpımı kaçtır?

- A) 14 B) 16 C) 20 D) 24 E) 28

9.

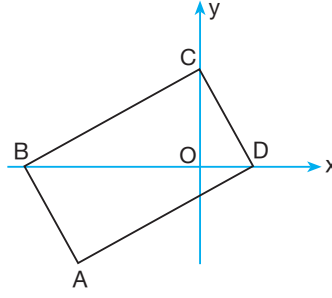


ABC ve ADE
 eşkenar üçgen
 $|BD| = 8$ birim

Buna göre, $|EC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 3 B) $3\sqrt{3}$ C) 8 D) $4\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

10.

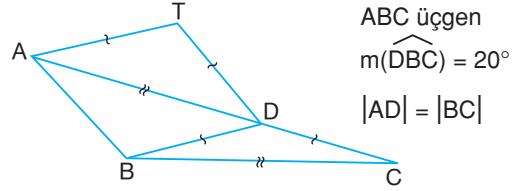


C(0, 2)
 D(1, 0)

Buna göre, ABCD dikdörtgeninin A köşesinin koordinatları çarpımı kaçtır?

- A) 1 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

11.



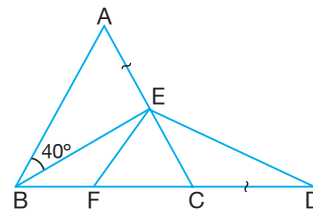
ABC üçgen
 $m(\widehat{DBC}) = 20^\circ$
 $|AD| = |BC|$

$|BD| = |DC| = |DT| = |TA|$

Buna göre, $m(\widehat{TAB})$ kaç derecedir?

- A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

12.



ABC eşkenar
 üçgen
 $[FE] \parallel [AB]$
 $m(\widehat{ABE}) = 40^\circ$
 $|AE| = |CD|$

Buna göre, $m(\widehat{EDB})$ kaç derecedir?

- A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40



HOMOTETİ (Homothety)

- Düzlemde M sabit bir nokta ve k bir reel sayı olmak üzere;

$$P' = M + k.(P - M)$$

eşitliğini sağlayan P' noktasına P noktasının M merkezli ve k oranlı homotetiği denir.



$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

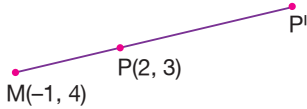
$P' = H(P) = M + k.(P - M)$ dönüşümüne P noktasının M merkezli ve k oranlı homoteti dönüşümü denir.



ÖRNEK - 1

Düzlemde P(2, 3) noktasının M(-1, 4) merkezli ve k = 3 oranlı homotetiğini bulalım.

ÇÖZÜM :



$$\overrightarrow{MP'} = 3 \cdot \overrightarrow{MP}$$

$$P' - M = 3 \cdot (P - M)$$

$$P' - (-1, 4) = 3 \cdot (3, -1)$$

$$P' = (8, 1) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

Düzlemde A(5, 6) noktasının M(-2, 7) merkezli ve k = 1 oranlı homotetiğini bulalım.

ÇÖZÜM :

Aranan nokta A' olsun.

$$A' = M + k(A - M)$$

$$A' = (-2, 7) + 1(7, -1)$$

$$A' = (5, 6)$$

Böylece, $H(A) = A' = A$ olur.

✓ Pratik Bilgi

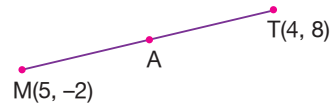
k = 1 oranlı homoteti ile şeklin ya da noktanın kendisi elde edilir.

ÖRNEK - 3

Düzlemde T(4, 8) noktasının M(5, -2) merkezli ve $k = \frac{1}{2}$ oranlı homotetiğini bulalım.

ÇÖZÜM :

Aranan nokta A olsun.



$$\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MT} \text{ olup aranan nokta}$$

M ile T noktalarının orta noktasıdır.

Böylece;

$$A - M = \frac{1}{2}(T - M)$$

$$A - (5, -2) = \frac{1}{2}(-1, 10)$$

$$A = \left(\frac{9}{2}, 3\right) \text{ olup}$$

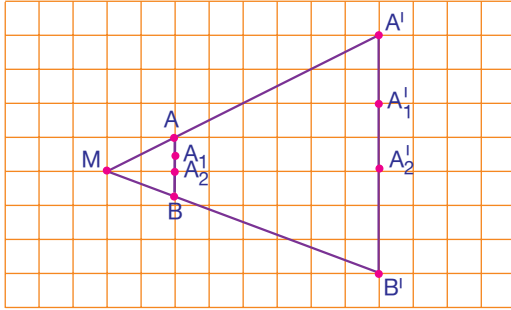
$$H(T) = \left(\frac{9}{2}, 3\right) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 4



Yukarıdaki şekilde [AB] doğru parçasının M merkezli ve $k = 4$ oranlı homotetiğini bulalım.

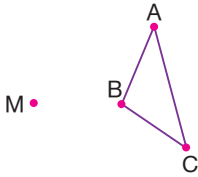
ÇÖZÜM :



$$\overrightarrow{MA'} = 4 \cdot \overrightarrow{MA}$$

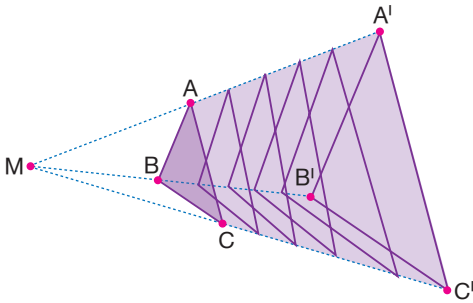
[A'B'] doğru parçası [AB] doğru parçasının M merkezli ve $k = 4$ oranlı homotetiğidir.

ÖRNEK - 5



ABC üçgeninin M merkezli ve $k \in [1, 2]$ oranlı homotetiğini bulalım.

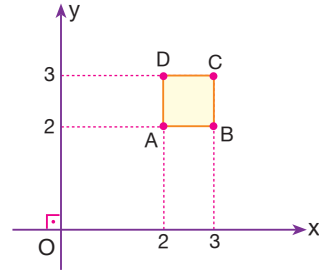
ÇÖZÜM :



$$\overrightarrow{MA'} = 2 \cdot \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB'} = 2 \cdot \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC'} = 2 \cdot \overrightarrow{MC}$$

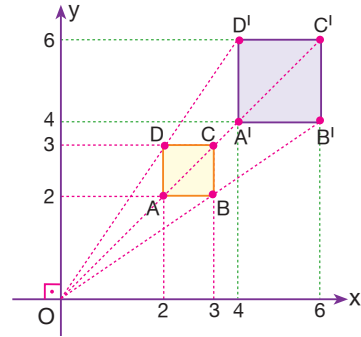
Oluşan şekil bir kesik piramittir.

ÖRNEK - 6



Şekildeki ABCD karesinin O merkezli ve $k = 2$ oranlı homotetiğini bulalım.

ÇÖZÜM :



A'B'C'D' karesi ABCD karesinin O merkezli ve $k = 2$ oranlı homotetiğidir.

Yukarıda;

$$\overrightarrow{OA'} = 2 \cdot \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'} = 2 \cdot \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC'} = 2 \cdot \overrightarrow{OC} \text{ dir.}$$



NOT :

Düzlemde M merkezli k oranlı homoteti sonucunda elde edilen şekilde,

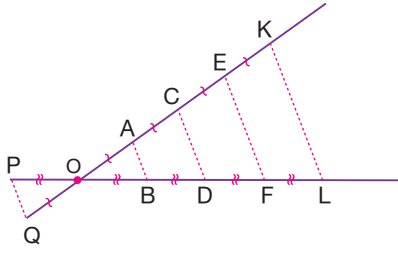
$k = 1$ ise şeklin kendisi

$0 < k < 1$ ise şeklin (k oranında) küçültülmüşü

$k > 1$ ise şeklin (k oranında) büyütülmüşü elde edilir.

$k < 0$ ise şeklin ters yönde büyütülmüşü, küçültülmüşü ya da kendisi elde edilir.

Aşağıdaki homotetileri inceleyiniz.



[CD] : [AB] nin O merkezli $k = 2$ oranlı homotetiğidir.

[EF] : [AB] nin O merkezli $k = 3$ oranlı homotetiğidir.

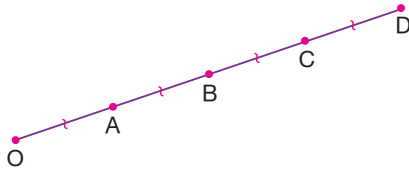
[KL] : [AB] nin O merkezli $k = 4$ oranlı homotetiğidir.

[EF] : [CD] nin O merkezli $k = \frac{3}{2}$ oranlı homotetiğidir.

[KL] : [CD] nin O merkezli $k = 2$ oranlı homotetiğidir.

[AB] : [AB] nin O merkezli $k = 1$ oranlı homotetiğidir.

[PQ] : [AB] nin O merkezli $k = -1$ oranlı homotetiğidir.

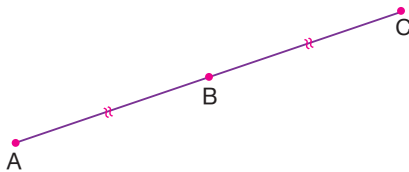


A noktası : A noktasının O merkezli $k = 1$ oranlı homotetiğidir.

B noktası : A noktasının O merkezli $k = 2$ oranlı homotetiğidir.

C noktası : A noktasının O merkezli $k = 3$ oranlı homotetiğidir.

O noktası : B noktasının A merkezli $k = -1$ oranlı homotetiğidir.



B noktası : C noktasının A merkezli ve $k = \frac{1}{2}$ oranlı homotetiğidir.

C noktası : B noktasının A merkezli ve $k = 2$ oranlı homotetiğidir.

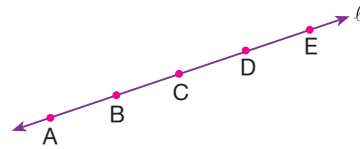
A noktası : C noktasının B merkezli ve $k = -1$ oranlı homotetiğidir.



NOT :

- Homoteti dönüşümü uzunlukları değiştirir, açıları korur.
- M merkezli ve oranları k_1, k_2 olan iki homotetin bileşkesi, M merkezli ve $k_1 \cdot k_2$ oranlı homoteti dönüşümüdür.
- Bir şekle öteleme, dönme, yansıma ve homoteti dönüşümlerinin bileşkeleri uygulanarak elde edilen şekle ilk şeklin benzeri denir. Benzerlik oranı da kullanılan homotetilerin oranlarının çarpımıdır.

ÖRNEK - 7



Yukarıda ℓ doğrusu üzerinde eşit aralıklarla sıralanmış A, B, C, D, E noktaları için aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

- B noktası, C noktasının D merkezli ve $k = 2$ oranlı homotetiğidir.
- A noktası, C noktasının B merkezli ve $k = -1$ oranlı homotetiğidir.
- E noktası, B noktasının A merkezli ve $k = 4$ oranlı homotetiğidir.
- C noktası, E noktasının D merkezli ve $k = -1$ oranlı homotetiğidir.
- A noktası, B noktasının D merkezli ve $k = -3$ oranlı homotetiğidir.

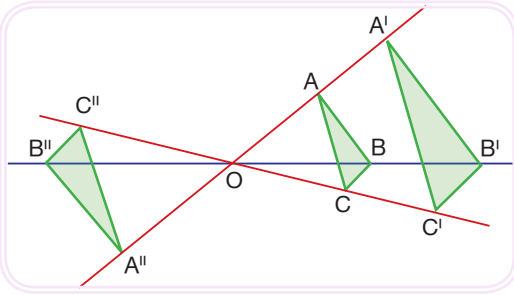
ÇÖZÜM

Şekil dikkatlice incelenirse I, II, III ve IV. önermeler doğru, V. önerme yanlıştır.

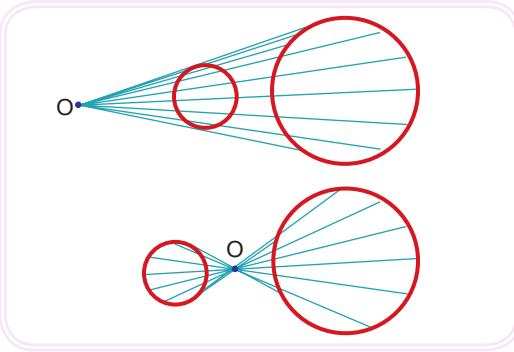


İİ Aşağıdaki homoteti görsellerini inceleyip homoteti merkezleri ve oranlarını tahmin etmeye çalışınız.

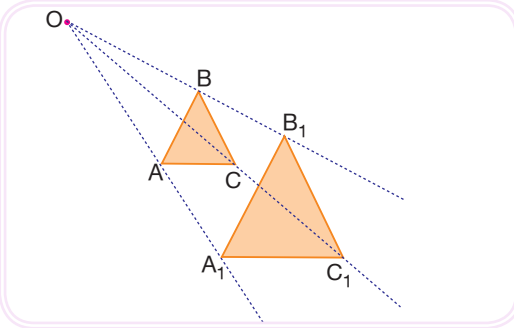
1



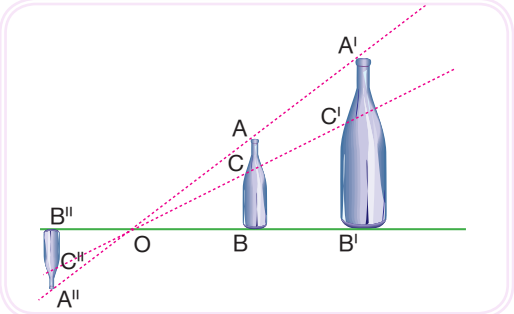
2



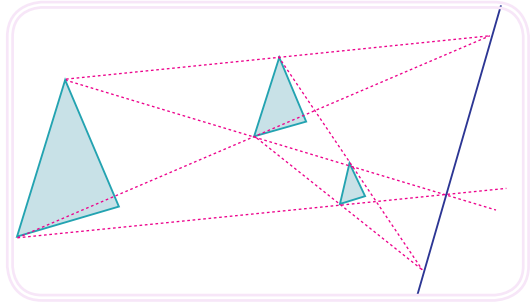
3



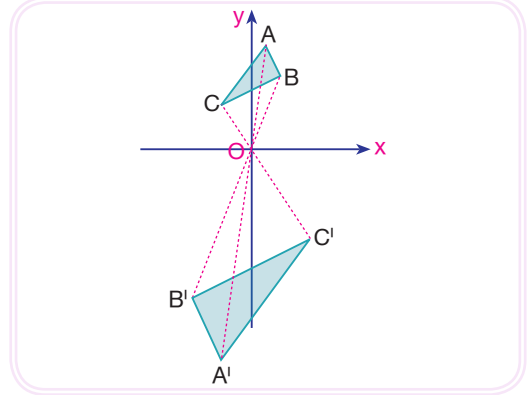
4



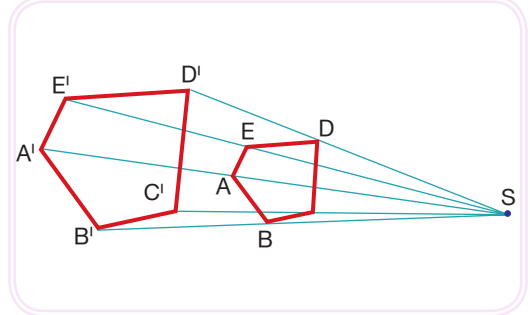
5



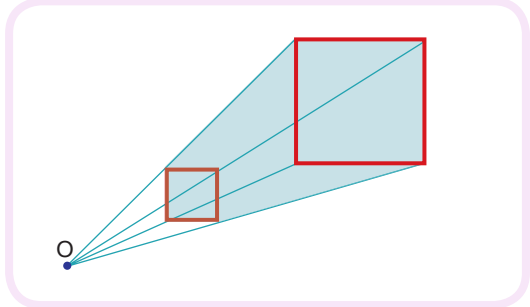
6



7



8



1. P noktasının M merkezli ve k oranlı homotetiği olan nokta T olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $T = P + k(M - P)$ B) $T = M + k(P - M)$
C) $T = K + k(M + P)$ D) $T = P + k(P - M)$
E) $T = k + M - P$

2. Analitik düzlemde, P(5, 3) noktasının M(-2, 1) merkezli ve $k = 2$ oranlı homotetiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) (8, 12) B) (12, 3) C) (8, 5)
D) (4, 5) E) (12, 5)

3. Analitik düzlemde P(-8, 6) noktasının orijin merkezli ve $k = \frac{1}{2}$ oranlı homotetiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) (3, 4) B) (-3, 4) C) (-4, 3)
D) (4, -3) E) (-3, -4)

4. Analitik düzlemde P(2, -6) noktasının M(p, t) merkezli ve $k = 2$ oranlı homotetiği (14, 8) noktası olduğuna göre, $p + t$ kaçtır?

A) -60 B) -50 C) -40 D) -30 E) -20

5. Analitik düzlemde P(4, 8) noktasının M(-1, 3) merkezli ve k oranlı homotetiği T(6, 10) noktası olduğuna göre, k kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{7}{5}$ E) $\frac{9}{4}$

6. Analitik düzlemde T(1, -3) noktasının M(a, b) merkezli ve $k = -2$ oranlı homotetiği (4, -9) olduğuna göre, a.b kaçtır?

A) -6 B) -8 C) -10 D) -12 E) -14

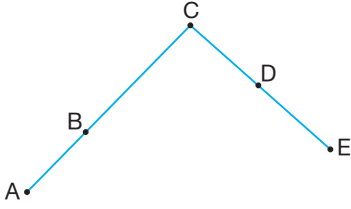
7. Analitik düzlemde 8 birim uzunluğundaki doğru parçasının $k = \frac{5}{4}$ oranlı homotetiğinin uzunluğu kaç birimdir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

8. Analitik düzlemde A(3, -5) noktasının B(-1, 6) merkezli homotetiği C(-9, n) olduğuna göre, n kaçtır?

A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

9.



B noktasının A merkezli ve $k = 3$ oranlı homotetiği C noktası,

D noktasının C merkezli ve $k = 2$ oranlı homotetiği E noktasıdır.

Buna göre, $\frac{|AB|}{|BC|} + \frac{|CD|}{|DE|}$ toplamı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

10. A noktasının B merkezli ve k oranlı homotetiği A noktası olduğuna göre, k oranı kaçtır?

- A) -1 B) -2 C) 1 D) 2 E) $\frac{1}{2}$

11. Oranları 3 ve 4 olan eş merkezli iki homoteti dönüşümüne uğrayan bir üçgenin ilk halinde çevresi 5 birim olduğuna göre, son halinde çevresi kaç birimdir?

- A) 75 B) 60 C) 50 D) 40 E) 35

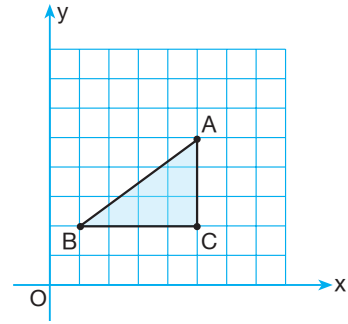
12. Analitik düzlemde 12 birim uzunluğundaki bir doğru parçasının $k = \frac{2}{3}$ oranlı homotetiğinin uzunluğu kaç birimdir?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 24

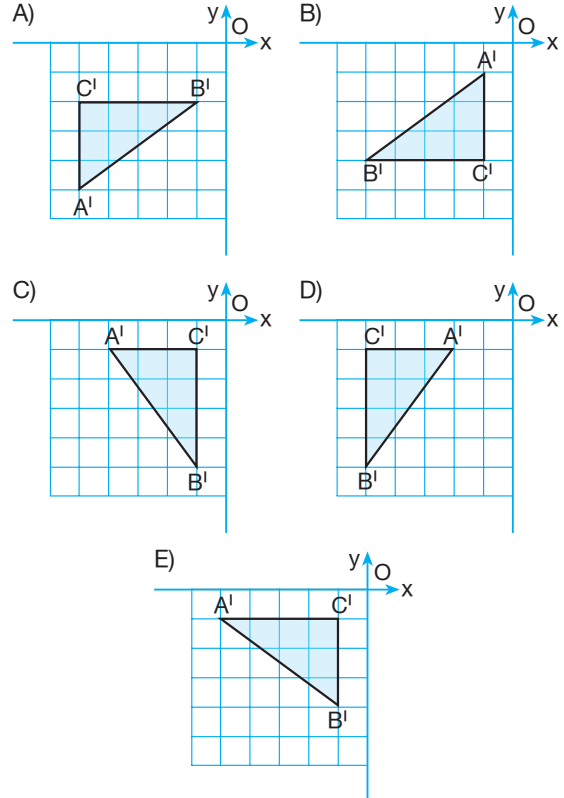
13. Uzunlukları değiştiren dönüşüm aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) Ötelemeli yansıma
B) Yatay yansıma
C) Döndürme
D) Öteleme
E) Homoteti

14.



Yukarıdaki zeminde ABC üçgeninin O merkezli ve $k = -1$ oranlı homotetiği (A'B'C' üçgeni) aşağıdakilerden hangisidir?

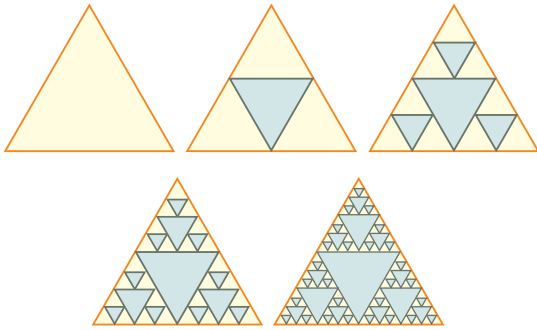


FRAKTAL

Bir şeklin orantılı olarak küçültülmesi ya da büyütülmesi ile oluşturulan görüntülere **fraktal** denir.

- Bir fraktalın oluşturulması için fraktalın başlangıç şeklinin ve motif oluşturma kuralının verilmesi gereklidir.

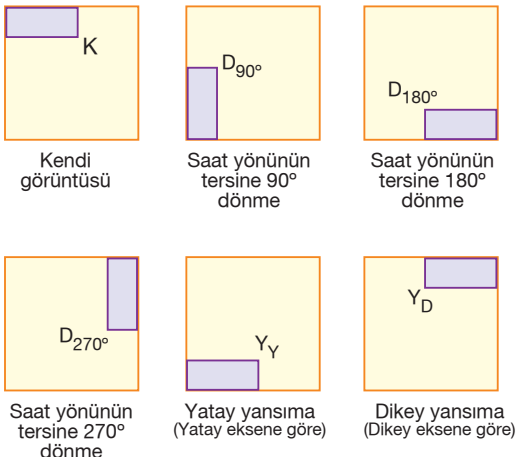
Aşağıda bir eşkenar üçgeninin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek oluşan fraktalı inceleyiniz.



- Fraktalların görüntüsü oluşturulduktan sonra $\frac{1}{4}$ oranında küçültülüp kopyaları alınarak yine fraktalların kendisini oluşturacak biçimde dönüşümler kullanılır.

Bu dönüşümler sağ üst kutu daima boş kalacak şekilde $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ sırasında kodlanır.

- Fraktalı oluşturacak dönüşümler için aşağıdaki kodlar kullanılır.



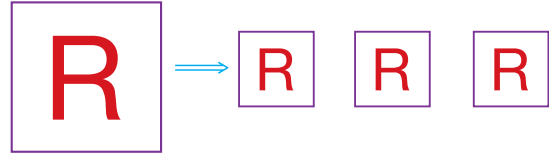
ÖRNEK - 1



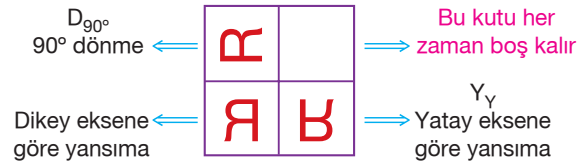
Görüntüsü ile D_{90° , Y_D , Y_Y dönüşümleri uygulanarak fraktal oluşturalım.

ÇÖZÜM

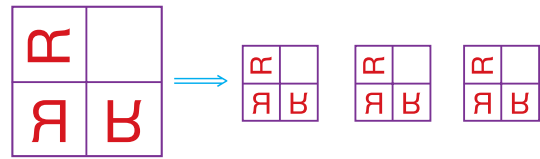
Verilen görüntüyü $\frac{1}{4}$ oranında küçülterek kopyalayalım.



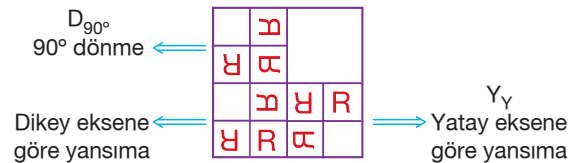
Oluşan görüntüleri D_{90° , Y_D , Y_Y dönüşümleri ile tekrar oluşturalım.



Oluşan görüntü tekrar $\frac{1}{4}$ oranında küçültülüp kopyalanır.



Aynı şekilde yine D_{90° , Y_D , Y_Y dönüşümleri uygulanır.



Bu şekilde istediğimiz kadar bu işlemlere devam edebiliriz.

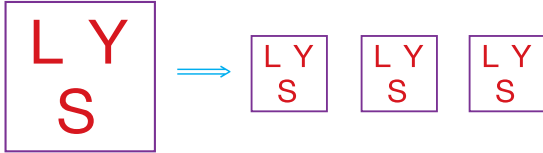
ÖRNEK - 2



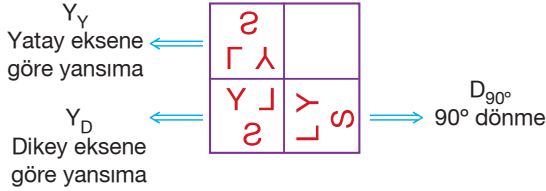
Görüntüsü ile Y_Y , Y_D , D_{90° dönüşümleri uygulayarak fraktal oluşturalım.

ÇÖZÜM :

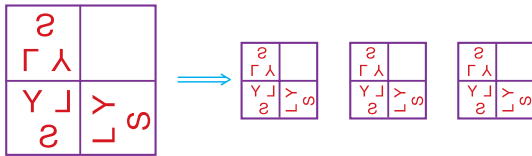
Verilen görüntüyü $\frac{1}{4}$ oranında küçülterek kopyalayalım.



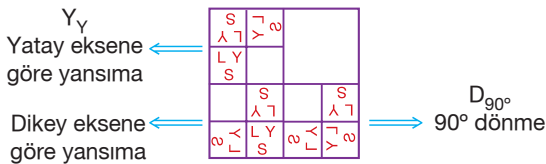
Oluşan görüntüleri Y_Y , Y_D , D_{90° dönüşümleri ile tekrar oluşturalım.



Oluşan görüntü tekrar $\frac{1}{4}$ oranında küçültülüp kopyalanır.



Oluşan görüntüleri Y_Y , Y_D , D_{90° dönüşümleri ile tekrar oluşturalım.



Bu şekilde istediğimiz kadar bu işlemlere devam edebiliriz.

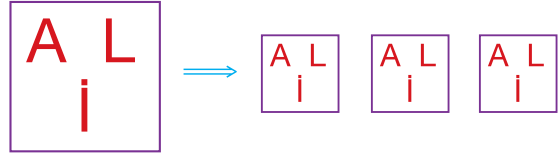
ÖRNEK - 3



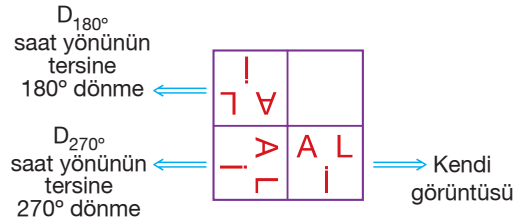
Görüntüsü ile D_{180° , D_{270° , K dönüşümleri uygulayarak fraktal oluşturalım.

ÇÖZÜM :

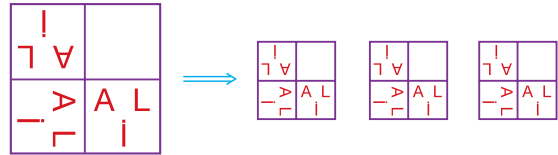
Verilen görüntüyü $\frac{1}{4}$ oranında küçülterek kopyalayalım.



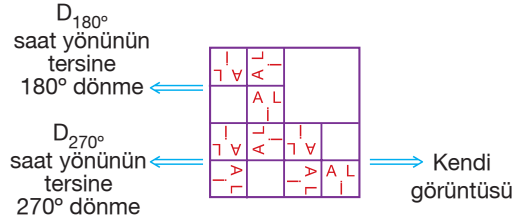
Oluşan görüntüleri D_{180° , D_{270° , K dönüşümleri ile tekrar oluşturalım.



Oluşan görüntü tekrar $\frac{1}{4}$ oranında küçültülüp kopyalanır.

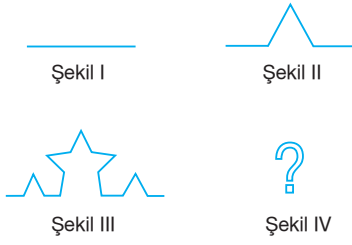


Oluşan görüntüleri D_{180° , D_{270° , K dönüşümleri ile tekrar oluşturalım.

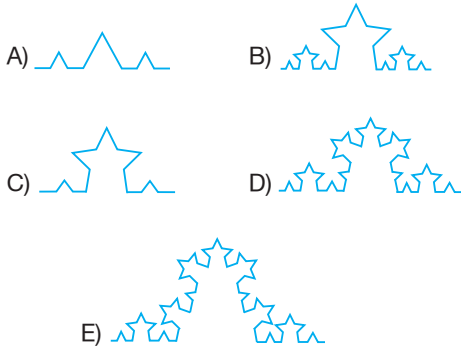


Bu şekilde istediğimiz kadar bu işlemlere devam edebiliriz.

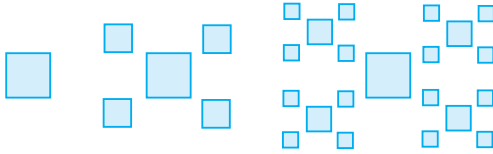
1.



Yukarıdaki fraktalda IV. şekil yerine aşağıdakilerden hangisi gelmelidir?



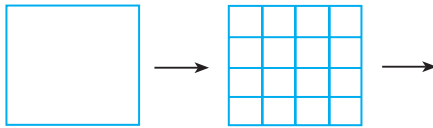
2.



Yukarıdaki ilk üç adımı verilen fraktalın 4. adımında kaç tane kare vardır?

- A) 63 B) 79 C) 85
D) 106 E) 341

3.



Yukarıda verilen fraktal örneğine göre, bir sonraki şekil kaç bölgeye ayrılmalıdır?

- A) 206 B) 128 C) 144 D) 196 E) 256

4.

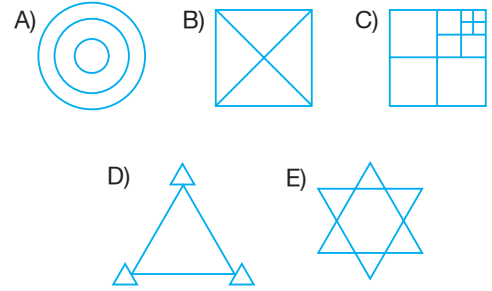


Yukarıdaki fraktalda birinci şeklin iki tane ucu vardır.

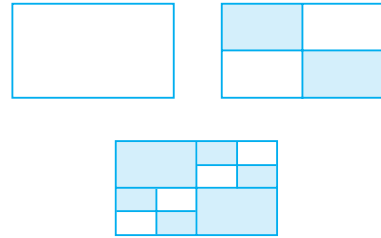
Fraktal devam ettirilirse altıncı şekilde kaç tane uç olur?

- A) 16 B) 32 C) 64 D) 72 E) 86

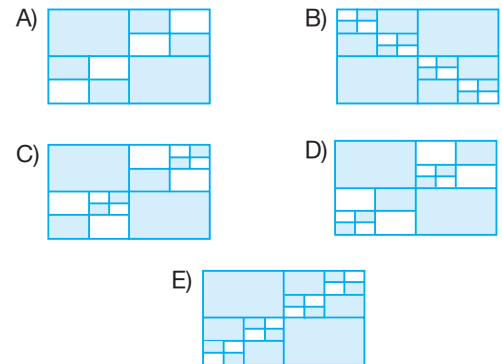
5. Aşağıdakilerden hangisi fraktal değildir?



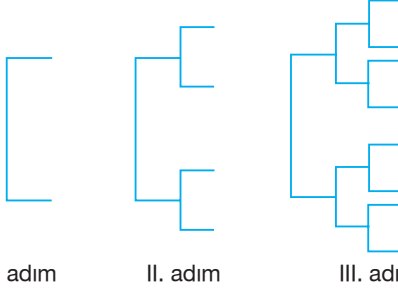
6.



Yukarıdaki örüntünün bir sonraki adımı aşağıdakilerden hangisidir?



7.

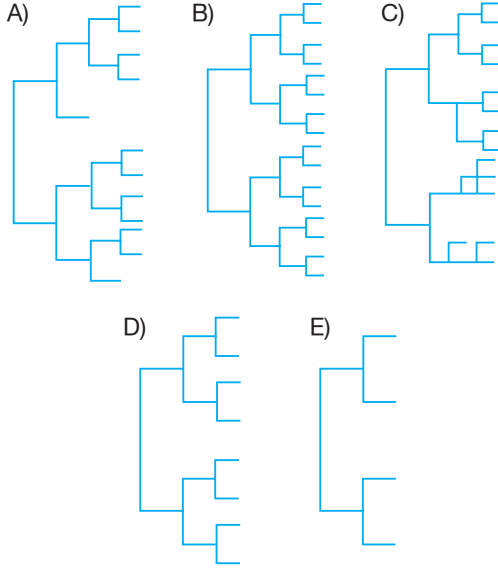


I. adım

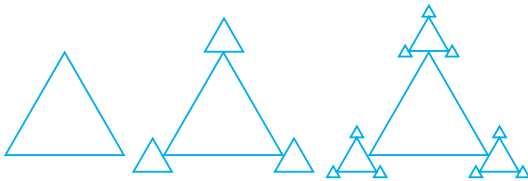
II. adım

III. adım

Yukarıdaki ilk üç adımı verilen fraktal örneğinin IV. adımı aşağıdakilerden hangisidir?



8.

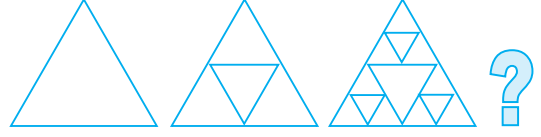


Yukarıdaki fraktal örneğinde üçgen sayıları ile oluşturulan örüntüde sırayla 1, 4, 13 sayıları elde edilmiştir.

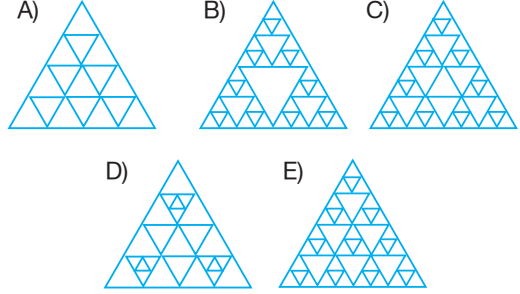
Bu örüntünün V. şeklindeki üçgen sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 31 B) 40 C) 94 D) 121 E) 145

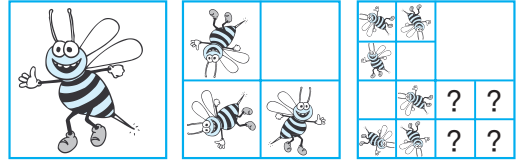
9.



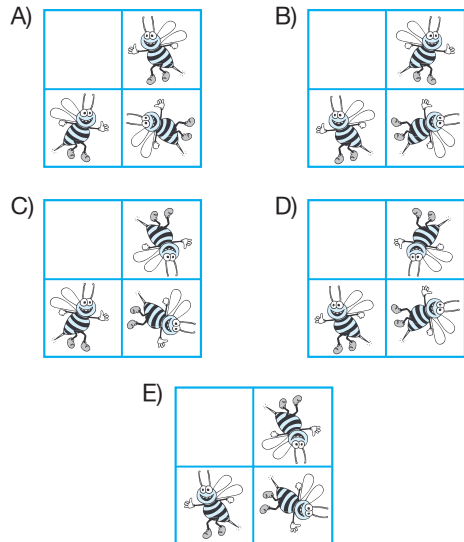
Yukarıdaki fraktal örneğinde IV. şekil aşağıdakilerden hangisidir?



10.



Yukarıdaki $\frac{1}{4}$ oranında dönüşümler uygulanarak elde edilen fraktalda "?" yerine aşağıdakilerden hangisi gelmelidir?





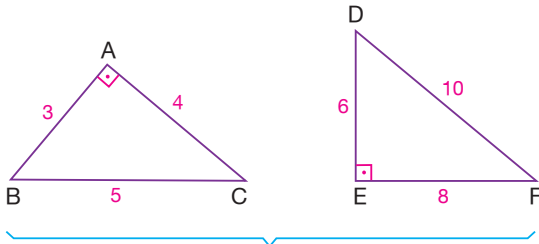
ÜÇGENDE BENZERLİK



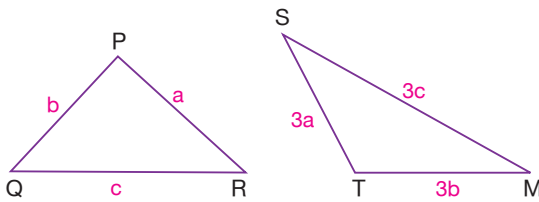
Yukarıda birbirine benzeyen nesneleri kavramaya çalışalım.

İki üçgenden biri belli bir oranda küçültüldüğünde ya da büyütüldüğünde diğeri elde ediliyorsa bu üçgenlere **benzer üçgenler** denir.

- Bir üçgenin belli bir oranda büyütülmüşü ya da küçültülmüşü bu üçgenin benzeridir.
- Bir üçgenin belli bir oranda büyüttüğümüzde ya da küçülttüğümüzde kenar oranları belli bir oranda artar ya da azalır, ancak açılar değişmez.



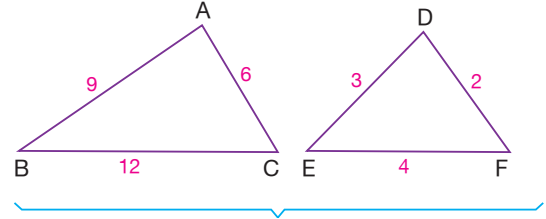
$\triangle ABC$ ve $\triangle EDF$ benzer iki üçgen $\triangle ABC \sim \triangle EDF$



$\triangle PQR \sim \triangle TMS$

Benzerlik Oranı

Benzer iki üçgende karşılıklı kenar uzunluklarının oranına benzerlik oranı denir.

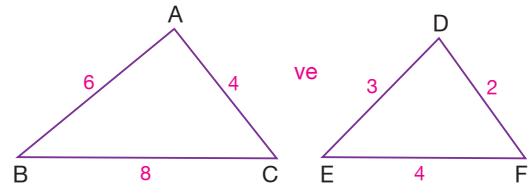


$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \rightarrow \frac{12}{4} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = 3 \text{ (benzerlik oranı)}$$

Benzer İki Üçgende;

- Karşılıklı kenarortayların uzunlukları oranı, benzerlik oranına eşittir.
- Karşılıklı açıortayların uzunlukları oranı, benzerlik oranına eşittir.
- Karşılıklı yüksekliklerin uzunlukları oranı, benzerlik oranına eşittir.
- Karşılıklı çevrelerin uzunlukları oranı, benzerlik oranına eşittir.
- Karşılıklı iç teğet çemberlerin yarıçapları oranı, benzerlik oranına eşittir.
- Karşılıklı dış teğet çemberlerinin yarıçapları oranı, benzerlik oranına eşittir.
- Karşılıklı çevrel çemberlerinin yarıçapları oranı, benzerlik oranına eşittir.
- Alanlar oranı benzerlik oranın karesine eşittir.

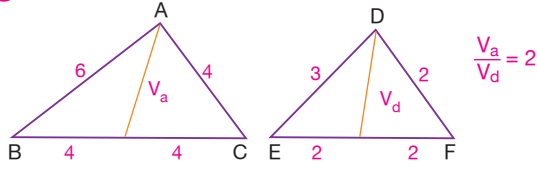
Aşağıdaki benzer üçgenleri ele alalım.



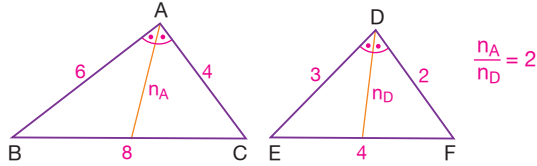
Bu üçgenlerin benzerlik oranı 2 olup aşağıdaki sonuçlar yazılabilir.



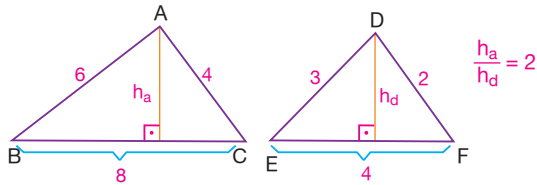
1



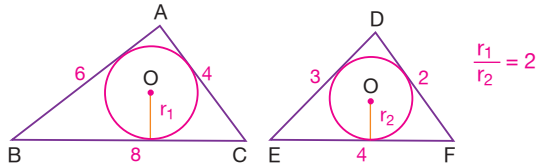
2



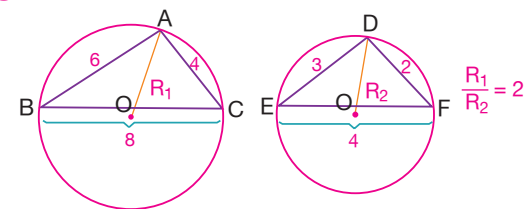
3



4



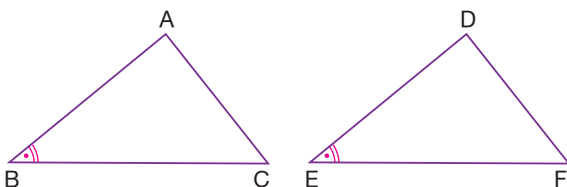
5



Kenar Açık Kenar Benzerlik Aksiyomu

İki üçgen arasında yapılan birebir eşlemede, karşılıklı iki kenarın uzunlukları oranı aynı ve bu kenarlar arasında kalan açılar eş ise iki üçgen benzerdir.

Bu benzerliğe K. A. K. (Kenar Açık Kenar) benzerlik aksiyomu denir.



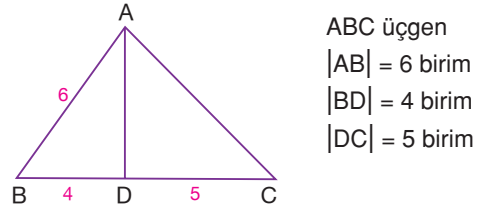
$\widehat{ABC} \leftrightarrow \widehat{DEF}$ eşleşmesinde

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} \text{ ve } m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF}) \text{ ise}$$

$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ benzer iki üçgendir.

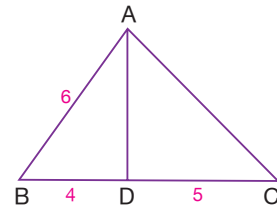
Bu benzerik $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK - 1

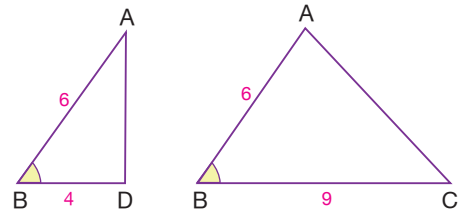


Buna göre, $\frac{|AD|}{|AC|}$ oranını bulalım.

ÇÖZÜM :



$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{ABD}$ üçgeninde ortak olan açı $\widehat{ABC}$ dir.



$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ABD}) \text{ ve } \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{2}{3}$$

olduğundan (K.A.K.) benzerlik aksiyomu gereğince

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DBA}$ yazılabilir.

Bu durumda $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{2}{3}$ bulunur.



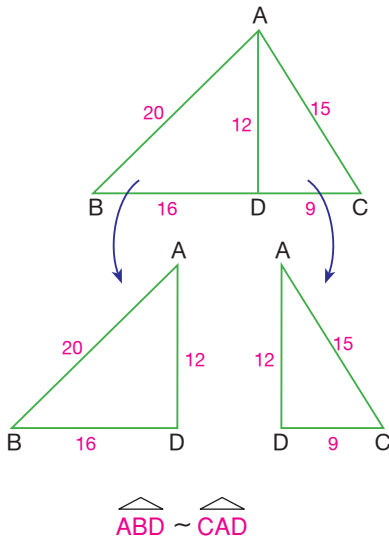
Kenar Kenar Kenar (K.K.K.) Benzerlik Teoremi

İki üçgen arasında yapılan eşlemede karşılıklı kenarların uzunlukları orantılı ise bu üçgenler benzerdir.

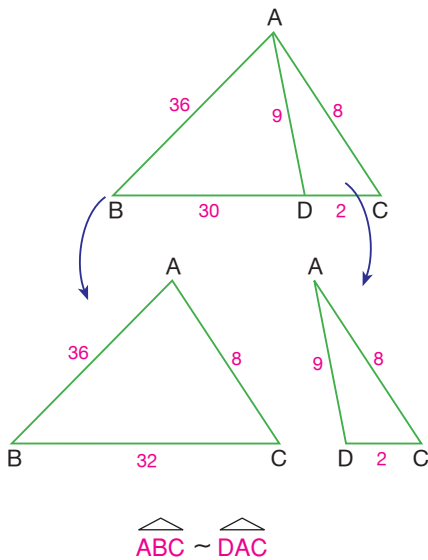
Buna K.K.K. **benzerlik teoremi** denir.

Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

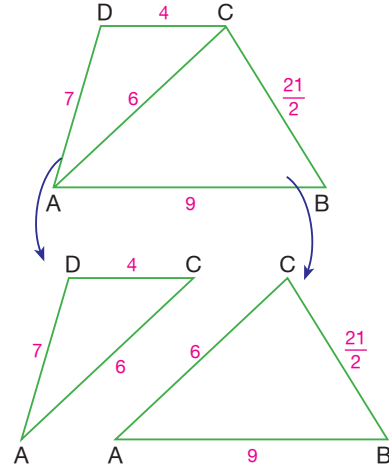
1



2



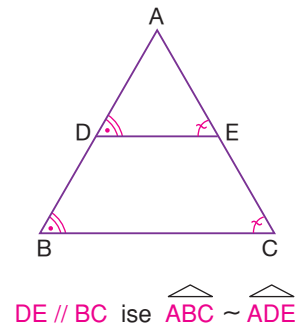
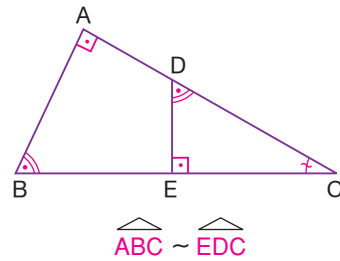
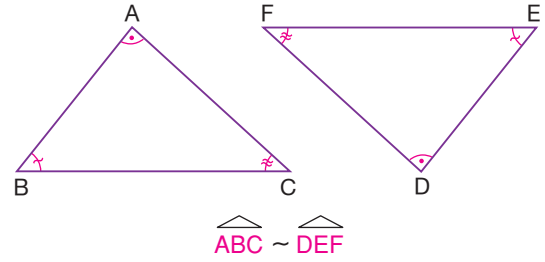
3



Açı Açı Açı (A.A.A.) Benzerlik Teoremi

İki üçgen arasında yapılan eşlemede karşılıklı açılar eş ise bu üçgenler benzerdir.

Bu teoreme açı açı açı benzerlik teoremi denir.

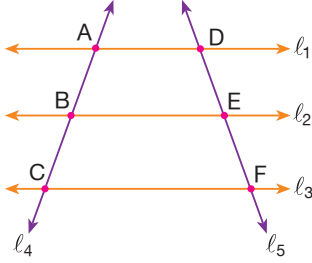


Tales TEOREMİ

1. Tales Teoremi :

En az üç paralel doğru, iki doğru tarafından kesildiğinde kesen bu iki doğru üzerinde uzunlukları orantılı doğru parçaları ayırır.

Buna 1. Tales Teoremi denir.

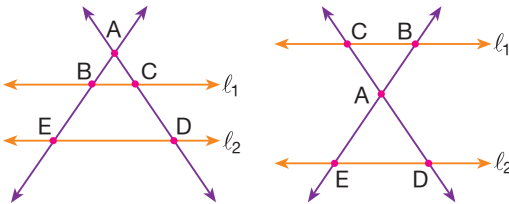


$$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \text{ ise } \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|} \text{ olur.}$$

2. Tales Teoremi :

Kesişen iki doğru, paralel iki doğru tarafından kesildiğinde oluşan üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır.

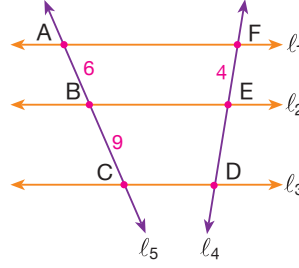
Buna 2. Tales Teoremi denir.



$$l_1 \parallel l_2 \text{ ise } \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|ED|} \text{ olur.}$$



ÖRNEK - 1



Şekilde

$$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$$

$$|AB| = 6 \text{ birim}$$

$$|BC| = 9 \text{ birim}$$

$$|FE| = 4 \text{ birim}$$

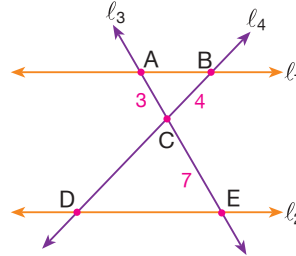
Buna göre, $|ED|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

1. Tales teoremini uygularsak

$$\frac{6}{9} = \frac{4}{|DE|} \text{ olup } |DE| = 6 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 2



Şekilde

$$l_1 \parallel l_2$$

$$l_3 \cap l_4 = \{C\}$$

$$|AC| = 3 \text{ birim}$$

$$|CB| = 4 \text{ birim}$$

$$|CE| = 7 \text{ birim}$$

Buna göre, $|DC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

2. Tales teoremini uygularsak

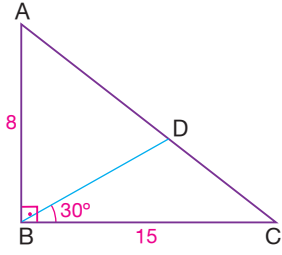
$$\frac{|AC|}{|CE|} = \frac{|BC|}{|CD|} \text{ olup}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{4}{|DC|} \text{ eşitliğinden}$$

$$|DC| = \frac{28}{3} \text{ birim bulunur.}$$



ÖRNEK - 3

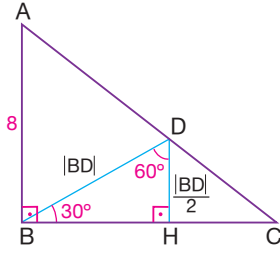


ABC dik üçgen
 $m(\widehat{DBC}) = 30^\circ$
 $|AB| = 8$ birim
 $|BC| = 15$ birim

Buna göre, $\frac{|BD|}{|DC|}$ oranını bulalım.

ÇÖZÜM

ABC üçgeninde $[DH] \perp [BC]$ dikmesi ile



DBH üçgeni $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni olup

$$|DH| = \frac{|BD|}{2} \text{ olur.}$$

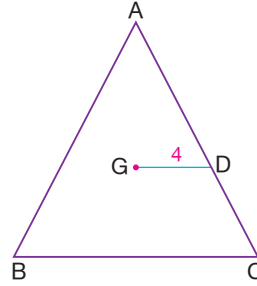
Böylece Tales teoremi gereğince,

$$\frac{|CD|}{|CA|} = \frac{|DH|}{|AB|} \text{ ile}$$

$$\frac{|CD|}{17} = \frac{\frac{|BD|}{2}}{8} \text{ eşitliğinden,}$$

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{16}{17} \text{ bulunur.}$$

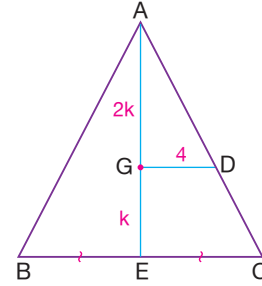
ÖRNEK - 4



ABC üçgen
 G ağırlık merkezi
 $[GD] \parallel [BC]$
 $|GD| = 4$ birim

Buna göre, $|BC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



A, G, E doğrusal çizilirse,

$$|BE| = |EC| \text{ ve } \frac{|AG|}{|GE|} = 2 \text{ olup}$$

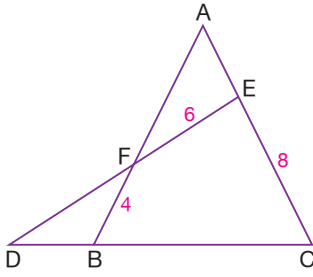
AEC üçgeninde Tales teoremi ile,

$$\frac{|AG|}{|AE|} = \frac{|GD|}{|EC|} \text{ yazılabilir.}$$

$$\frac{2k}{3k} = \frac{4}{|EC|} \Rightarrow |EC| = 6 \text{ birim}$$

Böylece, $|BC| = 12$ birim bulunur.

ÖRNEK - 5

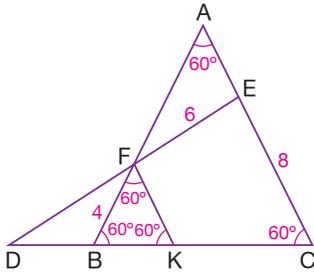


ABC eşkenar üçgen
 $|FE| = 6$ birim
 $|EC| = 8$ birim
 $|FB| = 4$ birim

Buna göre, $|DF|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$[AC] \parallel [KC]$ olacak şekilde $K \in [BC]$ belirleyelim.

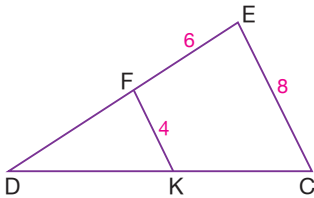


Yöndeşlikten $m(\widehat{DKF}) = 60^\circ$ olup

$\triangle FKB$ üçgeninin eşkenar üçgen olduğu anlaşılır.

Böylece $|FK| = 4$ birim olur.

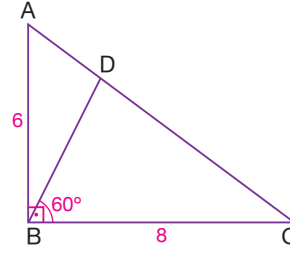
$\triangle DEC$ nde Tales teoremi ile



$$\frac{|DF|}{|DF| + 6} = \frac{4}{8} \text{ eşitliğinden,}$$

$|DF| = 6$ birim bulunur.

ÖRNEK - 6



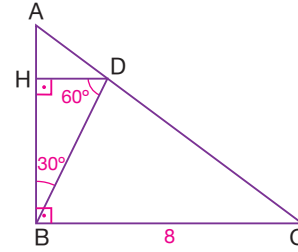
ABC dik üçgen
 $|AB| = 6$ birim
 $|BC| = 8$ birim
 $m(\widehat{DBC}) = 72^\circ$

Buna göre, $\frac{|BD|}{|AD|}$ oranını bulalım.

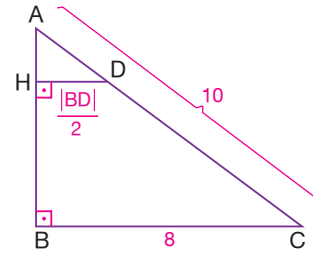
ÇÖZÜM

$m(\widehat{ABD}) = 30^\circ$ olup

$[DH] \perp [AB]$ olacak şekilde $H \in [AB]$ belirleyelim.

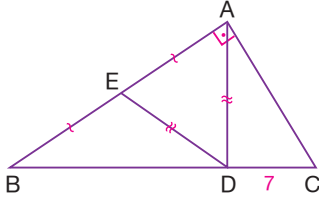


$\triangle ABC$ nde Tales teoremi ile



$$\frac{\frac{|BD|}{2}}{8} = \frac{|AD|}{10} \Rightarrow \frac{|BD|}{|AD|} = \frac{2}{5} \text{ bulunur.}$$

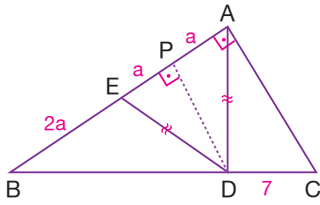
ÖRNEK - 7



ABC üçgen
 $|AE| = |EB|$
 $|AD| = |DE|$
 $|DC| = 7$ birim

Buna göre, $|BD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



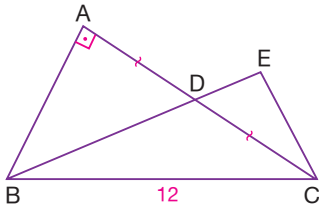
D noktasından $[AB]$ na dikme indirildiğinde,
 $|AP| = |PE|$ olup $|BP| = 3|PA|$ olduğu görülür.

Böylece Tales teoremi ile,

$$\frac{|BP|}{|PA|} = \frac{|BD|}{5} \Rightarrow \frac{3a}{a} = \frac{|BD|}{7} \text{ eşitliğinden,}$$

$|BD| = 21$ birim bulunur.

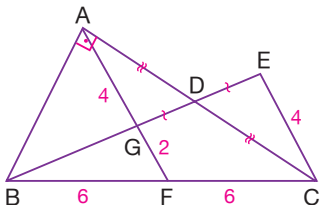
ÖRNEK - 8



ABC dik üçgen
 BEC üçgen
 $[BD]$ kenarortay
 $|BD| = 3|DE|$
 $|BC| = 12$ birim

Verilenlere göre, $|CE|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



ABC üçgeninde $[AF]$ kenarortayı çizilirse,

$|BF| = |FC| = |AF| = 6$ birim olur.

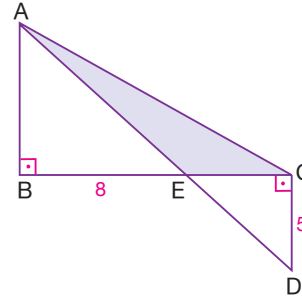
G ağırlık merkezi olduğundan,

$|AG| = 4$ birim ve $|GF| = 2$ birim olur.

$\triangle ADG \sim \triangle CDE$ olduğundan,

$|AG| = |CE| = 4$ birim bulunur.

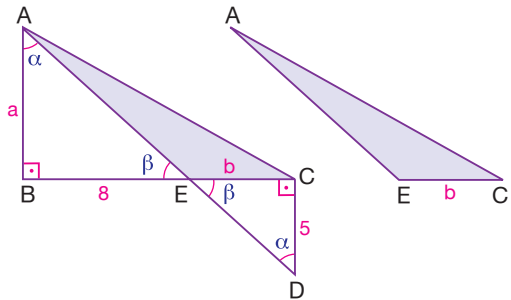
ÖRNEK - 9



ABC dik üçgen
 ECD dik üçgen
 $[AD] \cap [BC] = \{E\}$
 $|BE| = 8$ birim
 $|CD| = 5$ birim

Buna göre, AEC üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM



$|AB| = a$, $|EC| = b$ diyelim.

Gerekli açılar yazıldığında,

$\triangle ABE$ ve $\triangle DCE$ üçgenleri benzer olur.

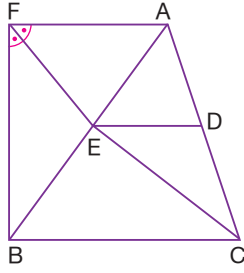
Benzerlik yazılırsa, $\frac{b}{5} = \frac{8}{a} \Rightarrow a \cdot b = 40$ olur.

ACE üçgeni taban uzunluğu b birim,

yüksekliği a birim olan geniş açılı bir üçgen olup

$$A(\triangle AEC) = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 10



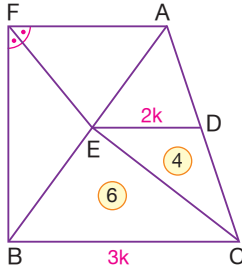
ABC üçgen
AFB üçgen
[FE] açıortay
[DE] // [BC]
 $\widehat{A(DEC)} = 4 \text{ br}^2$
 $\widehat{A(BEC)} = 6 \text{ br}^2$

Buna göre, $\frac{|FB|}{|FA|}$ oranını bulalım.

ÇÖZÜM

$\widehat{DEC}$ ile $\widehat{BEC}$ nin yüksekleri eşit olduğundan,

$$\frac{\widehat{A(DEC)}}{\widehat{A(BEC)}} = \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$



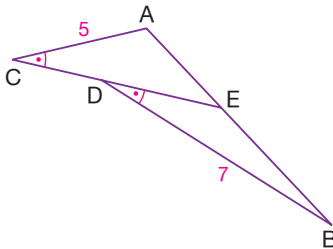
[DE] // [BC] olduğundan Tales teoremi ile,

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |AE| = 2|EB| \text{ olup}$$

$\widehat{FAB}$ nde açıortay teoremi ile,

$$\frac{|FB|}{|FA|} = \frac{|BE|}{|EA|} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

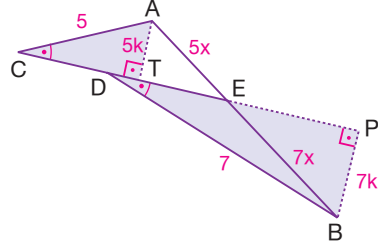
ÖRNEK - 11



AEC üçgen
 $\widehat{m(\widehat{ACE})} = \widehat{m(\widehat{EDB})}$
A, E, B doğrusal
|AC| = 5 birim
|BD| = 7 birim
|AB| = 14 birim

Buna göre, |AE| uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



C, E, P doğrusal olacak şekilde $P \in CE$ seçelim.

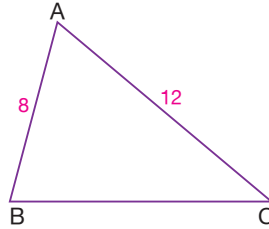
[AT] ve [BP] dikmeleri ile,

$\widehat{CAT}$ ve $\widehat{DBP}$ üçgenleri benzer olur.

$12x = 14 \text{ birim}$ eşitliği yazılabilir.

Dolayısıyla, $|AE| = \frac{35}{6} \text{ birim}$ bulunur.

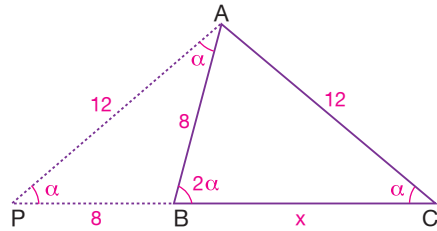
ÖRNEK - 12



ABC üçgen
 $\widehat{m(\widehat{ABC})} = 2\widehat{m(\widehat{ACB})}$
|AB| = 8 birim
|AC| = 12 birim

Buna göre, |BC| uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



|AB| = |BP| olacak şekilde P, B, C doğrusalını belirleyelim.

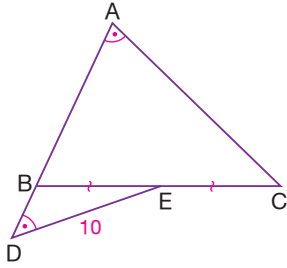
Bu durumda, APC üçgeninin ikizkenar üçgen olduğu görülür.

Böylece $\widehat{ABP} \sim \widehat{PAC}$ (A.A.A) olup benzerlikten,

$$\frac{12}{8+x} = \frac{8}{12} \Rightarrow 12^2 = 8(8+x) \text{ eşitliği ile,}$$

|BC| = x = 10 birim bulunur.

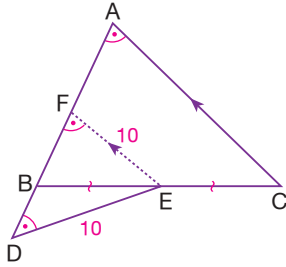
ÖRNEK - 13



ABC üçgen
A, B, D doğrusal
 $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ADE})$
 $|BE| = |EC|$
 $|DE| = 10$ birim

Buna göre, $|AC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



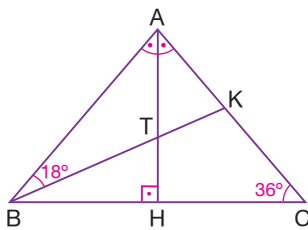
$[EF] \parallel [CA]$ olacak şekilde $F \in [AB]$ noktası seçersek, yöndeşlikten A ve F açıları eş olup

$|EF| = |ED|$ bulunur.

$\widehat{ABC}$ nde Tales teoreminden, $\frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|FE|}{|AC|}$ ile

$|AC| = 20$ birim bulunur.

ÖRNEK - 14

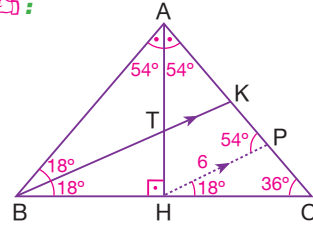


ABC üçgen
 $[AH] \perp [BC]$
 $m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{HAC})$
 $|BK| = 12$ birim

$$m(\widehat{ACB}) = 2m(\widehat{ABK}) = 36^\circ$$

Buna göre, $|AH|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



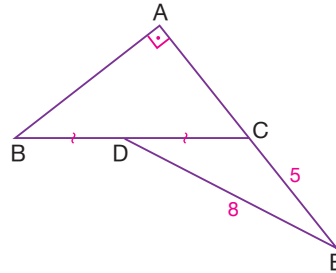
$[HP] \parallel [BK]$ olacak şekilde $P \in [AC]$ noktası seçersek KBC üçgeninde Tales teoremi ile (ya da orta tabandan) $|HP| = 6$ birim olup

Gerekli açılar yerlerine yazılırsa AHP üçgeninin ikizkenar üçgen olduğu görülür.

Böylece, $|AH| = 6$ birim bulunur.

"Şekli düzgün beşgene tamamlayarak siz çözme-ye çalışın."

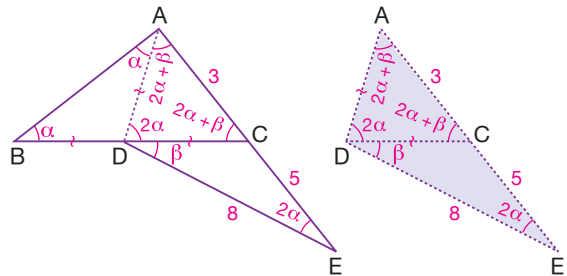
ÖRNEK - 15



ABC üçgen
 $m(\widehat{AED}) = 2m(\widehat{ABC})$
 $|BD| = |DC|$
 $|CE| = 5$ birim
 $|ED| = 8$ birim

Buna göre, $|BD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

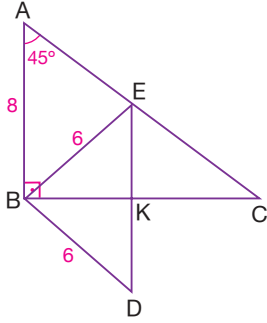


Bir dik üçgende, hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu hipotenüs uzunluğunun yarısı kadar olup $|AD|$ kenarortayı çizilip gerekli açılar yazılırsa $\widehat{ADC}$ ve $\widehat{AED}$ lerinin benzer olduğu anlaşılır. (A.A.A)

$$\text{Benzerlik yazılarak } \frac{|AD|}{3} = \frac{8}{|AD|} \text{ eşitliğinden,}$$

$|BD| = |AD| = 2\sqrt{6}$ birim bulunur.

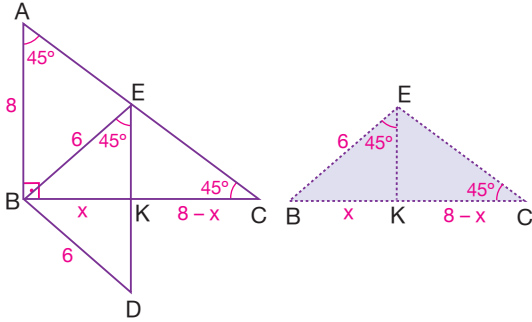
ÖRNEK - 16



ABC dik üçgen
 $[AB] \perp [BC]$
 $[EB] \perp [BD]$
 $m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$
 $|AB| = 8$ birim
 $|BE| = 6$ birim
 $|BD| = 6$ birim

Buna göre, $|BK|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



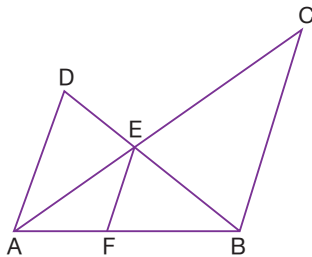
$|BK| = x$ diyelim.

Açılar yazılırsa, $\widehat{BEK} \sim \widehat{BCE}$ olup

Benzerlikten, $\frac{x}{6} = \frac{6}{8} \Rightarrow 6^2 = x \cdot 8$ olup

$|BK| = x = \frac{9}{2}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 17



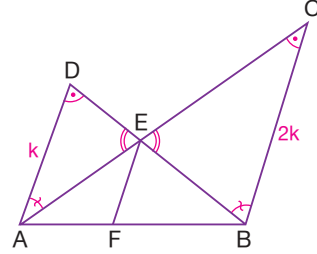
$BC \parallel DA \parallel FE$
 $|AB| = 9$ birim

$[BC]$ nin E merkezli ve $k = -\frac{1}{2}$ oranlı homotetiği

$[AD]$ olduğuna göre, $|FB|$ nin uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$[BC]$ nin E merkezli ve $k = -\frac{1}{2}$ oranlı homotetiği $[AD]$ ise $|BC| = 2|AD|$ dir.



$\widehat{AED} \sim \widehat{CEB}$ olduğundan, $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{1}{2}$ olup,

Tales teoremi gereğince, $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{1}{2}$ dir.

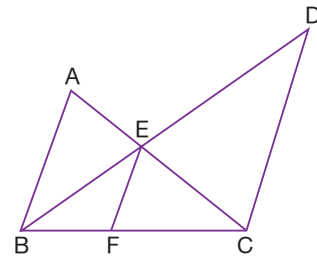
O halde,

$|FB| = 2|AF|$ dir.

$3|AF| = 9$ birim

$|AF| = 3$ birim ve $|FB| = 6$ birim bulunur.

✓ Pratik Bilgi

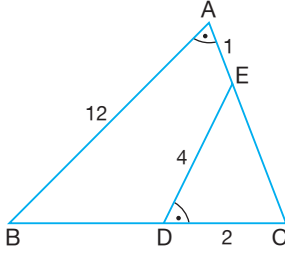


$AB \parallel EF \parallel DC$ ise

$\frac{1}{|EF|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|DC|}$ ve $\frac{|AB|}{|BF|} = \frac{|DC|}{|CF|}$ dir.

$|EF| : |AB|$ ile $|DC|$ nin yarı harmoniğidir.

1.



ABC üçgen
 $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDC})$
 $|AE| = 1$ birim
 $|AB| = 12$ birim
 $|CD| = 2$ birim
 $|ED| = 4$ birim

Buna göre, $|BD|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

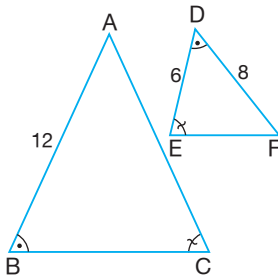
2.

- I. İki doğru parçası benzerdir.
 II. İki kare benzerdir.
 III. İki eşkenar üçgen benzerdir.
 IV. İki dik üçgen benzerdir.
 V. İki ikizkenar üçgen benzerdir.
 VI. İki çeşitkenar üçgen benzerdir.

Buna göre, yukarıdaki önermelerden kaç tanesi daima doğrudur?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

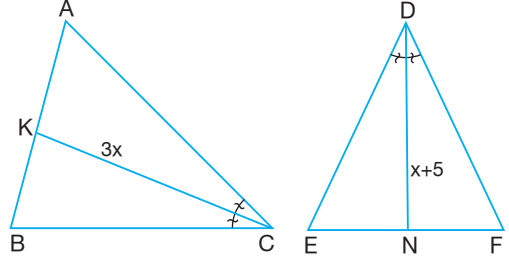


ABC üçgen
 DEF üçgen
 $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DEF})$
 $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{EDF})$
 $|AB| = 12$ birim
 $|DE| = 6$ birim
 $|DF| = 8$ birim

Buna göre, $|BC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

4.



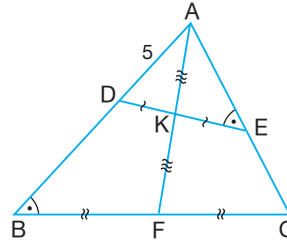
ABC üçgen, DEF üçgen, $[CK]$ açıortay,

$$\frac{\widehat{C(DEF)}}{\widehat{C(ABC)}} = \frac{3}{4}$$

Buna göre, $|DN|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 4 B) 6 C) 9 D) 11 E) 13

5.

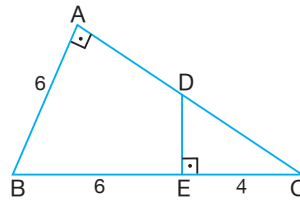


ABC üçgen
 $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ABC})$
 $|AK| = |KF|$
 $|DK| = |KE|$
 $|BF| = |FC|$
 $|AD| = 5$ birim

Buna göre, $|AC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

6.

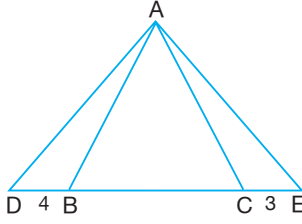


ABC dik üçgen
 $[DE] \perp [BC]$
 $|AB| = 6$ birim
 $|BE| = 6$ birim
 $|EC| = 4$ birim

Buna göre, $|AD|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 1 B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) 4

7.

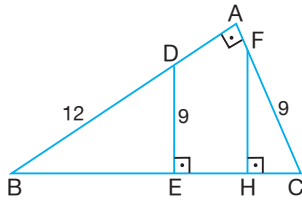


ABC eşkenar üçgen
 $m(\widehat{DAE}) = 120^\circ$
 $|DB| = 4$ birim
 $|CE| = 3$ birim

Buna göre, $|BC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 8
 D) $2\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{6}$

8.

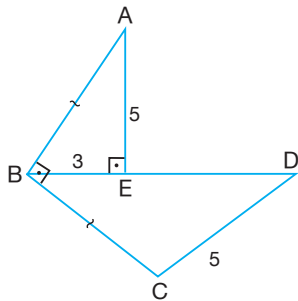


ABC dik üçgen
 DEB dik üçgen
 FHC dik üçgen
 $|BD| = 12$ birim
 $|DE| = 9$ birim
 $|FC| = 9$ birim

Buna göre, $|HC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 2 B) $\frac{16}{3}$ C) 4 D) 5 E) $\frac{27}{4}$

9.

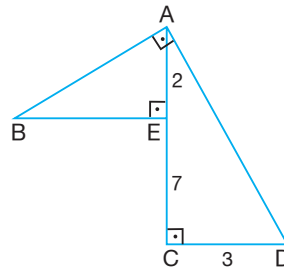


DBC üçgen
 AEB dik üçgen
 $[AB] \perp [BC]$
 $|AB| = |BC|$
 $|BE| = 3$ birim
 $|AE| = 5$ birim
 $|DC| = 5$ birim

Buna göre, $|ED|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10.

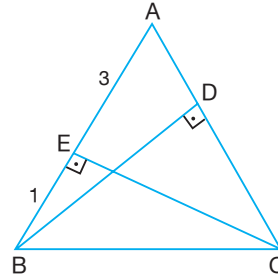


AEB dik üçgen
 ACD dik üçgen
 $[AB] \perp [AD]$
 $|AE| = 2$ birim
 $|CE| = 7$ birim
 $|CD| = 3$ birim

Buna göre, $|BE|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

11.

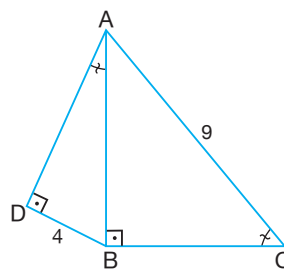


ABC üçgen
 $[BD] \perp [AC]$
 $[CE] \perp [AB]$
 $|CD| = 2|DA|$
 $|AE| = 3$ birim
 $|EB| = 1$ birim

Buna göre, $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

- A) 15 B) 30 C) 35 D) 60 E) 75

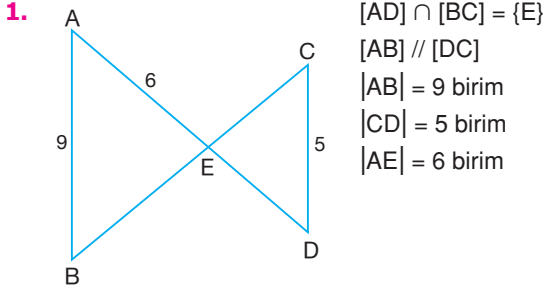
12.



ADB dik üçgen
 ABC dik üçgen
 $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{BCA})$
 $|AC| = 9$ birim
 $|DB| = 4$ birim

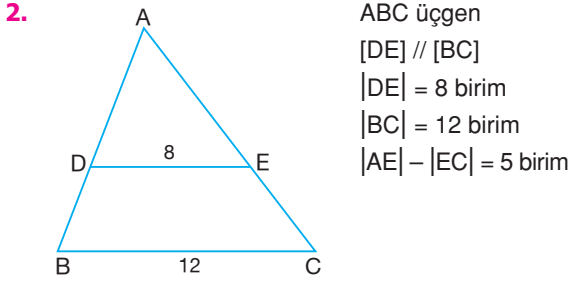
Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8



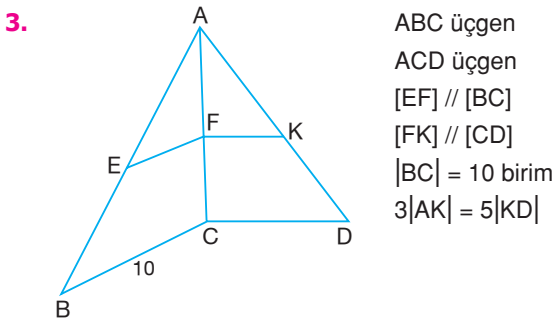
Buna göre, $|ED|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\frac{8}{3}$ B) 3 C) $\frac{10}{3}$ D) 4 E) $\frac{15}{2}$



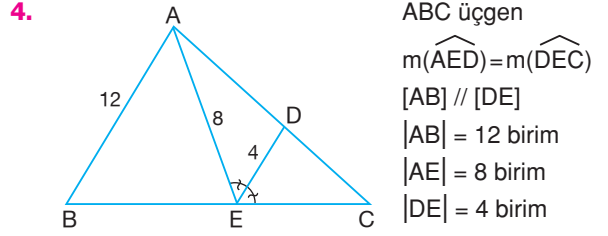
Buna göre, $|AC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 18



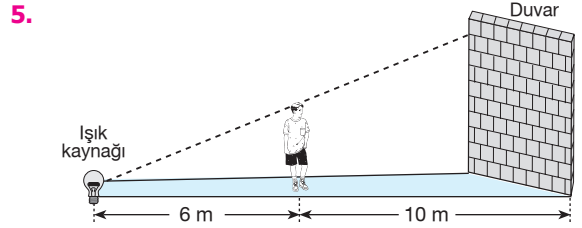
Buna göre, $|EF|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\frac{9}{2}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{21}{4}$ D) $\frac{23}{4}$ E) $\frac{25}{4}$



Buna göre, $|EC|$ uzunluğu kaç birimdir?

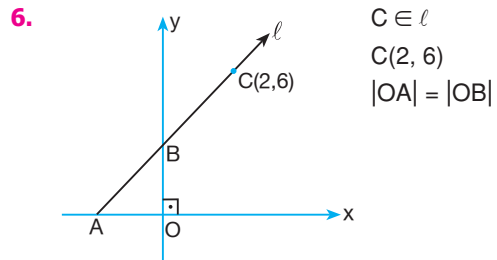
- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8



Işık kaynağından 6 m uzaklıkta bulunan Mert'in duvar ile arasındaki mesafe 10 m dir.

Mert'in boyu 156 cm olduğuna göre, duvardaki gölgesinin boyu kaç cm dir?

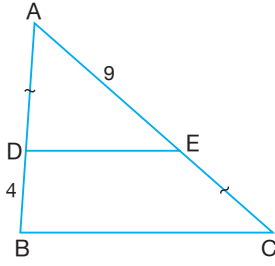
- A) 416 B) 424 C) 436 D) 448 E) 452



Yukarıdaki verilere göre, A noktasının apsisi kaçtır?

- A) -3 B) -4 C) -5 D) -6 E) -7

7.

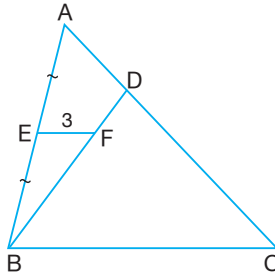


ABC üçgen
 $[DE] \parallel [BC]$
 $|AD| = |EC|$
 $|AE| = 9$ birim
 $|DB| = 4$ birim

Buna göre, $|AD| = |EC|$ kaç birimdir?

- A) 8 B) 6 C) 5 D) $\frac{9}{2}$ E) 4

8.

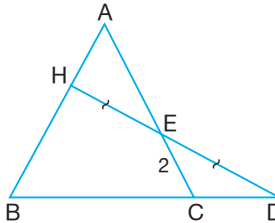


ABC üçgen
 B, F, D doğrusal
 $[EF] \parallel [BC]$
 $|AC| = 4|AD|$
 $|AE| = |EB|$
 $|EF| = 3$ birim

Buna göre, $|BC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 18 B) 17 C) 16 D) 15 E) 12

9.

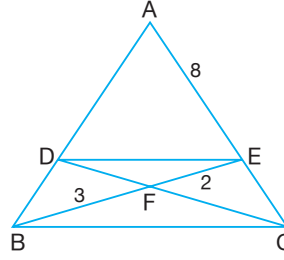


ABC eşkenar üçgen
 H, E, D doğrusal
 B, C, D doğrusal
 $|HE| = |ED|$
 $|EC| = 2$ birim

Buna göre, $|AE| - |AH|$ farkı kaç birimdir?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

10.

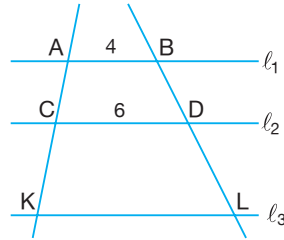


ABC üçgen
 $[DE] \parallel [BC]$
 $|AE| = 8$ birim
 $|EF| = 2$ birim
 $|FB| = 3$ birim

Buna göre, $|EC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

11.

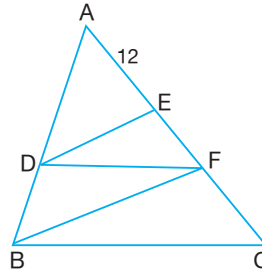


$\ell_1 \parallel \ell_2 \parallel \ell_3$
 $3|AC| = 2|CK|$
 $|AB| = 4$ birim
 $|CD| = 6$ birim

Buna göre, $|KL|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

12.

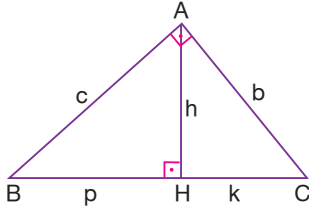


ABC üçgen
 $[DF] \parallel [BC]$
 $[DE] \parallel [BF]$
 $|AD| = 2|DB|$
 $|AE| = 12$ birim

Buna göre, $|FC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

Dik Üçgende Metrik Bağıntılar

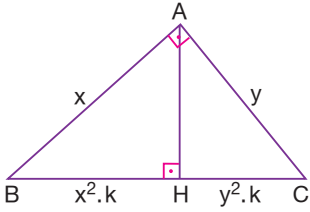


ABC dik üçgeninde
 $[BA] \perp [AC]$
 $[AH] \perp [BC]$ ise

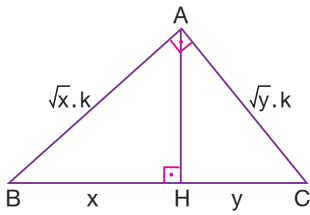
$$\left. \begin{aligned} h^2 &= p \cdot k \\ b^2 &= k(k + p) \\ c^2 &= p(p + k) \end{aligned} \right\} \text{bağıntılara öklid bağıntılarını denir.}$$

✓ Pratik Bilgi

1

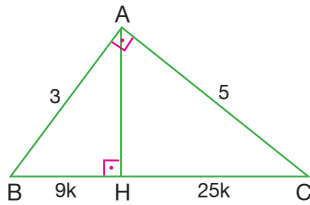


2

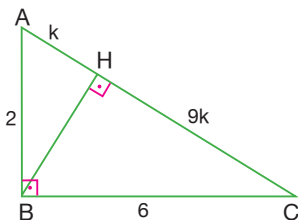


Aşağıdaki örnekleri inceleyip, oranların nasıl yazıldığını anlamaya çalışınız.

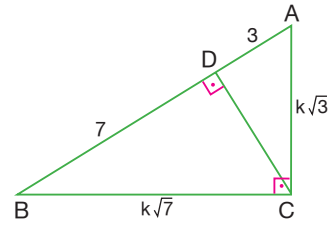
1



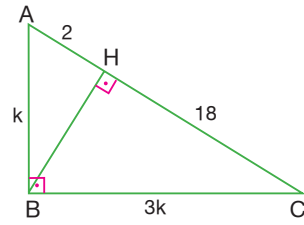
2



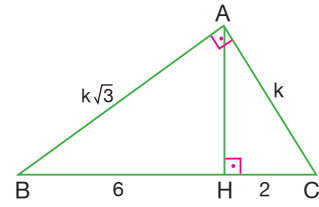
3



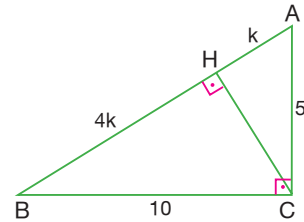
4



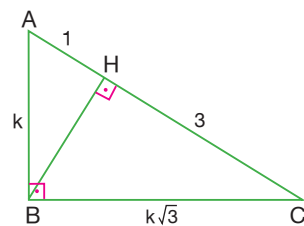
5



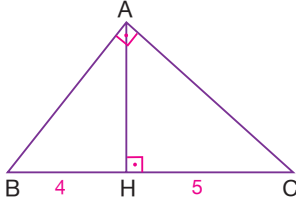
6



7



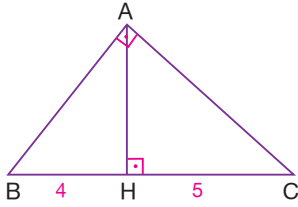
ÖRNEK - 1



ABC dik üçgen
 $[AH] \perp [BC]$
 $|BH| = 4$ birim
 $|HC| = 5$ birim

Buna göre, $\langle \vec{AB}, \vec{AH} \rangle$ iç çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM

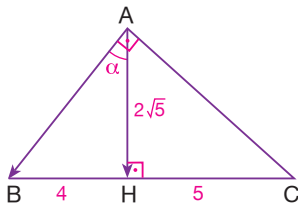


ABC dik üçgeninde Öklid bağıntısı ile

$|AH|^2 = |BH| \cdot |HC|$ eşitliğinden,

$$|AH|^2 = 4 \cdot 5$$

$|AH| = 2\sqrt{5}$ birim bulunur.

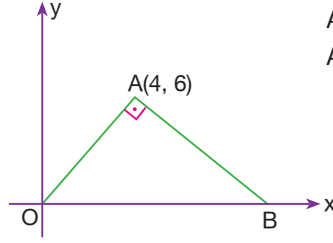


O halde,

$$\langle \vec{AB}, \vec{AH} \rangle = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AH}\| \cdot \cos \alpha$$

$$= \|\vec{AB}\| \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{|\vec{AB}|} = 20 \text{ birim bulunur.}$$

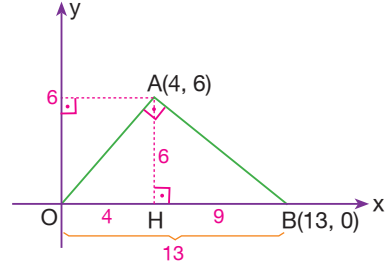
ÖRNEK - 2



AOB dik üçgen
 $A(4, 6)$

Verilenlere göre, $\triangle AOB$ nin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM



$[AH] \perp [OB]$ olduğundan Öklid teoremini uygularsak

$$|AH|^2 = |OH| \cdot |HB|$$

$$6^2 = 4 \cdot |HB|$$

$|HB| = 9$ birim ve dolayısıyla,

$|OB| = 13$ birim olur.

$\triangle AOB$ nin köşe koordinatları,

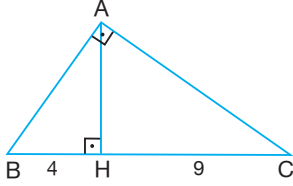
$A(4, 6)$, $O(0, 0)$ ve $B(13, 0)$

olduğundan ağırlık merkezinin koordinatları

$$G\left(\frac{4+0+13}{3}, \frac{6+0+0}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{17}{3}, 2\right) \text{ bulunur.}$$

1.

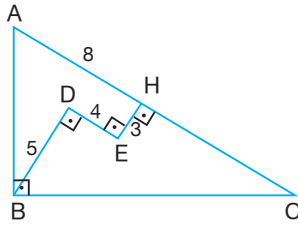


ABC dik üçgen
 $[AH] \perp [BC]$
 $|HC| = 9$ birim
 $|BH| = 4$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AH|$ kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

2.

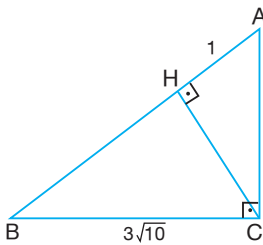


ABC dik üçgen
 $[BD] \perp [DE]$
 $[DE] \perp [EH]$
 $[EH] \perp [AC]$
 $|AH| = 8$ birim
 $|BD| = 5$ birim
 $|DE| = 4$ birim
 $|EH| = 3$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|HC|$ kaç birimdir?

- A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

3.

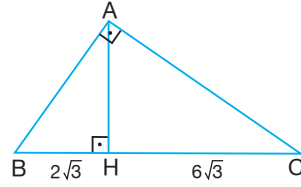


ABC dik üçgen
 $[CH] \perp [AB]$
 $|BC| = 3\sqrt{10}$ birim
 $|AH| = 1$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AC|$ kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) $\sqrt{10}$ D) $\sqrt{11}$ E) $2\sqrt{3}$

4.

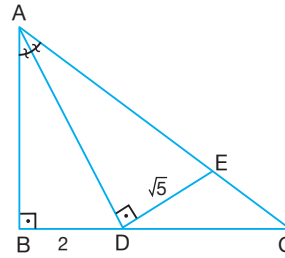


ABC dik üçgen
 $[AH] \perp [BC]$
 $|BH| = 2\sqrt{3}$ br
 $|HC| = 6\sqrt{3}$ br

Yukarıdaki verilere göre, $|AC|$ kaç birimdir?

- A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

5.

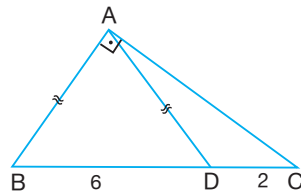


ABC üçgen
 $[AB] \perp [BC]$
 $[AD] \perp [DE]$
 $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC})$
 $|BD| = 2$ birim
 $|DE| = \sqrt{5}$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|DC|$ kaç birimdir?

- A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) 3 D) $\frac{10}{3}$ E) 4

6.

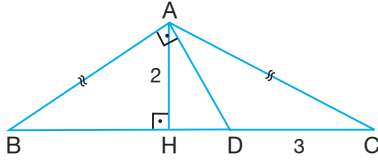


ABC dik üçgen
 $|AB| = |AD|$
 $|BD| = 6$ birim
 $|DC| = 2$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AD|$ kaç birimdir?

- A) 6 B) $4\sqrt{2}$ C) $\sqrt{30}$
D) $2\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{3}$

7.

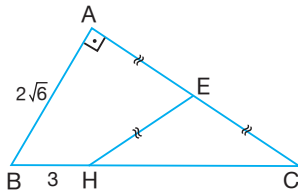


ABC üçgen
 $|AB| = |AC|$
 $[AB] \perp [AD]$
 $[AH] \perp [BC]$
 $|AH| = 2$ br
 $|DC| = 3$ br

Yukarıdaki verilere göre, $|HD|$ kaç birimdir?

- A) 2,5 B) 2 C) 1,5 D) 1 E) 0,5

8.

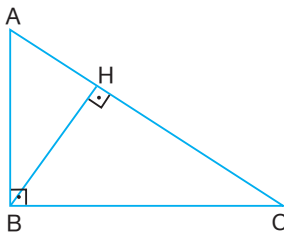


ABC dik üçgen
 $|AE| = |EC| = |EH|$
 $|BH| = 3$ birim
 $|AB| = 2\sqrt{6}$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|HE|$ kaç birimdir?

- A) $\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 3
 D) $\sqrt{10}$ E) $\sqrt{11}$

9.

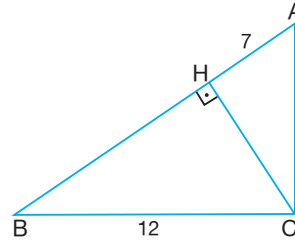


ABC dik üçgen
 $[BH] \perp [AC]$
 $9|AH| = 4|HC|$

Yukarıdaki verilere göre, $\frac{|AB|}{|BC|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{3}$

10.

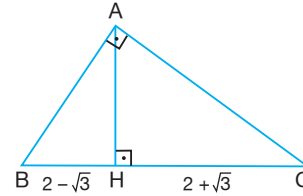


ABC üçgen
 $[CH] \perp [AB]$
 $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACH})$
 $|AH| = 7$ birim
 $|BC| = 12$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|HC|$ kaç birimdir?

- A) $3\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{15}$ C) $\sqrt{59}$
 D) $\sqrt{58}$ E) $3\sqrt{6}$

11.

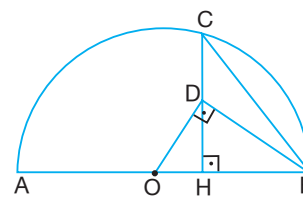


ABC dik üçgen
 $[AH] \perp [BC]$
 $|BH| = 2 - \sqrt{3}$ birim
 $|HC| = 2 + \sqrt{3}$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?

- A) 75 B) 60 C) 45 D) 22,5 E) 15

12.



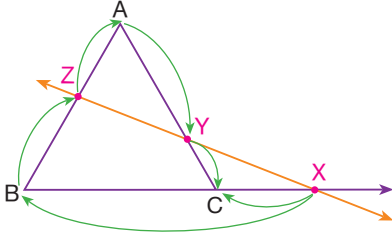
O merkezli
 yarım çemberde
 $[CH] \perp [AB]$
 $[OD] \perp [DB]$

Yukarıdaki verilere göre, $\frac{|BC|}{|BD|}$ oranı kaçtır?

- A) $\sqrt{5}$ B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) 1

Menelaus Teoremi

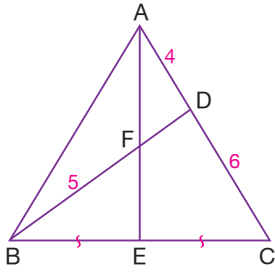
Bir ABC üçgeninde köşelerin hiçbiri ile çakışmayan ve [AB], [AC] ve [BC] doğru parçalarını ya da bunların uzantılarını kesen bir doğrunun noktaları X, Y, Z ise



$$\frac{|XC|}{|XB|} \cdot \frac{|BZ|}{|ZA|} \cdot \frac{|AY|}{|YC|} = 1$$

bağıntısına menelaus teoremi denir.

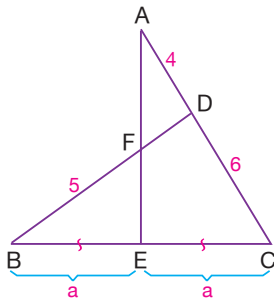
ÖRNEK - 1



ABC üçgen
 $[AE] \cap [BD] = \{F\}$
 $|CE| = |EB|$
 $|AD| = 4$ birim
 $|DC| = 6$ birim
 $|BF| = 5$ birim

Buna göre, $|FD|$ uzunluğunu bulalım.

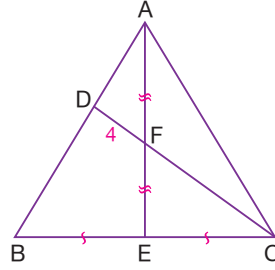
ÇÖZÜM



Menelaus teoremini uygularsak,

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{a}{a} \cdot \frac{5}{x} = 1 \text{ olup } x = 2 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

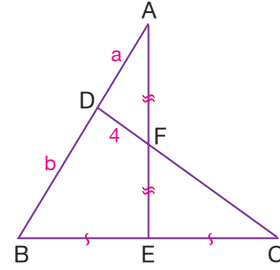


ABC üçgen
 $[AE] \cap [DC] = \{F\}$
 $|BE| = |EC|$
 $|AF| = |FE|$
 $|DF| = 4$ birim

Buna göre, $|FC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$|AD| = a$, $|DB| = b$ diyelim.



Şekilde C köşesinden başlayarak menelaus teoremi uygularsak,

$$\frac{|CE|}{|CB|} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{|AF|}{|FE|} = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{1} = 1 \text{ olup } b = 2a \text{ bulunur.}$$

Şimdi de A köşesinden başlayarak menelaus teoremi uygulayalım.

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{4} = 1$$

$$\frac{a}{3a} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{|CF|}{4} = 1 \text{ eşitliğinden}$$

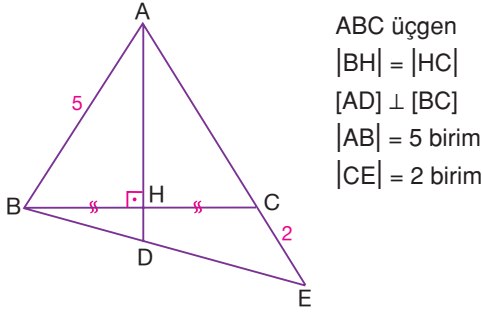
$|FC| = 12$ birim bulunur.



NOT :

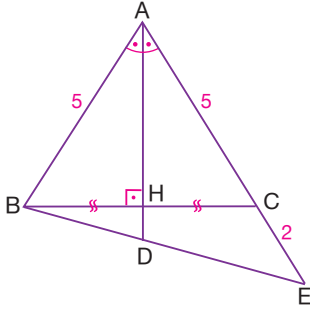
Yukarıdaki gibi bazı sorularda 2 defa menelaus teoremi uygulamak gerekebilir.

ÖRNEK - 3



Buna göre, $\frac{|AH|}{|HD|}$ oranını bulalım.

ÇÖZÜM :



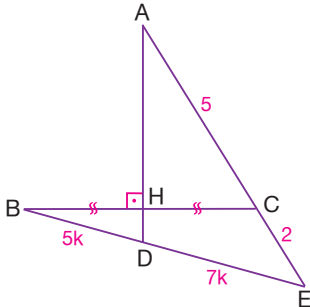
ABH ve ACH üçgenleri eşittir.
 (K.A.K. eşlik aksiyomu)

O halde, $|AC| = 5$ birim ve $m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{HAC})$ olur.

ABE üçgeninde iç açıortay teoremi ile

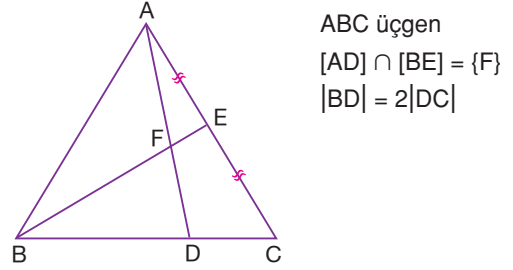
$$\frac{|BD|}{|DE|} = \frac{5}{7} \text{ olup,}$$

Menelaus teoremi ile,



$$\frac{5}{12} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{|AH|}{|HD|} = 1 \text{ ise } \frac{|AH|}{|HD|} = 6 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 4



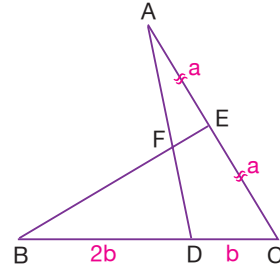
Buna göre, $\frac{A(\widehat{ABF})}{A(\widehat{AFE})}$ oranını bulalım.

ÇÖZÜM :

ABF ve AFE üçgenlerinin yükseklikleri eşit olduğundan,

$$\frac{A(\widehat{ABF})}{A(\widehat{AFE})} = \frac{|BF|}{|FE|} \text{ olur.}$$

Menelaus teoremi ile,



$$\frac{|AE|}{|AC|} \cdot \frac{|CD|}{|DB|} \cdot \frac{|BF|}{|FE|} = 1 \text{ eşitliğinden}$$

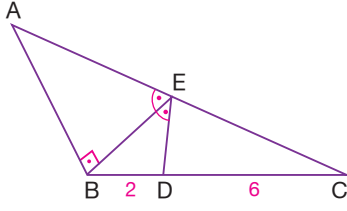
$$\frac{a}{2a} \cdot \frac{b}{2b} \cdot \frac{|BF|}{|FE|} = 1 \text{ olup}$$

$$\frac{|BF|}{|FE|} = 4 \text{ bulunur.}$$

O halde,

$$\frac{A(\widehat{ABF})}{A(\widehat{AFE})} = \frac{|BF|}{|FE|} = 4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 5

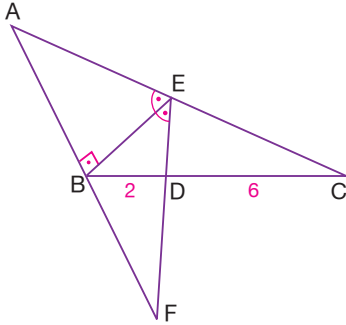


ABC üçgen
[EB] açıortay
[EB] $\perp$ [AB]
|BD| = 2 birim
|DC| = 6 birim

Buna göre, $\frac{|AE|}{|EC|}$ oranını bulalım.

ÇÖZÜM

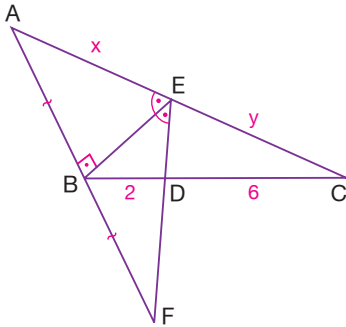
$ED \cap AB = \{F\}$ olacak şekilde F noktası belirleyelim.



[EB] açıortay ve [EB] $\perp$ [AF] olduğundan,

|AB| = |BF| ve |AE| = |EF| olur.

|AE| = x, |EC| = y diyelim.

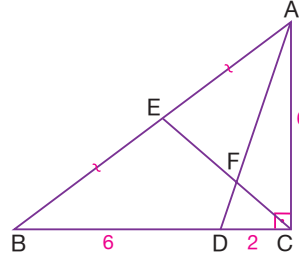


Menelaus teoreminden,

$$\frac{|FB|}{|FA|} \cdot \frac{|AE|}{|EC|} \cdot \frac{|CD|}{|DB|} = 1 \text{ olup}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{6}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{|AE|}{|EC|} = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 6



ABC dik üçgen
|AE| = |EB|
|AC| = 6 birim
|CD| = 2 birim
|DB| = 6 birim

Buna göre, |EF| uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$\triangle ABC$ nde Pisagor teoremi ile

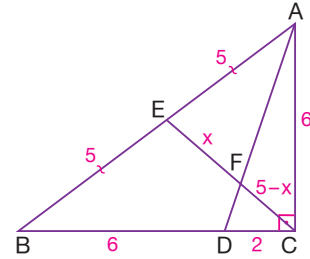
$$|AB|^2 = 6^2 + 8^2$$

$$|AB|^2 = 100 \Rightarrow |AB| = 10 \text{ birim olur.}$$

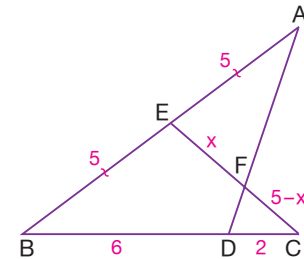
Bu durumda, |AE| = |EB| = 5 birim olduğundan,

Muhteşem üçlü ile |EC| = 5 birim dir.

|EF| = x dersek, |FC| = 5 - x olur.



Buradan,



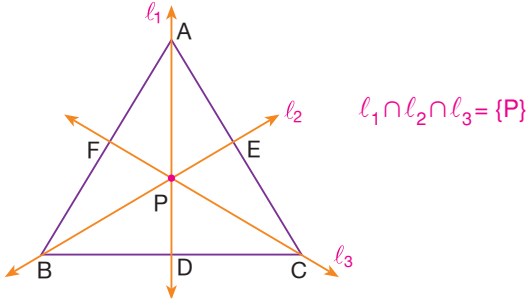
Menelaus teoremi ile,

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5-x}{x} = 1 \text{ eşitliğinden,}$$

x = 3 birim bulunur.

Seva Teoremi

Bir ABC üçgeninin üç köşesinden çıkan doğrular üçgenin iç bölgesinde bir P noktasında kesişirlerse,

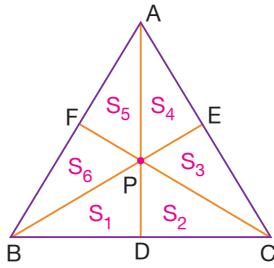


$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1 = \frac{|DP|}{|DA|} + \frac{|EP|}{|EB|} + \frac{|FP|}{|FC|}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{|CP|}{|CF|} + \frac{|AP|}{|AD|} + \frac{|BP|}{|BE|} \right) \text{ yazılabilir.}$$

Bu ifadeler **Seva teoremi** denir.

YA DA

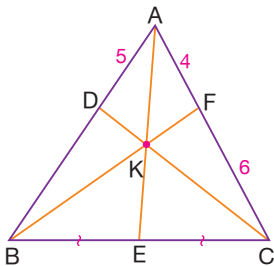


$[AD] \cap [BE] \cap [CF] = \{P\}$ ve $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$

Seva teoreminin bir sonucu olarak,

$$\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_3}{S_4} \cdot \frac{S_5}{S_6} = 1 \text{ yazılabilir.}$$

ÖRNEK - 1



ABC üçgen
 $|BE| = |EC|$
 $|AD| = 5$ birim
 $|CF| = 6$ birim
 $|FA| = 4$ birim

$[AE] \cap [BF] \cap [CD] = \{K\}$

Buna göre, $|BD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

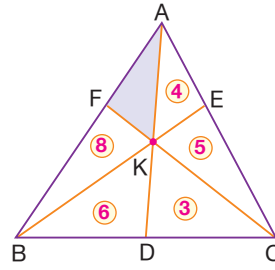
ABC üçgeninde Seva teoremini uygularsak,

$$\frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} \cdot \frac{|AD|}{|DB|} = 1$$

$$1 \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{5}{|BD|} = 1 \text{ olup}$$

$$|BD| = \frac{15}{2} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 2



ABC üçgen

$$A(\widehat{AKE}) = 4 \text{ br}^2$$

$$A(\widehat{EKC}) = 5 \text{ br}^2$$

$$A(\widehat{DKC}) = 3 \text{ br}^2$$

$$A(\widehat{BKD}) = 6 \text{ br}^2$$

$$A(\widehat{BFK}) = 8 \text{ br}^2$$

$$[AD] \cap [BE] \cap [CF] = \{K\}$$

Buna göre, **AFK üçgensel bölgesinin alanını** bulalım.

ÇÖZÜM

Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı tabanları oranına eşit olduğundan alanlar ile Seva teoremi yazılabilir.

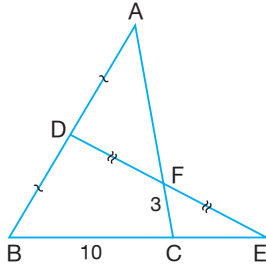
O halde,

$$\frac{|AE|}{|EC|} \cdot \frac{|CD|}{|DB|} \cdot \frac{|BF|}{|FA|} = 1 \text{ eşitliği}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{8}{A(\widehat{AFK})} = 1 \text{ şeklinde yazılırsa}$$

$$\text{Böylece, } A(\widehat{AFK}) = \frac{16}{5} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

1.

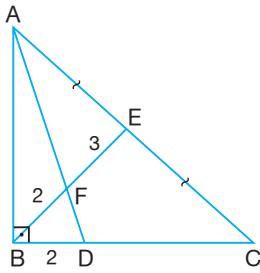


ABC üçgen
BED üçgen
 $[AC] \cap [DE] = \{F\}$
 $|AD| = |DB|$
 $|DF| = |FE|$
 $|BC| = 10$ birim
 $|FC| = 3$ birim

Buna göre, $|AF| + |CE|$ toplam kaç birimdir?

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 16

2.

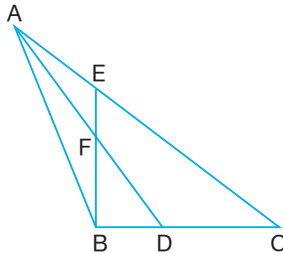


ABC dik üçgen
 $|AE| = |EC|$
 $|BF| = 2$ birim
 $|BD| = 2$ birim
 $|FE| = 3$ birim

Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

3.

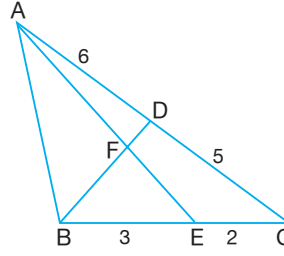


ABC üçgen
 $[AD] \cap [BE] = \{F\}$
 $5|AE| = |AC|$
 $4|BD| = 3|DC|$

Buna göre, $\frac{|EF|}{|FB|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{8}{15}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{4}{15}$ E) $\frac{2}{15}$

4.

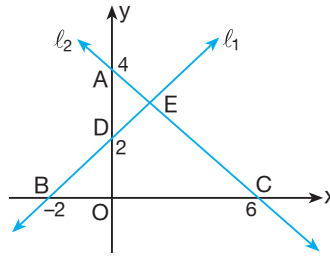


ABC üçgen
 $[AE] \cap [BD] = \{F\}$
 $|AD| = 6$ birim
 $|EC| = 2$ birim
 $|DC| = 5$ birim
 $|BE| = 3$ birim

Buna göre, $\frac{|FE|}{|AE|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{3}$

5.

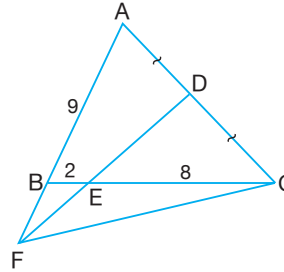


$l_1 \cap l_2 = \{E\}$

Buna göre, $\frac{|AE|}{|EC|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

6.

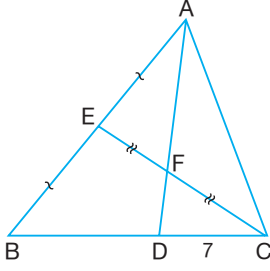


AFC üçgen
 $[DF] \cap [CB] = \{E\}$
 $|AD| = |DC|$
 $|AB| = 9$ birim
 $|BE| = 2$ birim
 $|EC| = 8$ birim

Buna göre, $|AF|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

7.

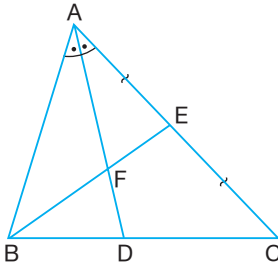


ABC üçgen
 $|AE| = |EB|$
 $|EF| = |FC|$
 $|DC| = 7$ birim

Buna göre, $|BD|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 21 B) 18 C) 14 D) 12 E) 10

8.

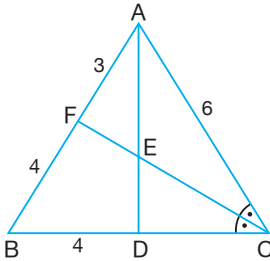


ABC üçgen
 $[AD]$ açıortay
 $[AD] \cap [BE] = \{F\}$
 $|AE| = |EC|$
 $|DC| = 3|DB|$

Buna göre, $\frac{3|FD| + |FE|}{|AF| + 2|FB|}$ oranı kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

9.

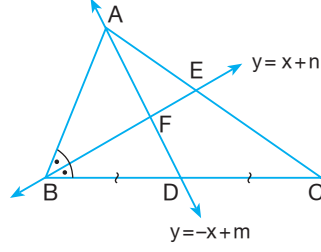


ABC üçgen
 $[AD] \cap [CF] = \{E\}$
 $[CF]$ açıortay
 $|FB| = 4$ birim
 $|BD| = 4$ birim
 $|AC| = 6$ birim
 $|AF| = 3$ birim

Buna göre, $|EF|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\frac{7}{5}$ B) $\frac{9}{5}$ C) $\frac{48}{5}$ D) $\frac{51}{5}$ E) $\frac{52}{5}$

10.

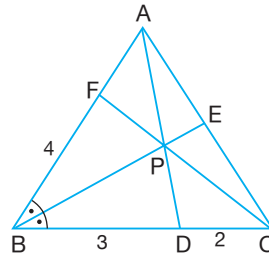


ABC üçgen
 $[BE]$ açıortay
 $|BD| = |DC|$

Buna göre, $\frac{|BF|}{|FE|}$ oranı kaç eşittir?

- A) $\frac{9}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) 3 D) $\frac{5}{2}$ E) 2

11.

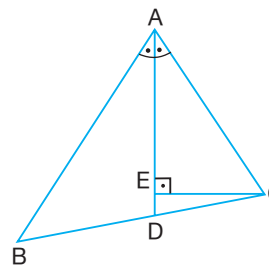


ABC üçgen
 $[BE]$ açıortay
 $|FB| = 4$ birim
 $|BD| = 3$ birim
 $|DC| = 2$ birim

Buna göre, $|AF|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\frac{32}{7}$ B) $\frac{33}{7}$ C) $\frac{34}{7}$ D) 5 E) 6

12.

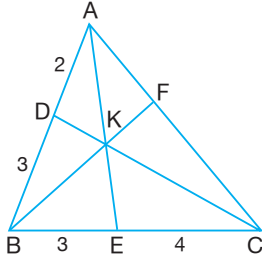


ABC üçgen
 $[AD]$ açıortay
 $[AE] \perp [EC]$
 $4|AB| = 5|AC|$

Buna göre, $\frac{|AE|}{|ED|}$ oranı kaç eşittir?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

1.

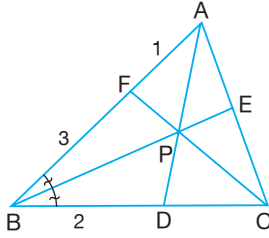


ABC üçgen
 $[AE] \cap [CD] \cap [BF] = \{K\}$
 $|DB| = 3$ birim
 $|BE| = 3$ birim
 $|EC| = 4$ birim
 $|AD| = 2$ birim

Buna göre, $\frac{|CF|}{|FA|}$ oranı kaçta eşittir?

- A) $\frac{7}{2}$ B) 3 C) $\frac{5}{2}$ D) 2 E) $\frac{3}{2}$

2.

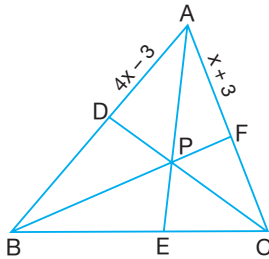


ABC üçgen
 $[BE]$ açıortay
 $|AF| = 1$ birim
 $|FB| = 3$ birim
 $|BD| = 2$ birim
 $[AD] \cap [BE] \cap [CF] = \{P\}$

Buna göre, $|DC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{9}$

3.

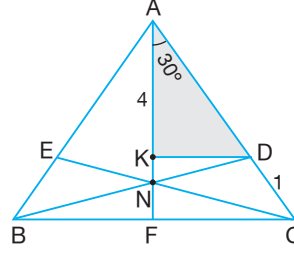


ABC üçgen
 $|BE| = 2|BD|$
 $|EC| = |FC|$
 $|AD| = 4x - 3$
 $|AF| = x + 3$
 $[AE] \cap [BF] \cap [CD] = \{P\}$

Buna göre, $|AD|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 1 B) $\frac{8}{7}$ C) $\frac{15}{7}$ D) $\frac{10}{7}$ E) $\frac{11}{7}$

4.



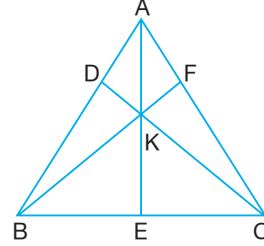
ABC üçgen
 $|AK| = 4$ birim
 $|DC| = 1$ birim
 $|AE| = 2|BE|$
 $|BF| = 3|FC|$
 $m(\widehat{FAD}) = 30^\circ$

$[AF] \cap [EC] \cap [BD] = \{N\}$

Buna göre, $A(\widehat{AKD})$ kaç birim karedir?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

5.

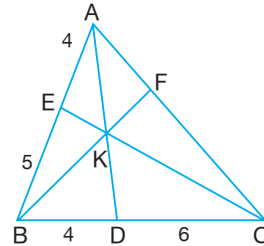


ABC üçgen
 $[AE] \cap [BF] \cap [CD] = \{K\}$

Buna göre, $\frac{|AK|}{|AE|} + \frac{|BK|}{|BF|} + \frac{|CK|}{|CD|}$ toplamı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.

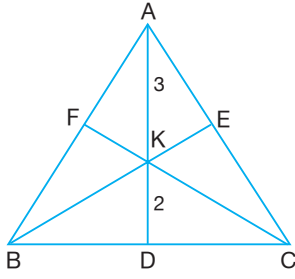


ABC üçgen
 $|AE| = 4$ birim
 $|EB| = 5$ birim
 $|BD| = 4$ birim
 $|DC| = 6$ birim
 $[AD] \cap [BF] \cap [CE] = \{K\}$

Buna göre, $\frac{|BK|}{|KF|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{23}{12}$ B) $\frac{7}{15}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{11}{5}$

7.

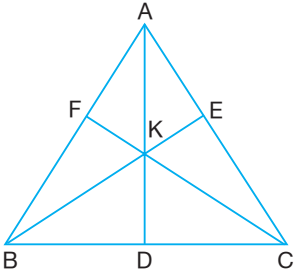


ABC üçgen
 $[AD] \cap [BE] \cap [CF] = \{K\}$
 $|AK| = 3$ birim
 $|KD| = 2$ birim

Buna göre, $\frac{|AE|}{|EC|} + \frac{|AF|}{|FB|}$ toplamı kaçtır?

- A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

8.

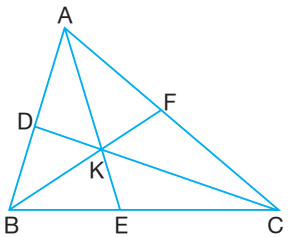


ABC üçgen
 $[AD] \cap [BE] \cap [CF] = \{K\}$

Buna göre, $\frac{|EK|}{|EB|} + \frac{|DK|}{|DA|} + \frac{|FK|}{|FC|}$ toplamı kaçtır?

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

9.

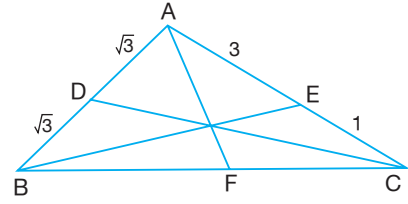


ABC üçgen
 $\frac{A(\widehat{ADK})}{A(\widehat{BDK})} = \frac{2}{3}$
 $\frac{A(\widehat{AKF})}{A(\widehat{KFC})} = \frac{3}{4}$

Buna göre, $\frac{|BE|}{|EC|}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{6}{11}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{9}{8}$ D) $\frac{12}{7}$ E) $\frac{5}{14}$

10.

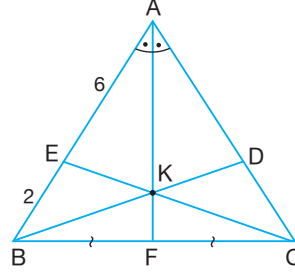


ABC üçgen, $m(\widehat{BAC}) = 150^\circ$, $|AD| = \sqrt{3}$ birim
 $|BD| = \sqrt{3}$ birim, $|AE| = 3$ birim, $|EC| = 1$ birim

Buna göre $|BF|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\frac{3\sqrt{13}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ C) $\frac{2\sqrt{13}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{13}}{4}$

11.

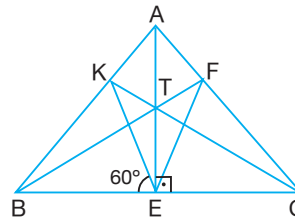


ABC üçgen
 $[AF] \cap [BD] \cap [EC] = \{K\}$
 $[AF]$ açıortay
 $|AE| = 6$ birim
 $|EB| = 2$ birim
 $|BF| = |FC|$

Buna göre, $|DC|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

12.



ABC üçgen
 $[AE] \cap [BF] = \{T\}$
 $[BF] \cap [CK] = \{T\}$
 $[AE] \perp [BC]$
 $m(\widehat{KEB}) = 60^\circ$

Buna göre, AEF açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 45 B) 30 C) 25 D) 20 E) 15



ÇEMBER



ÜNİTE - 10

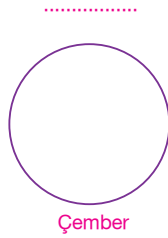
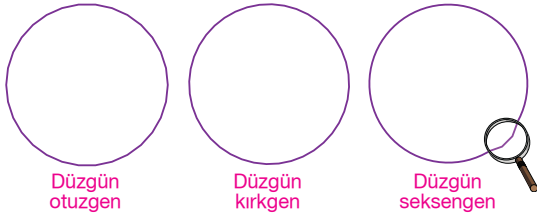
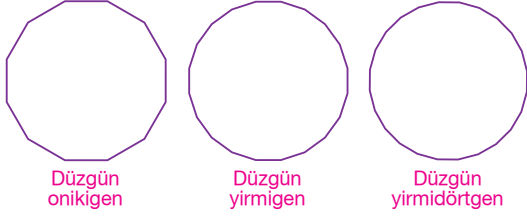
- Çemberin Temel Elemanları
- Çemberin Vektörel Denklemi
- Çemberin Genel Denklemi
- Çemberin Parametrik Denklemi
- Bir Çember İle Bir Doğrunun Birbirine Göre Durumu
- Çemberde Açı
- Denklemi Verilen İki Çemberin Birbirine Göre Konumları
- Çemberde Kiriş ve Kesenler İle İlgili Özellikler
- Bir Çemberin Kuvvet Fonksiyonu
- Kuvvet Ekseni
- Teğetler Dörtgeni, Kirişler Dörtgeni
- Batlamyüs (Ptolemy) Teoremi
- Çemberin Çevre Uzunluğu ve Dairenin Alan Bağıntıları

"Matematiksel olarak gösterilemeyen hiçbir araştırma gerçek bilim sayılamaz."

(Leonardo da Vinci)



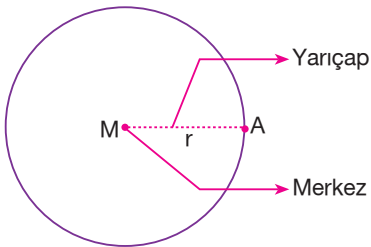
- Bir düzgün çokgenin kenar sayısı istenildiği kadar artırıldığında yaklaşık olarak bir çember elde edilebilir.



Tanım : Düzlemde sabit bir M noktasından sabit bir r uzaklığında bulunan noktaların geometrik yerine çember denir.

Çemberin Temel Elemanları

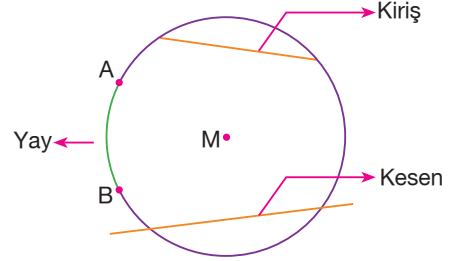
- Yarıçap
- Merkez



Merkezi M, yarıçap uzunluğu r olan çember $\mathcal{C}(M, r)$ ile gösterilir.

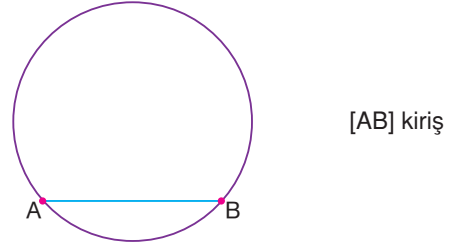
Çemberin Yardımcı Elemanları

- Kiriş
- Kesen
- Yay



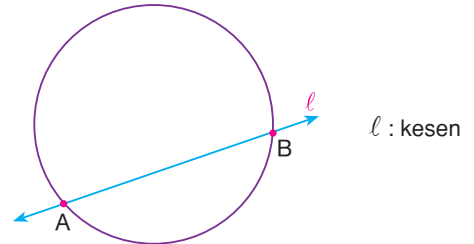
Kiriş

Çemberin farklı iki noktasını birleştiren doğru parçasıdır.



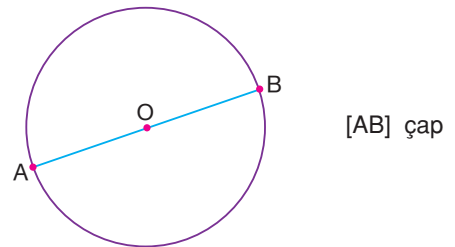
Kesen

Çemberin iki noktasından geçen doğrudur.



Çap

Çemberin merkezinden geçen kirişidir.

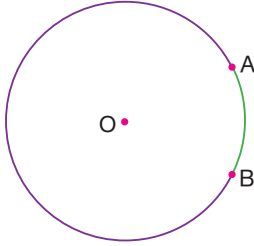


Bir çemberde en uzun kiriş çaptır.



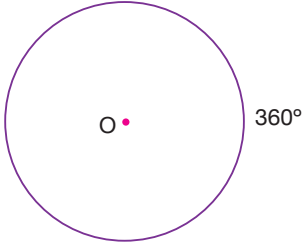
Yay

Çemberin bir parçasıdır.



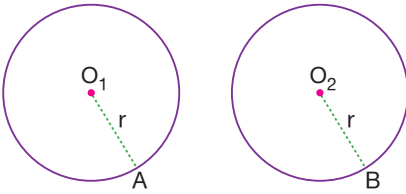
$\widehat{AB}$: AB yayı
 $m(\widehat{AB})$: AB yayının ölçüsü
 $|\widehat{AB}|$: AB yayının uzunluğu

- Bir tam çember yayının ölçüsü derece cinsinden 360° dir.



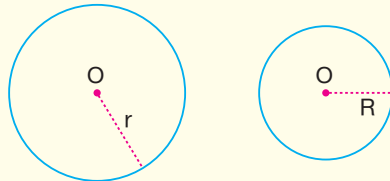
Eş Çember

Yarıçap uzunlukları eşit olan çemberlerdir.



NOT :

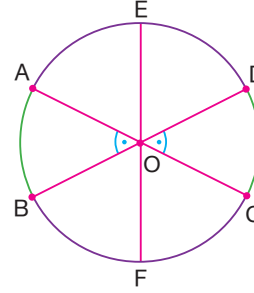
Eş olmayan çemberlere **benzer çemberler** denir.



İki çember ya **benzer** ya da **eş** tir.

Eş Yaylar – Komşu Yaylar

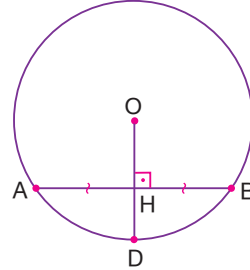
Bir çemberde ölçüleri aynı olan iki yaya **eş yaylar** denir.



- $\widehat{AB}$ ve $\widehat{CD}$ eş yaylardır.
 ➤ $\widehat{ED}$ ve $\widehat{DC}$ komşu yaylardır.

Teorem :

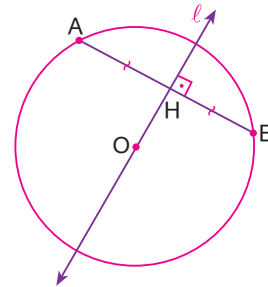
Bir çemberin merkezinden kirişe indirilen dikme kirişi ve kirişin ayırdığı yayı ortalara.



O, merkez ve
 $[OD] \perp [AB]$ ise
 $|AH| = |HB|$
 $m(\widehat{AD}) = m(\widehat{DB})$

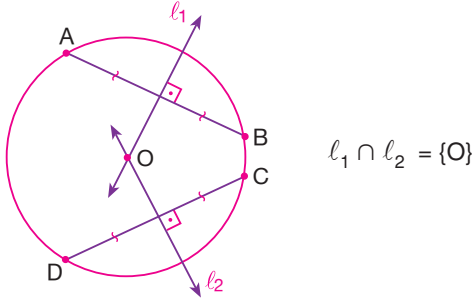
Teorem :

Bir çemberin herhangi bir kirişinin orta dikmesi çemberin merkezinden geçer.



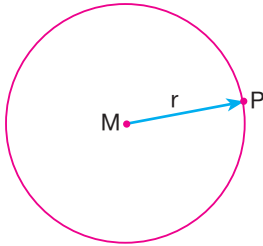
Yukarıdaki çemberin merkezi AB kirişinin orta dikmesi olan ℓ doğrusunun üzerindedir.

O halde; bir çemberde herhangi iki kirisin orta dikmelerinin kesim noktası merkezi belirler.



Yukarıdaki çemberde ℓ_1 ve ℓ_2 doğrularının kesim noktası çemberin merkezidir.

Çemberin Vektörel Deklemi



P çember üzerinde değişken bir nokta ise, $\|\vec{MP}\| = r$ ifadesi çemberin vektörel denklemdir.

$M(a, b)$ sabit nokta ve çember üzerinde değişken bir nokta $P(x, y)$ olsun.

$$\vec{MP} = P - M = (x - a, y - b) \text{ olup}$$

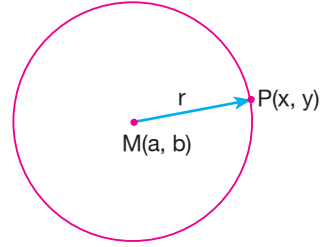
$$\|\vec{MP}\| = r \text{ vektörel denklemi,}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

standart denklem haline getirilebilir.

SONUÇ :

Merkezi $M(a, b)$ noktası ve yarıçap r uzunluğu olan çemberin üzerindeki değişken nokta $P(x, y)$ olsun.



Bu durumda;

✓ Çemberin vektörel denklemi : $\|\vec{MP}\| = r$

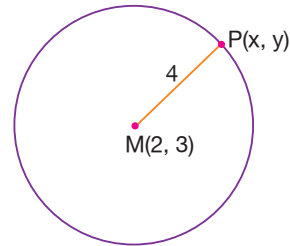
✓ Çemberin standart denklemi : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

ÖRNEK - 1

Merkezi $M(2, 3)$ ve 4 birim yarıçaplı çemberin vektörel ve standart denklemlerini bulalım.

ÇÖZÜM :

$P(x, y)$ çember üzerindeki değişken nokta olsun.



Bu durumda,

$$\|\vec{MP}\| = 4 \text{ çemberin vektörel denklemdir.}$$

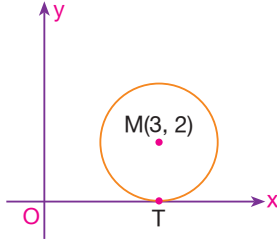
$$\vec{MP} = P - M = (x - 2, y - 3) \text{ olup}$$

$$\|\vec{MP}\| = 4 \text{ eşitliğinden,}$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

standart denklem elde edilir.

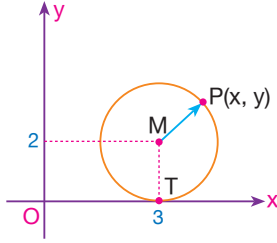
ÖRNEK - 2



Ox eksenine T noktasında teğet olan M(3, 2) merkezli çemberin vektörel ve standart denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

Çemberin yarıçap uzunluğu $r = \|\vec{MT}\| = 2$ birimdir.



O halde çember üzerinde değişken bir nokta,

$P(x, y)$ olmak üzere,

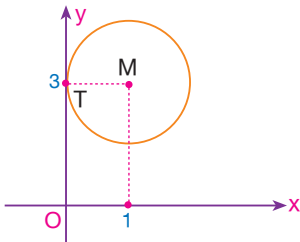
$\|\vec{MP}\| = 2$ vektörel denklem ve

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 2$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$$

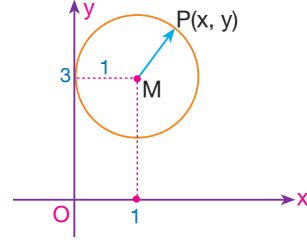
standart denklemi elde edilir.

ÖRNEK - 3



Yukarıda y eksenine T noktasında teğet olan M merkezli çemberin vektörel ve standart denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :



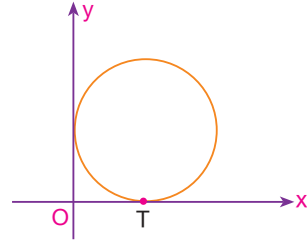
$M(1, 3)$ ve $r = 1$ birim olan çember üzerinde değişken bir nokta $P(x, y)$ olsun.

$\|\vec{MP}\| = 1$ vektörel denklem ve

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1^2$$

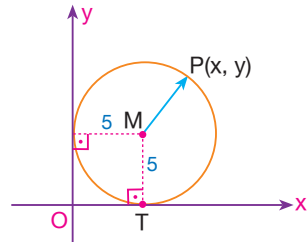
standart denklemi elde edilir.

ÖRNEK - 4



Yukarıda I. bölgede eksenlere teğet olup yarıçap uzunluğu 5 birim olan çemberlerin vektörel ve standart denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :



$M(5, 5)$ ve $r = 5$ birim olduğundan,

$\|\vec{MP}\| = 5$ vektörel denklem,

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

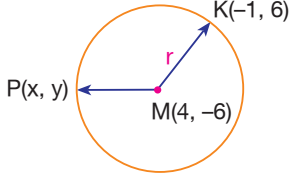
standart denklemi elde edilir.



ÖRNEK - 5

Merkezinin koordinatları $M(4, -6)$ olan ve $K(-1, 6)$ noktasından geçen çemberin vektörel ve standart denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :



$$|MK| = r = \sqrt{(4+1)^2 + (-6-6)^2}$$

$r = 13$ birim bulunur.

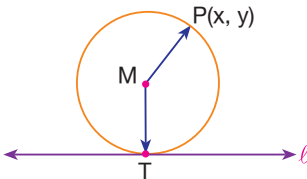
$$\|\vec{MP}\| = 13 \text{ vektörel denklem}$$

$$(x-4)^2 + (y+6)^2 = 13^2 \text{ standart denklem elde edilir.}$$

ÖRNEK - 6

Merkezinin koordinatları $M(-3, 2)$ olan ve $\ell : 3x + 4y + 16 = 0$ doğrusuna teğet olan çemberin vektörel ve standart denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :



M noktasının $3x + 4y + 16 = 0$ doğrusuna uzaklığı,

$$\|\vec{MT}\| = r = \frac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 + 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$r = 3$ birim bulunur.

$$\|\vec{MP}\| = 3 \text{ vektörel denklem ve}$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 3^2 \text{ standart denklem elde edilir.}$$

Çemberin Genel Denklemi

Kapalı Denklemi ;

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \text{ olan ifade,}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Bu denklemde,

$$-2a = D, -2b = E \text{ ve } a^2 + b^2 - r^2 = F \text{ alınarak,}$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

denklemini elde edilir ve bu denkleme çemberin genel denklemi denir.

O halde,

Kapalı Denklemi :

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

olan çemberin merkezinin koordinatları,

$$M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \text{ ve}$$

yarıçap uzunluğu,

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F} \text{ ile bulunur.}$$



NOT :

a) $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Denkleminin çember belirtmesi için,

1. $A = C \neq 0$
2. $B = 0$
3. $D^2 + E^2 - 4F > 0$ olmalıdır.

b) $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ denklemi

1. $D^2 + E^2 - 4F = 0$ ise nokta
2. $D^2 + E^2 - 4F < 0$ ise boş küme belirtir.



ÖRNEK - 1

Genel denklemini, $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0$ olan çemberin merkezinin koordinatlarını ve yarıçap uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

Çemberin kapalı denkleminde,

$D = -2$, $E = 6$, $F = -5$ olduğundan,

$$M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = M\left(\frac{-2}{-2}, \frac{-6}{2}\right) = M(1, -3)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} \text{ eşitli inden}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 6^2 - 4 \cdot (-5)} \text{ ve}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 + 20}$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{15}$$

$r = \sqrt{15}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 2

Genel denklemini $x^2 + y^2 + 8x - 1 = 0$ olan çemberin merkezinin koordinatlarını ve yarıçap uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

Çemberin kapalı denkleminde,

$D = 8$, $E = 0$, $F = -1$ olduğundan,

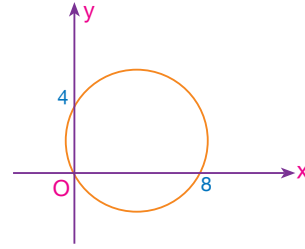
$$M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = M(-4, 0) \text{ ve}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 0^2 - 4 \cdot (-1)} \text{ eşitliğinden}$$

$r = \sqrt{17}$ birim bulunur.

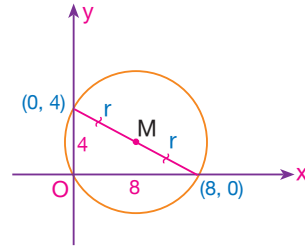


ÖRNEK - 3



Yukarıdaki çemberin genel denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :



$$M\left(\frac{0+8}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = M(4, 2) \text{ ve}$$

Pisagor bağıntısı ile $4r^2 = 4^2 + 8^2$

$r = 2\sqrt{5}$ birim bulunur.

O halde genel denklemin,

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 20 \text{ eşitliğinden}$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 4

$x^2 + y^2 + 8x - 6y - 9 = 0$ çemberinin Ox ekseninde ayırdığı kirişin uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

1 Yol :

Ox ekseninde ayırdığı kirişin uç noktalarını bulmak için $y = 0$ alınır.

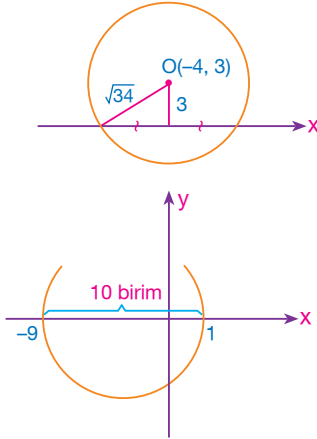
$$x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow (x + 9) \cdot (x - 1) = 0$$

Yani, Ox eksenini $(-9, 0)$ ve $(1, 0)$ noktalarında kesiyor.

Dolayısıyla kiriş uzunluğu,

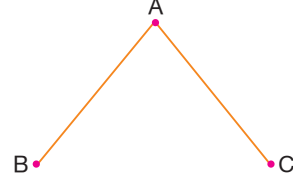
$$1 - (-9) = 10 \text{ birim bulunur.}$$

2 Yol :

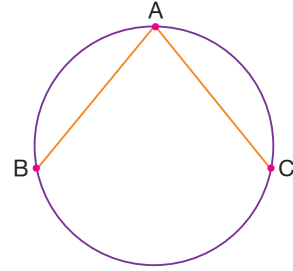


Koordinat Düzleminde (doğrusal olmayan) Herhangi Üç Noktadan Geçen Çemberlerin Denklemi

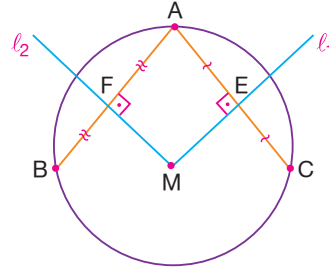
Verilen noktalar A, B, C olsun,



A, B, C noktalarından geçen çember için, [AB] ve [AC] birer kiriş olur.



Kirişlerin orta dikme doğruları merkezde kesiştiğinden,



$$\langle \overrightarrow{ME}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0 \text{ ve } \langle \overrightarrow{MF}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$$

eşitliklerinden elde edilen l_1 ve l_2 doğrularının ara kesiti ile M noktası bulunur.

Böylece, merkezi M ve üzerindeki bir noktası, (A, B, C den biri) bilinen çember denklemi bulunmuş olur.

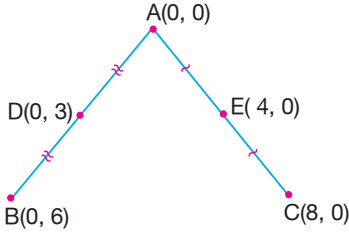
ÖRNEK - 1

A(0, 0), B(0, 6) ve C(8, 0) noktalarından geçen çemberin vektörel ve standart denklemini bulalım.

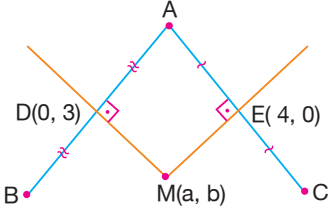
ÇÖZÜM - 1

[AB] nin orta noktası $\left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = D(0, 3)$

[AC] nin orta noktası $\left(\frac{0+8}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = E(4, 0)$ olup



[AB] ve [AC] nin kenar orta dikmeleri çemberin merkezi üzerinde kesişeceğinden,



$\langle \vec{AC}, \vec{ME} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{MD}, \vec{AB} \rangle = 0$ olmalıdır.

$\vec{AC} = C - A = (8, 0)$

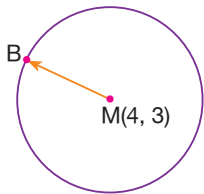
$\vec{ME} = E - M = (4 - a, -b)$

$\vec{MD} = D - M = (-a, 3 - b)$

$\vec{AB} = B - A = (0, 6)$

$$\begin{cases} \langle \vec{AC}, \vec{ME} \rangle = 0 \Rightarrow 8(4 - a) - b \cdot 0 = 0 \\ \langle \vec{MD}, \vec{AB} \rangle = 0 \Rightarrow a \cdot 0 + 6(3 - b) = 0 \end{cases} \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Böylece, M(4, 3) olur.

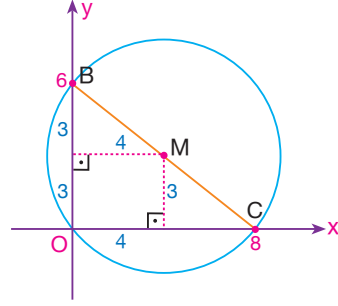


Standart denklemini,

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ olarak yazılabilir.

Dolayısıyla çemberin vektörel denklemini, $\|\vec{MB}\| = 5$ bulunur.

ÇÖZÜM - 2



$\widehat{m(\text{BOC})} = 90^\circ$ olduğundan [BC] çaptır.

M(4, 3) olup $r = 5$ birim bulunur.

Böylece,

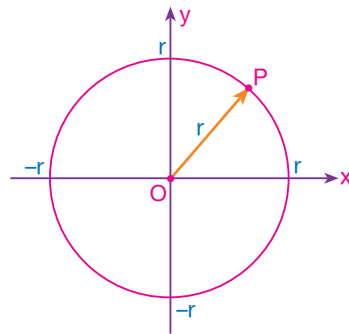
Vektörel denklemini, $\|\vec{MP}\| = 5$ ve

Standart denklemini, $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ bulunur.



Merkezli Çember

Merkezi koordinat başlangıcı olan çemberdir.



$\|\vec{OP}\| = r$ ya da $x^2 + y^2 = r^2$ ile gösterilir.

ÖRNEK - 1

Vektörel denklemi $\|\vec{OP}\| = 6$ olan çemberi koordinat düzleminde çizelim.

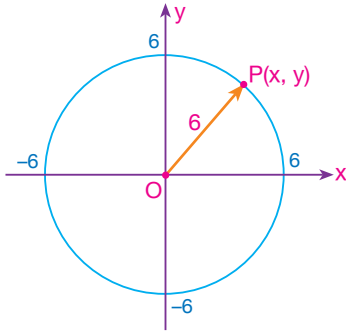
ÇÖZÜM :

$P(x, y)$ diyelim.

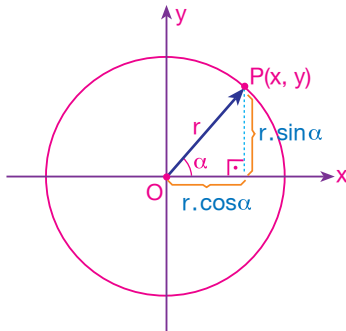
$\vec{OP} = (x - 0, y - 0)$ olup,

$\|\vec{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 6$ eşitliğinden,

$x^2 + y^2 = 36$ denklemi elde edilir
ve grafiği aşağıdaki gibidir.



Merkezil Çemberin Parametrik Denklemi



$0 \leq \alpha < 2\pi$ olmak üzere,

$$x = r \cdot \cos\alpha$$

$$y = r \cdot \sin\alpha$$

denklemlerine çemberin parametrik denklemi denir.

ÖRNEK - 1

$x^2 + y^2 = 24$ çemberinin parametrik denklemini yazalım.

ÇÖZÜM :

$r = 2\sqrt{6}$ birim olup

Parametrik denklemleri,

$0 \leq \alpha < 2\pi$ olmak üzere,

$$x = 2\sqrt{6} \cdot \cos\alpha$$

$$y = 2\sqrt{6} \cdot \sin\alpha \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

ÖRNEK - 2

Parametrik denklemleri,

$$0 \leq \alpha < 2\pi$$

$$x = 4 \cdot \cos\theta$$

$$y = 4 \cdot \sin\theta$$

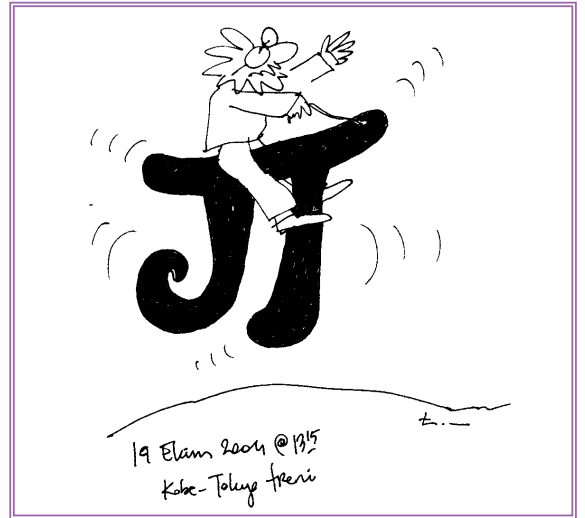
şeklinde verilen çemberin vektörel ve standart denklemlerini yazalım.

ÇÖZÜM :

Merkezi $M(0, 0)$ ve yarıçapı $r = 4$ birim olduğundan,

Vektörel denklemi; $\|\vec{OP}\| = 4$

Standart denklemi; $x^2 + y^2 = 16$ bulunur.



(Matematik Dünyası Dergisi-www.matematikdunyasi.org)

Merkezil Olmayan Çemberin Parametrik Denklemi

Standart denklemi,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \text{ olan çember}$$

$x^2 + y^2 = r^2$ çemberinin $\vec{v} = (a, b)$ doğrultusunda ötelenmiş olduğundan,

Parametrik denklemi,

$$0 \leq \alpha < 2\pi \text{ olmak üzere,}$$

$$x = a + r \cdot \cos \alpha$$

$$y = b + r \cdot \sin \alpha \text{ biçiminde yazılabilir.}$$



NOT :

Merkezil olmayan çember, merkezil çemberin ötelenmiş halidir.

ÖRNEK - 1

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$ çemberinin parametrik denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16 \text{ çemberi,}$$

$x^2 + y^2 = 16$ çemberinin $\vec{u} = (1, -2)$ doğrultusunda ötelenmiştir.

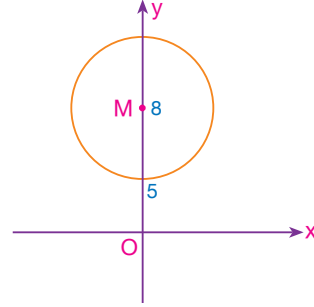
Böylece, $M(1, -2)$ ve $r = 4$ birim olduğundan,

$$x = 1 + 4 \cdot \cos \alpha$$

$$y = -2 + 4 \cdot \sin \alpha$$

parametrik denklemi elde edilir.

ÖRNEK - 2



Yukarıdaki çemberin parametrik denklemini yazalım.

ÇÖZÜM :

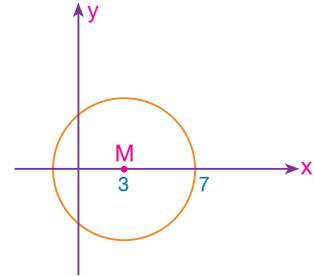
$M(0, 8)$ ve $r = 3$ birim olup

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ olmak üzere,}$$

Parametrik denklemi,

$$x = 3\cos\theta \text{ ve } y = 8 + 3\sin\theta \text{ şeklindedir.}$$

ÖRNEK - 3



Yukarıdaki çemberin parametrik denklemini yazalım.

ÇÖZÜM :

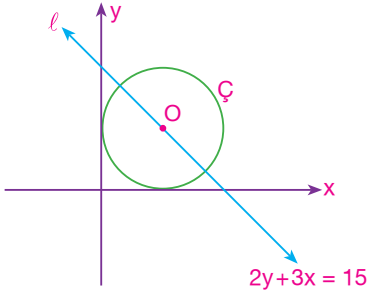
$M(3, 0)$ ve $r = 4$ birim olup

$$0 \leq \alpha < 2\pi \text{ olmak üzere,}$$

Parametrik denklemi,

$$x = 3 + 4\cos\alpha \text{ ve } y = 4\sin\alpha \text{ şeklindedir.}$$

ÖRNEK - 4



Yukarıda ℓ doğrusu eksenlere teğet $\odot$ çemberinin merkezinden geçmektedir.

Buna göre, çemberin yarıçap uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

Çember eksenlere teğet olduğundan,

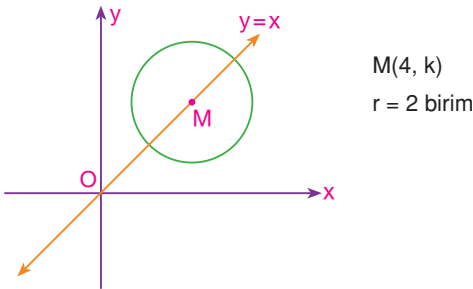
merkezi $O(r, r)$ şeklinde yazılabilir.

O halde,

O noktası doğru denklemini sağlayacağından,

$$2r + 3r = 15 \Rightarrow r = 3 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 5



Yukarıdaki çemberin parametrik denklemini yazalım.

ÇÖZÜM :

$M(4, k)$ noktası $y = x$ doğrusu üzerinde bulunduğundan denklemini sağlar. O halde, $k = 4$ tir.

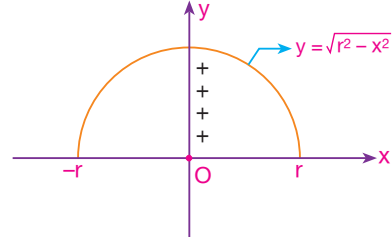
Dolayısıyla, $M(4, 4)$ ve $r = 2$ birim olan çemberin,

Parametrik denklemini, $0 \leq \alpha < 2\pi$ olmak üzere,

$$x = 4 + 2\cos\alpha \Rightarrow y = 4 + 2\sin\alpha \text{ şeklindedir.}$$

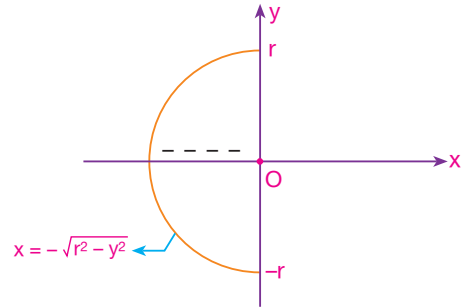
Yarım Çember Denklemleri

1.



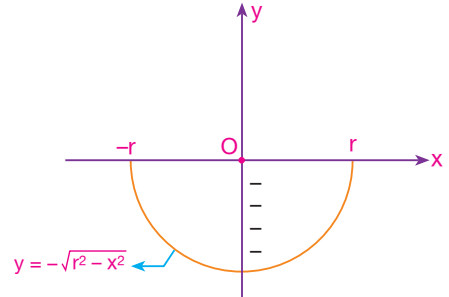
Yukarıdaki çember yayının tüm noktalarında, $y \geq 0$ dir.

2.



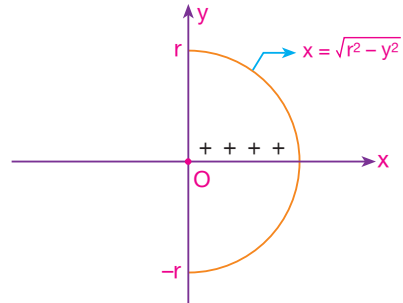
Yukarıdaki çember yayının tüm noktalarında, $x \leq 0$ dir.

3.



Yukarıdaki çember yayının tüm noktalarında, $y \leq 0$ dir.

4.

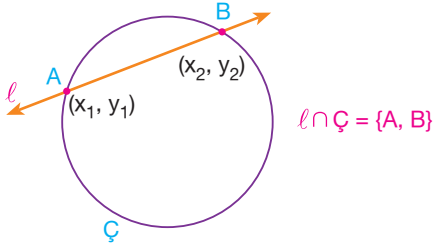


Yukarıdaki çember yayının tüm noktalarında, $x \geq 0$ dir.

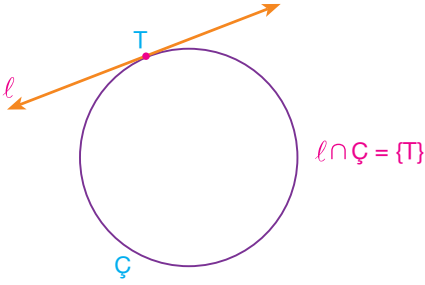
Bir Çember İle Bir Doğrunun Birbirine Göre Durumu

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ çemberi ile $y = mx + n$ doğrusu veriliyor.

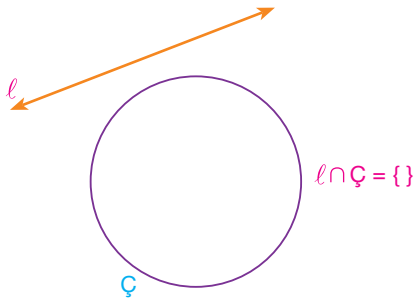
- Çember ile doğrunun ortak çözümü yapılır.
- Elde edilen ikinci dereceden denklemin diskriminantı (Δ) bulunur.
- $\Delta > 0$ ise doğru çemberin bir kesenidir.



- $\Delta = 0$ ise doğru çemberin bir teğetidir.



- $\Delta < 0$ ise doğru çemberi kesmez.



NOT :

Verilen çemberde merkezin doğruya uzaklığı hesaplanarak da yukarıdaki üç durumdan hangisinin olduğu tespit edilebilir.

ÖRNEK - 1

$M(0, 0)$ olmak üzere, $\|\overrightarrow{MX}\| = 5$ çemberi ile $3x + 4y - 24 = 0$ doğrusu için ne söylenebilir?

ÇÖZÜM

Merkezi $M(0, 0)$ ve yarıçapı $r = 5$ birim dir.

Merkezinin $3x + 4y - 24 = 0$ doğrusuna uzaklığı,

$$h = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{24}{5} \text{ birim olup}$$

$h < r$ olduğundan doğru çemberi iki farklı noktada keser.

ÖRNEK - 2

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ çemberi ile $y = x$ doğrusu için ne söylenebilir?

ÇÖZÜM

1. Yol :

Çember ile doğru denklemini ortak çözelim;

Çember denkleminde y yerine x yazılırsa,

$$(x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 1 \text{ olup}$$

Buradan, $x^2 + x + 2 = 0$ denklemi elde edilir.

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0 \text{ olduğundan,}$$

doğru çemberi kesmez.

2. Yol :

Merkezi $M(1, -2)$ ve yarıçapı $r = 1$ birim dir.

Merkezin $y - x = 0$ doğrusuna uzaklığı,

$$h = \frac{|-2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ birim olup}$$

$h > r$ olduğundan doğru çemberi kesmez.

ÖRNEK - 3

$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$ çemberi $5x + 12y - k = 0$ doğrusunu farklı iki noktada kestiğine göre, k nin alabileceği değerleri bulalım.

ÇÖZÜM :

Merkezi $M(3, 5)$ ve yarıçapı $r = 5$ birim dir.

Merkezin doğruya uzaklığı h olsun.

Bu durumda, $h < r$ olması gerekir.

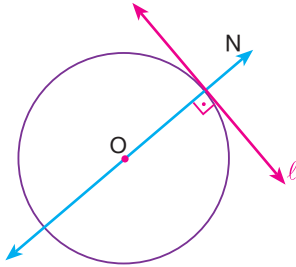
$$h = \frac{|5 \cdot 3 + 12 \cdot 5 - k|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|75 - k|}{13}$$

$$\frac{|75 - k|}{13} < 5 \text{ ise } |75 - k| < 65$$

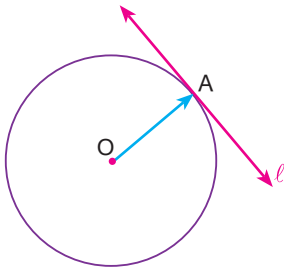
$$-65 < k - 75 < 65$$

$$10 < k < 140 \Rightarrow k \in (10, 140) \text{ bulunur.}$$

Bir Çemberin Herhangi Bir Noktasındaki Teğet ve Normal Denklemleri



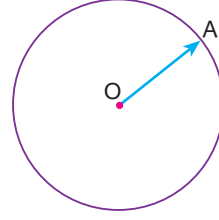
Çemberin herhangi bir noktasının yer vektörüne dik olan doğruya bu noktadaki **teğet doğrusu** denir.



$$\vec{OA} \perp l \text{ ise}$$

l : O merkezli çemberin A noktasındaki teğettir.

Bir çemberde yer vektörünü doğrultman kabul eden doğruya **normal doğrusu** denir.

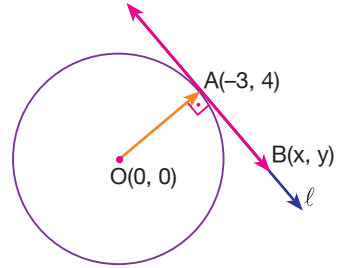


$\vec{OA}$ vektörünü doğrultman vektörü kabul eden ve A noktasından geçen doğru normal doğrusudur.

ÖRNEK - 1

$x^2 + y^2 = 25$ çemberinde $A(-3, 4)$ noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :



l doğrusu üzerinde $B(x, y)$ seçelim.

$$\vec{OA} \perp l \text{ olup}$$

$$\langle \vec{OA}, \vec{AB} \rangle = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\vec{OA} = A - O = (-3, 4)$$

$$\vec{AB} = B - A = (x + 3, y - 4)$$

$$\langle \vec{OA}, \vec{AB} \rangle = 0 \text{ eşitliği ile}$$

l doğrusunun denklemi,

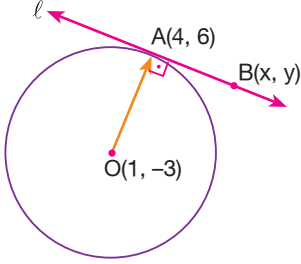
$$-3(x + 3) + 4(y - 4) = 0$$

$$-3x + 4y = 25 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 90$ çemberinin $A(4, 6)$ noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM



Çembere A noktasından çizilen teğet A noktasının yer vektörüne diktir.

A noktasının yer vektörü,

$$\vec{OA} = A - O = (3, 9), \quad \vec{AB} = (x - 4, y - 6) \text{ ve}$$

$\vec{OA} \perp \vec{AB}$ olduğundan,

$$\langle \vec{OA}, \vec{AB} \rangle = 0 \text{ olmalıdır.}$$

O halde, ℓ doğrusunun denklemi

$$3(x - 4) + 9(y - 6) = 0$$

$$3x + 9y - 66 = 0$$

$$x + 3y - 22 = 0 \text{ bulunur.}$$

✓ Pratik Bilgi

1. $x^2 + y^2 = r^2$ çemberine üzerindeki $A(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin denklemi :

$$x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = r^2 \text{ dir.}$$

2. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ çemberine üzerindeki $A(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin denklemi :

$$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = r^2 \text{ dir.}$$

3. $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ çemberine üzerindeki $A(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin denklemi :

$$x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + \frac{D}{2} (x + x_0) + \frac{E}{2} (y + y_0) + F = 0$$

şeklinde yazılabilir.

ÖRNEK - 3

$x^2 + y^2 = 25$ çemberine $A(3, 4)$ noktasında çizilen teğet doğrusunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM

$$3x + 4y = 25 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 4

$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ çemberine $A(-4, 2)$ noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM

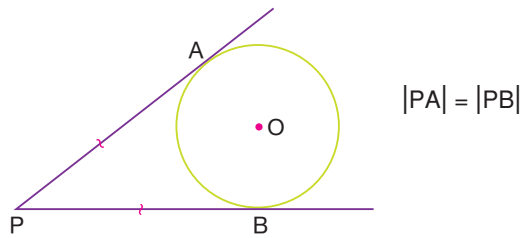
$A(-4, 2)$ noktası çember denklemini sağladığından çember üzerindedir.

O halde, A noktasından geçen teğet doğrusunun denklemi,

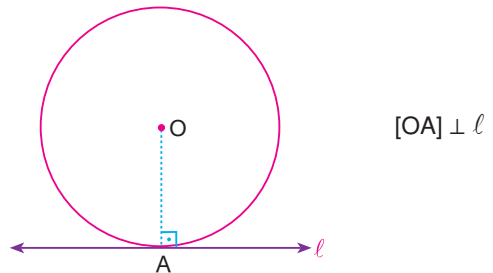
$$(-4 + 1) \cdot (x + 1) + (2 - 3) \cdot (y - 3) = 10$$

$$3x + 2y + 9 = 0 \text{ bulunur.}$$

➤ Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşittir.

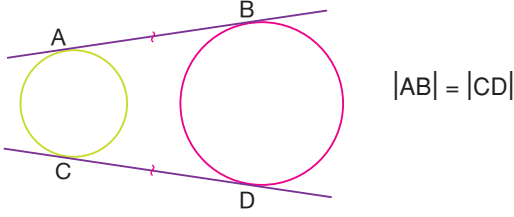


➤ Bir çemberin herhangi bir teğeti değme noktasındaki yarıçapa diktir.

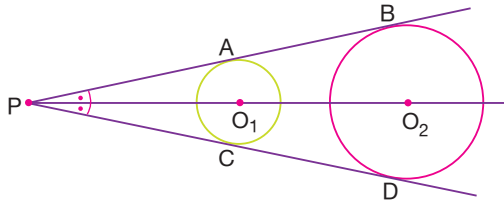




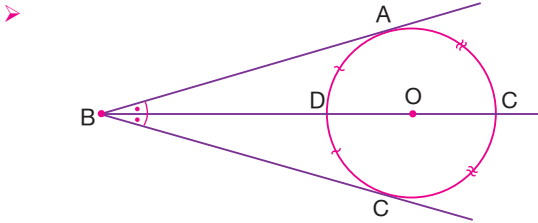
- İki çemberin ortak dış teğet parçalarının uzunlukları eşittir.



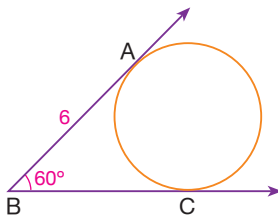
- İki çemberin ortak dış teğetlerinin kesim noktası ile merkezleri aynı doğru üzerindedir.



Yukarıda O_2 merkezli çember O_1 merkezli çemberin P merkezli ve $k = \frac{|PB|}{|PA|}$ oranlı homotetisidir.



ÖRNEK - 5



[BA ve [BC çemberlere teğettir.

$$|AB| = 6 \text{ birim}$$

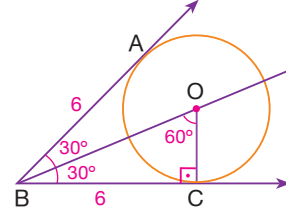
$$m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$$

Buna göre, çemberin yarıçap uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Bir çemberde iki teğetin kesim noktasını çemberin merkezine birleştiren doğru açıortaydır.

O halde,



[BO] açıortay olup

$$m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{OBC}) = 30^\circ \text{ ve}$$

[OC] $\perp$ [BC] olduğundan,

$$m(\widehat{BOC}) = 60^\circ \text{ dir.}$$

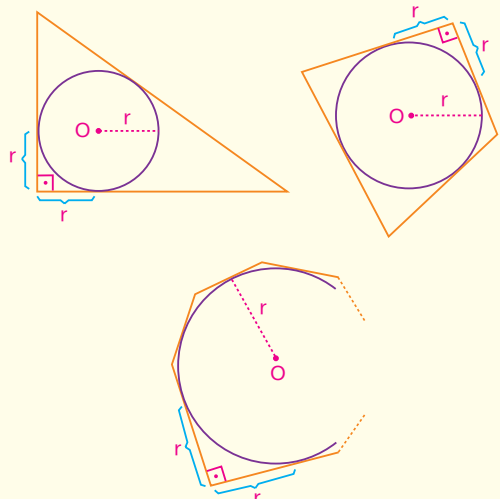
Böylece $\widehat{BOC}$ nde,

$$|OC| = r = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ birim bulunur.}$$

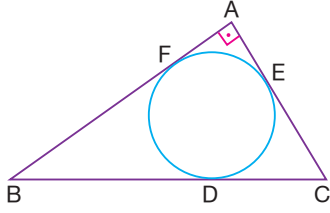


NOT :

Bir çember dik açısı olan bir çokgene içten teğet ise dik olan köşeden çizilen teğet parçalarının uzunlukları yarıçap uzunluğuna eşittir.



ÖRNEK - 6



ABC dik üçgeninin iç teğet çemberi çizilmiştir.

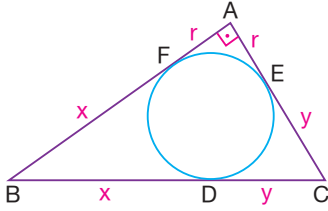
D, E, F teğet değme noktaları olduğuna göre, $\widehat{A(ABC)} = |BD| \cdot |DC|$ olduğunu gösterelim.

ÇÖZÜM :

$$|BD| = |BF| = x,$$

$$|CD| = |CE| = y \text{ ve}$$

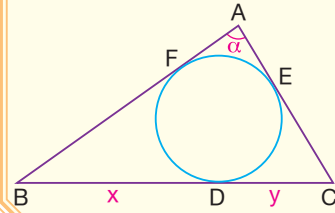
$$|AF| = |AE| = r \text{ diyelim.}$$



$$\begin{aligned} \widehat{A(ABC)} &= \frac{(x+y)^2 - (x+z-z-y)^2}{4} \\ &= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{4} \\ &= \frac{4xy}{4} \Rightarrow x \cdot y \text{ bulunur.} \end{aligned}$$



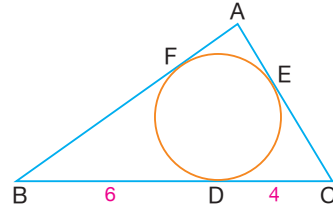
NOT :



D, E, F teğet değme noktaları ise

$$\widehat{A(ABC)} = x \cdot y \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$$

ÖRNEK - 7



ABC üçgen D, E, F, teğet değme noktaları
 $|BD| = 6$ birim
 $|DC| = 4$ birim

$\widehat{A(ABC)} = 8\sqrt{3}$ br² olduğuna göre, BAC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :

$$m(\widehat{BAC}) = \alpha \text{ diyelim.}$$

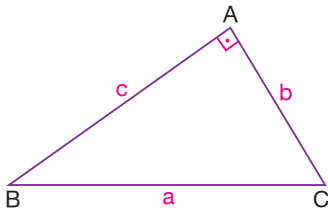
Böylece,

$$\widehat{A(ABC)} = 6 \cdot 4 \cdot \cot \frac{\alpha}{2} = 8\sqrt{3}$$

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ olup}$$

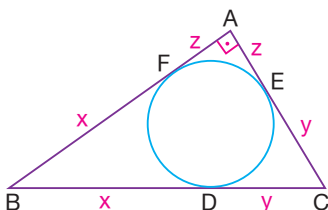
$$\frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = \alpha = 60^\circ \text{ bulunur.}$$

HATIRLATMA

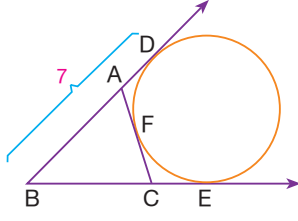


$$\widehat{A(ABC)} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4}$$

O halde,



ÖRNEK - 8



ABC üçgeninin dış teğet çemberi çizilmiştir.
D, E, F teğet noktalarıdır.
 $|BD| = 7$ birim

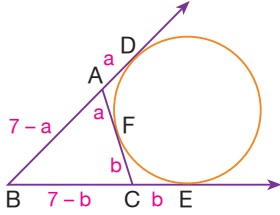
Buna göre, $\widehat{Ç(ABC)}$ nin kaç birim olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet uzunlukları eşit olduğundan,

$$|AD| = |AF| = a \text{ diyelim.}$$

$$|CF| = |CE| = b \text{ diyelim.}$$

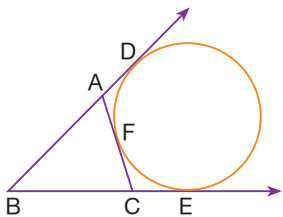


$$|BD| = 7 \text{ birim} \Rightarrow |BE| = 7 \text{ birim olup}$$

$$|BC| = 7 - b \text{ ve } |BA| = 7 - a \text{ dır.}$$

Böylece $\widehat{Ç(ABC)} = 14$ birim bulunur.

✓ Pratik Bilgi

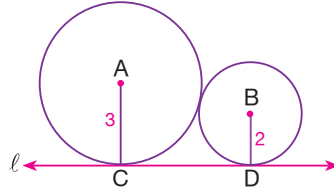


D, F, E teğet değme noktaları ve $|BD| = x$ ise

$$\widehat{Ç(ABC)} = 2x \text{ tir.}$$

ÖRNEK - 9

Aşağıda ℓ doğrusu birbirine teğet A ve B merkezli çemperlere C ve D noktalarında teğettir.



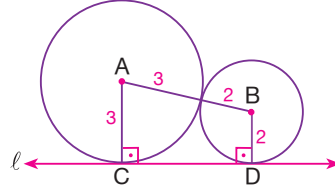
$$|AC| = 3 \text{ birim}$$

$$|BD| = 2 \text{ birim}$$

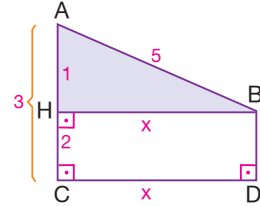
Buna göre, $|CD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Teğet iki çemberin merkezleri birleştirildiğinde elde edilen doğru teğet değme noktasından geçer.



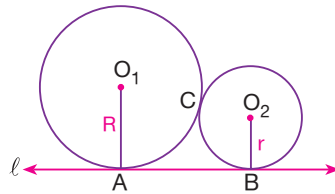
Yarıçap teğete dik olduğundan ABDC dik yamuk olup



[BH] dikmesi ve AHB'nde Pisagor teoremi ile

$$x^2 + 1^2 = 5^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{6} \text{ birim bulunur.}$$

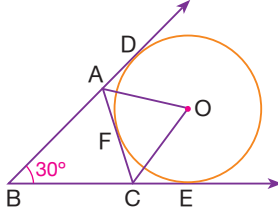
✓ Pratik Bilgi



O_1 ve O_2 merkezli çemberler birbirine C noktasında, ℓ doğrusuna A ve B noktalarında teğet ise,

$$|AB| = 2\sqrt{R \cdot r} \text{ dir.}$$

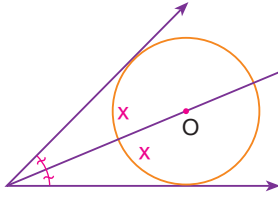
ÖRNEK - 10



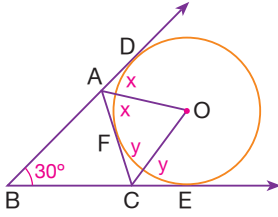
ABC üçgeninin O merkezli dış teğet çemberi çizilmiştir.
 $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$

Buna göre, AOC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



Özellikli verilen şekilde uygulayalım.



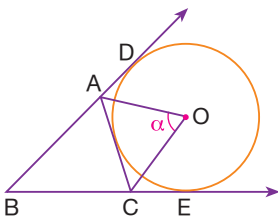
AOC merkez açı olduğundan,

$$m(\widehat{AOC}) = x + y \text{ dir.}$$

$$2x + 2y = 150^\circ \text{ dir.}$$

O halde, $m(\widehat{AOC}) = x + y = 75^\circ$ bulunur.

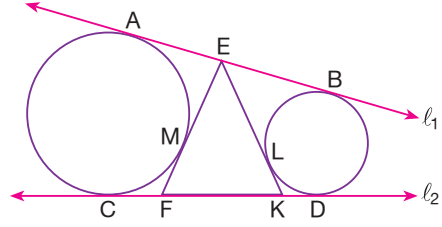
✓ Pratik Bilgi



$\widehat{ABC}$ nin O merkezli dış teğet çemberi çizilmiştir.

$$\alpha = 90^\circ - \frac{m(\widehat{B})}{2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 11

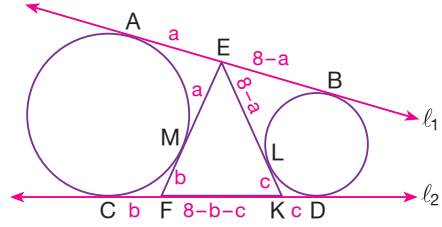


l_1 ve l_2 doğruları çemberlere A, B, C, D noktalarında, EFK üçgenine M ve L noktalarında teğettir.

$|AB| = 8$ birim ise, EFK üçgeninin çevre uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet uzunlukları eşit olduğundan,



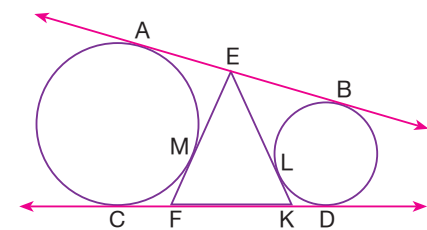
$$|AE| = |EM|, |MF| = |FC|, |LK| = |KD|,$$

$$|EL| = |EB| \text{ ve } |AB| = |CD| \text{ diyebiliriz.}$$

O halde,

$$\widehat{EFK} = a + b + 8 - b - c + 8 - a + c = 16 \text{ birim bulunur.}$$

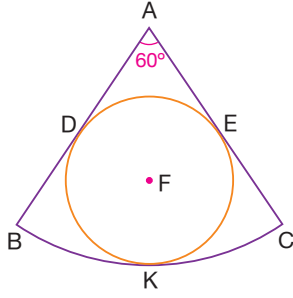
✓ Pratik Bilgi



A, B, C, D, M, L teğet değme noktaları ise

$$|AB| = |CD| \text{ olup } \widehat{EFK} = 2|AB| \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 12



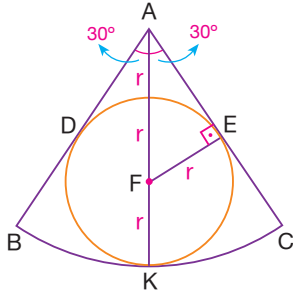
A, F merkez
 $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$
 D, E, K teğet değme noktalarıdır.

Buna göre, çemberlerin yarıçapları oranını bulalım.

ÇÖZÜM

Teğet iki çemberin merkezleri birleştirildiğinde elde edilen doğru teğet değme noktasından geçer.

O halde A, F, K doğrusaldır.



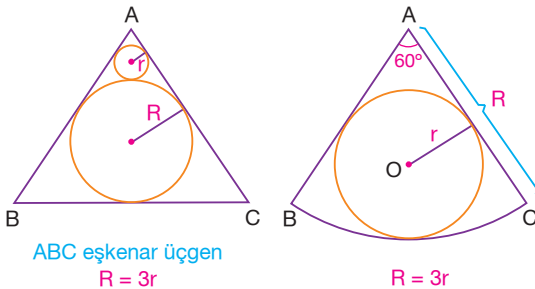
$|FE| = r$ dersek,

$[FE] \perp [AC]$ olduğundan, 30° , 60° , 90° üçgeninden,

$|AF| = 2r$ olup

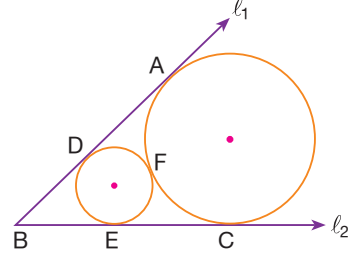
çemberlerin yarıçapları oranı $\frac{3r}{r} = 3$ bulunur.

✓ Pratik Bilgi



ÖRNEK - 13

Yarıçap uzunlukları 4 birim ve 12 birim olan çemberlerin ortak dış teğetleri ℓ_1 ve ℓ_2 doğrudur.

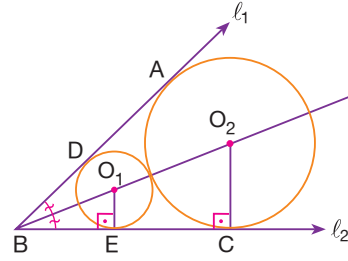


Buna göre, ABC açısının ölçüsünü bulalım.

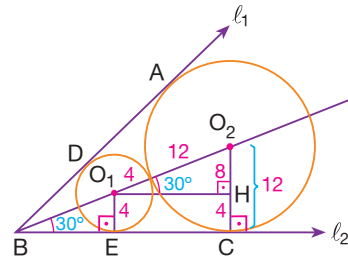
ÇÖZÜM

İki çemberin ortak dış teğetlerinin kesim noktası ile merkezleri aynı doğru üzerindedir (doğrudadır).

O halde,



B, O_1 , O_2 doğrusal ve $[BO_1]$ açkırtay olup
 $[O_1E] \perp [BC]$ ve $[O_2C] \perp [BC]$ olduğundan,



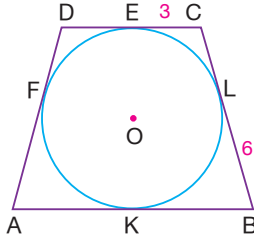
O_1ECO_2 dik yamuğunda,

$[O_1H]$ dikmesi ile $m(\widehat{O_2O_1H}) = 30^\circ$ ve

$[O_1H] \parallel [BC]$ olduğundan, $m(\widehat{O_1BC}) = 30^\circ$ olup

$[BO_1]$ açkırtay olduğundan, $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$ bulunur.

ÖRNEK - 14



ABCD yamuğu O merkezli çemberin teğetler dörtgenidir.

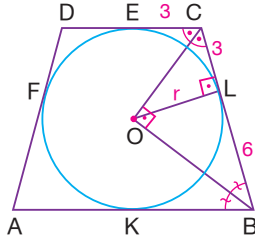
$$|EC| = 3 \text{ birim}$$

$$|LB| = 6 \text{ birim}$$

Buna göre, çemberin yarıçap uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

[CO] ve [BO] çizilirse,



[CO] ve [BO] açıortay olduğundan,

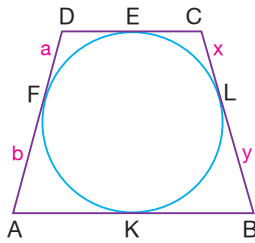
$$m(\widehat{BOC}) = 90^\circ \text{ dir.}$$

[OL] $\perp$ [BC] olduğundan,

$\widehat{BOC}$ nde Öklid bağıntısı ile

$$r^2 = 3 \cdot 6 \Rightarrow r = 3\sqrt{2} \text{ birim bulunur.}$$

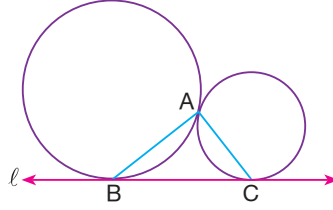
✓ Pratik Bilgi



ABCD yamuk ise

$$a \cdot b = x \cdot y \text{ ve } r = \sqrt{x \cdot y} \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 15



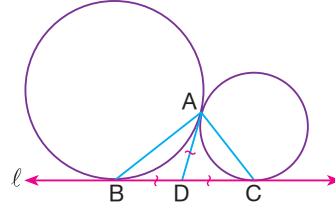
A, B, C teğet değme noktalarıdır.

ABC üçgen

Buna göre, BAC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :

A noktasından çemberlere teğet olacak şekilde [AD] çizelim.

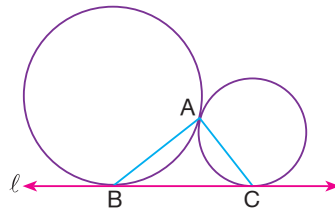


[BD], [DA] ve [DC] çembere teğet olduğundan,

$$|BD| = |DA| = |DC| \text{ olup}$$

$$m(\widehat{BAC}) = 90^\circ \text{ bulunur.}$$

✓ Pratik Bilgi

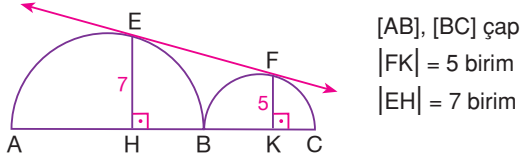


A, B, C teğet değme noktaları ise,

$$m(\widehat{BAC}) = 90^\circ \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 16

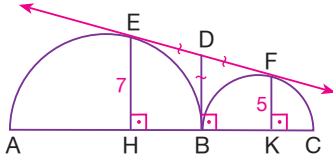
B, E, F teğet noktalarıdır.



Buna göre, |EF| uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

Çemberlerin B noktasından geçen ortak teğetini çizelim.



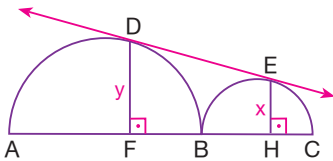
$$|BD| = |DE| = |DF| \text{ ve}$$

yarıçap teğete dik olduğundan,

[DB] : HKFE dik yamuğunun orta tabanı olup

$$|BD| = \frac{5+7}{2} = 6 \text{ birim} \Rightarrow |EF| = 12 \text{ birim bulunur.}$$

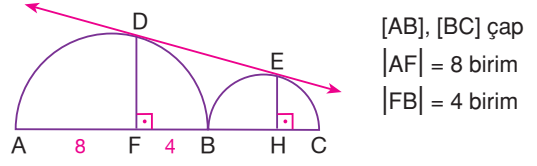
✓ Pratik Bilgi



[AB], [BC] çap, D, E, B teğet noktaları ise
|DE| = x + y dir.

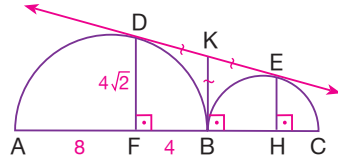
ÖRNEK - 17

D, E, B teğet değme noktalarıdır.



Buna göre, |HC| uzunluğunu bulalım.

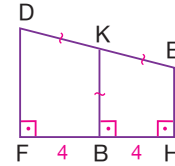
ÇÖZÜM :



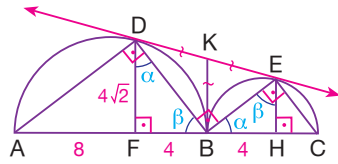
|KB| = |KE| olacak şekilde K ∈ [DE] alalım.

Böylece |DK| = |KB| = |KE| olup [KB] çemberlerin kesim noktasından geçen teğeti olup [AC] ⊥ [BK] dir.

O halde DEHF bir dik yamuk olup [KB] bu dik yamuğun orta tabanıdır.



Şimdi ADB ve BEC üçgenlerini oluşturalım.



$\widehat{m(\angle ADB)} = \widehat{m(\angle BEC)} = 90^\circ$ olup (çapı gören çevre açısı)

$\widehat{DAB}$ nde Öklid bağıntısı ile

$$|DF|^2 = 8 \cdot 4 \Rightarrow |DF| = 4\sqrt{2} \text{ birim}$$

$\widehat{DFB} \sim \widehat{BHE}$ (A.A.A) benzerliğinden,

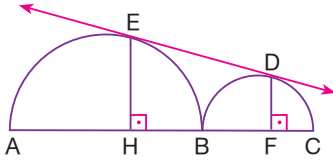
$$\frac{4}{|HE|} = \frac{4\sqrt{2}}{4} \Rightarrow |HE| = 2\sqrt{2} \text{ birim ve}$$

$\widehat{BEC}$ nde Öklid bağıntısı ile

$$(2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot |HC| \Rightarrow |HC| = 2 \text{ birim bulunur.}$$



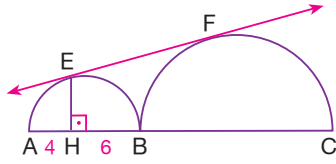
✓ Pratik Bilgi



[AB], [BC] çap, B, E, D teğet noktaları ise

$$|HB| = |BF| \text{ ve } |HB|^2 = |AH| \cdot |FC| \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 18

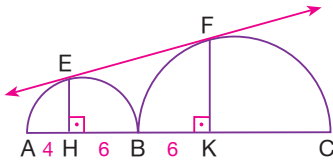


[AB] çap
[BC] çap
B, E, F teğet noktaları
 $|BH| = 6$ birim
 $|AH| = 4$ birim

Buna göre, [BC] uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

[FK] $\perp$ [AC] olacak şekilde [FK] çizelim.

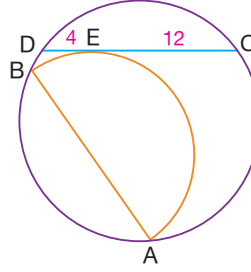


Böylece, $|HB| = |BK| = 6$ birim olup

$$|HB|^2 = |AH| \cdot |KC| \text{ eşitliğinden,}$$

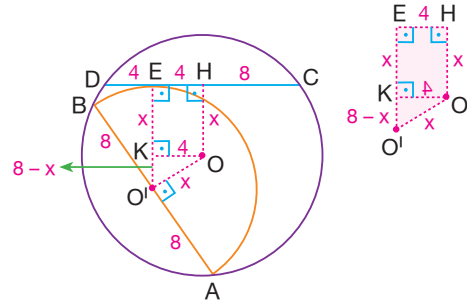
$$6^2 = 4 \cdot |KC| \Rightarrow |KC| = 9 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 19



[AB] yarım çemberin
çapı
E teğet noktası
 $|CD| = |AB|$
 $|CE| = 12$ birim

ÇÖZÜM



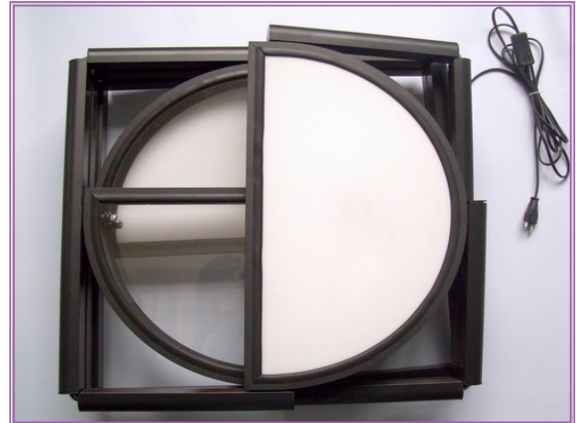
Çemberlerin merkezlerinden kirişe ve teğete dikmeler indirilirse, elde edilen $OO'K$ dik üçgeninde Pisagor bağıntısı ile,

$$x^2 = 4^2 + (8 - x)^2 \text{ eşitliğinden,}$$

$x = 5$ birim bulunur.

Büyük dairenin yarıçapı,

$|OC|$ Pisagor bağıntısı ile $\sqrt{89}$ birim bulunur.

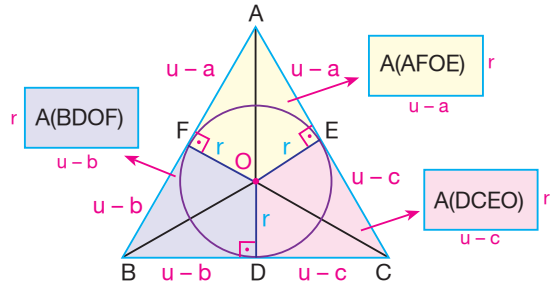


Teorem :

Kenar uzunlukları a birim, b birim, c birim ve iç teğet çemberinin yarıçap uzunluğu r birim olan bir üçgenin alanının $u \cdot r$ olduğunu gösterelim.

İspat :

ABC üçgeninin iç teğet çemberini çizelim.



$$A(ABC) = 2 \cdot A(AOE) + 2 \cdot A(BOF) + 2 \cdot A(EOC) \text{ olup}$$

$$2 \cdot A(AOE) = \boxed{r(u-a)}$$

$$2 \cdot A(BOF) = \boxed{r(u-b)}$$

$$2 \cdot A(EOC) = \boxed{r(u-c)}$$

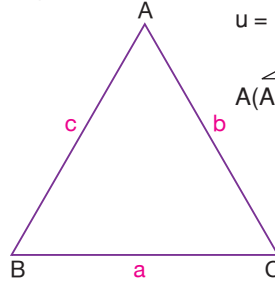
$$+ \\ A(ABC) = r \boxed{u-a} \boxed{u-b} \boxed{u-c} = u \cdot r$$

$$A(ABC) = u \cdot r \text{ elde edilir.}$$

Teorem :

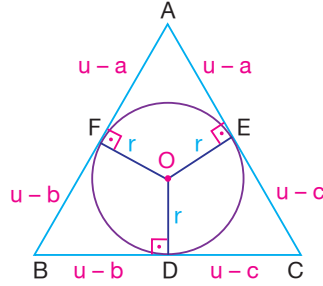
$$u = \frac{a+b+c}{2} \text{ olmak üzere,}$$

$$A(ABC) = \sqrt{u(u-a) \cdot (u-b) \cdot (u-c)}$$

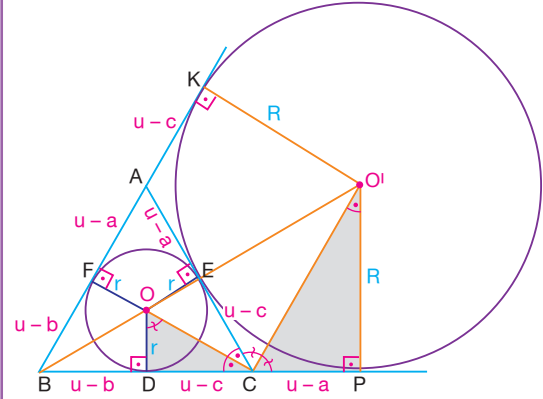


İspat :

ABC üçgeninin O merkezli iç teğet çemberini çizelim.



Şimdi AC kenarına ait dış teğet çemberini çizelim.



KBO' nde $[OF] \parallel [O'K]$ olup

$$\text{Tales teoreminden, } \frac{r}{R} = \frac{u-b}{u} \dots (1)$$

DOC ve PCO' benzer üçgenlerinden,

$$\frac{r}{u-a} = \frac{u-c}{R} \dots (2)$$

(1). ve (2). denklemlerden

$$r = \sqrt{\frac{(u-a)(u-b)(u-c)}{u}} \text{ eşitliği ile,}$$

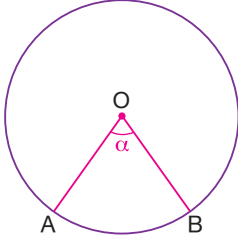
$$A(ABC) = \sqrt{u(u-a) \cdot (u-b) \cdot (u-c)} \text{ bulunur.}$$



ÇEMBERDE AÇI

Merkez Açısı :

Köşesi çemberin merkezinde olan ve ışınları çemberi iki noktada kesen açığa **merkez açısı** denir.

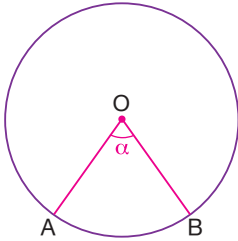


O merkez ise
 $\widehat{AOB}$ merkez açısı

Merkez açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

Eğer merkez açının ölçüsü radyan olarak verilmişse,

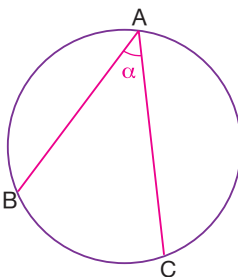
Merkez açının ölçüsü, gördüğü yayın uzunluğunun yarıçap uzunluğu oranına eşittir.



O merkez ve
 $m(\widehat{AOB}) = \alpha$ ise
 $\alpha = m(\widehat{AB})$ ya da
 $\alpha = \frac{|\widehat{AB}|}{r}$

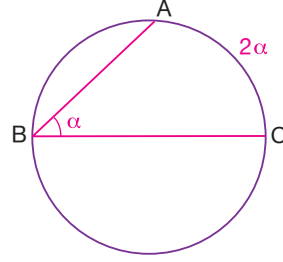
Çevre Açısı :

Köşesi çember üzerinde olan ve ışınları çemberi diğer iki noktada kesen açığa **çevre açısı** denir.



BAC çevre açısı

➤ Çevre açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.



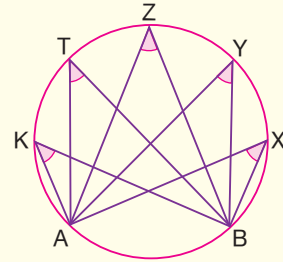
$\widehat{ABC}$ çevre açısı

$$m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2}$$



NOT - 1 :

Bir çemberde aynı yayı gören çevre açılarının ölçüleri birbirine eşittir.

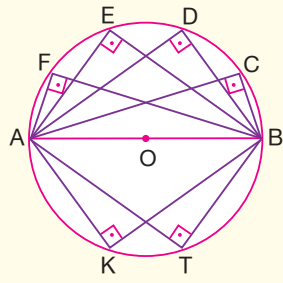


$$m(\widehat{AXB}) = m(\widehat{AYB}) = \dots = m(\widehat{AKB})$$

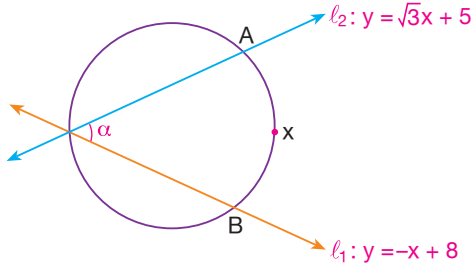


NOT - 2 :

Bir çemberde çapı gören çevre açının ölçüsü 90° dir. (Bir çemberde çapın uç noktalarından çıkan iki doğru parçası eğer çember üzerinde kesişirse oluşan açı 90° dir.)



ÖRNEK - 1



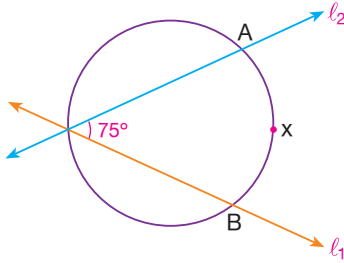
l_1 ve l_2 doğruları arasındaki açının ölçüsü α olduğuna göre, $\widehat{AXB}$ yayının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :

$l_1 : y = \sqrt{3}x + 5$ doğrusunun eğimi $m_1 = \sqrt{3}$ olup eğim açısı 60° ve

$l_2 : y = -x + 8$ doğrusunun eğimi $m_2 = -1$ olup eğim açısı 135° dir.

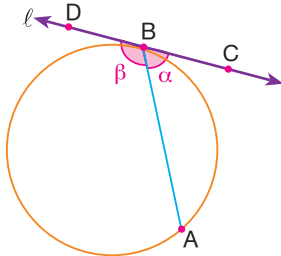
O halde, $\alpha = 135^\circ - 60^\circ = 75^\circ$ olup



Çevre açıdan $m(\widehat{AXB}) = 150^\circ$ bulunur.

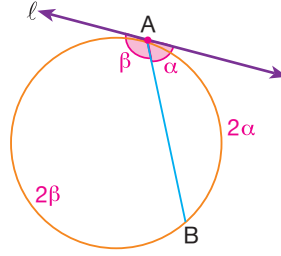
Teğet – Kiriş Açısı :

Köşesi çember üzerinde olan ve bir kiriş ile bir teğetin belirlediği açıya **teğet kiriş açısı** denir.

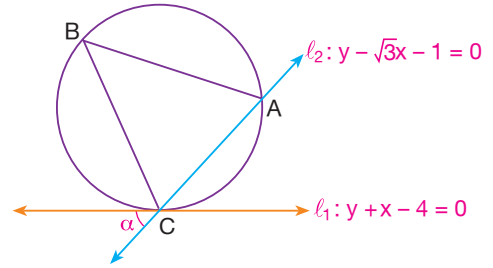


l doğrusu çembere B noktasında teğet ise, $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{ABD}$ teğet – kiriş açılarıdır.

Teğet – kiriş açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.



ÖRNEK - 2



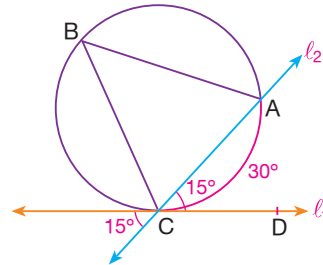
l_1 doğrusu çembere C noktasında teğet ve l_1 ile l_2 doğruları arasındaki açının ölçüsü α olduğuna göre, $\widehat{ABC}$ açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :

l_1 doğrusunun eğimi 1 olup eğim açısı 45° ve

l_2 doğrusunun eğimi $\sqrt{3}$ olup eğim açısı 60° dir.

O halde $\alpha = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ olup

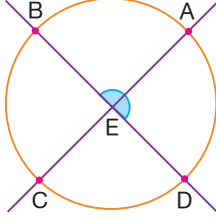


$\widehat{ABC}$ teğet kiriş açısı olup $m(\widehat{AC}) = 30^\circ$ ve

aynı yayı gören çevre açının ölçüsü teğet kiriş açının ölçüsüne eşit olduğundan $m(\widehat{ABC}) = 15^\circ$ bulunur.

İç Açısı :

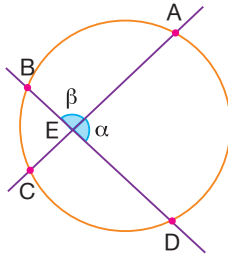
İki kesenin çember içinde kesişmesi ile oluşan açığa **iç açı** denir.



$[AC] \cap [BD] = \{E\}$ ise

$\widehat{AED}$ ve $\widehat{AEB}$ iç açılarıdır.

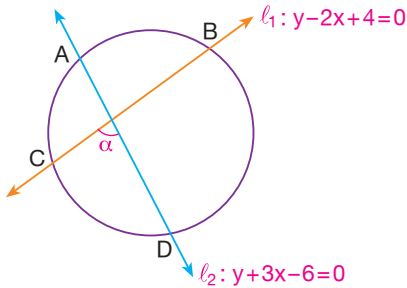
- Bir iç açının ölçüsü gördüğü yayların ölçüleri toplamının yarısına eşittir.



$$\alpha = \frac{m(\widehat{BC}) + m(\widehat{AD})}{2}$$

$$\beta = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})}{2}$$

ÖRNEK - 3



l_1 ve l_2 doğruları arasındaki açının ölçüsü α olduğuna göre, $m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})$ toplamını bulalım.

ÇÖZÜM :

$$y - 2x + 4 = 0$$

doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{u} = (1, 2)$ ve

$$y + 3x - 6 = 0$$

doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{v} = (1, -3)$ olup

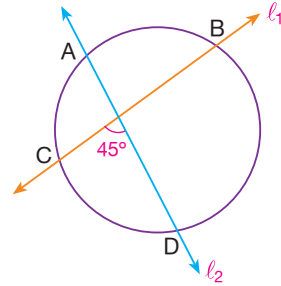
l_1 ve l_2 doğruları arasındaki açı bu doğruların doğrultman vektörleri ($\vec{u}$ ve $\vec{v}$) arasındaki açıdır.

$$\text{O halde, } \angle \vec{u}, \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$$

$$1 - 6 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ olup,}$$

$$\theta = 135^\circ \text{ ve } \alpha = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ \text{ dir.}$$



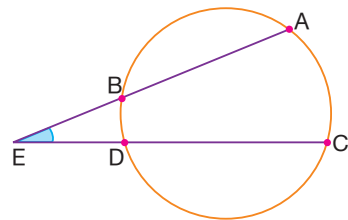
O halde,

$$\text{iç açı tanımından, } 45^\circ = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})}{2} \text{ olup}$$

$$m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD}) = 90^\circ \text{ bulunur.}$$

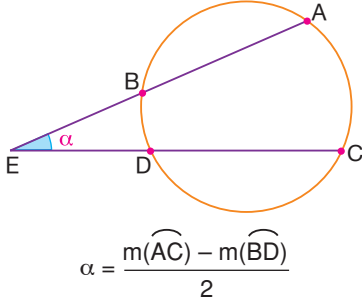
Dış Açısı :

Bir çemberde farklı iki kesenin çember dışında kesişmesi ile oluşan açığa **dış açı** denir.

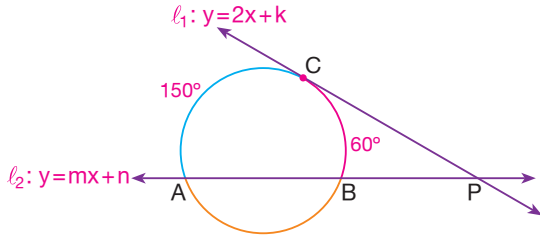


$AB \cap DC = \{E\}$ ise $\widehat{AEC}$ dış açıdır.

Bir dış açının ölçüsü, gördüğü yayların ölçüleri farkının yarısına eşittir.



ÖRNEK - 4



PC doğrusu çembere C noktasında teğet olduğuna göre, m'nin değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

Dış açı tanımından,

$$m(\widehat{APC}) = \frac{150^\circ - 60^\circ}{2} = 45^\circ \text{ olur.}$$

l_1 doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{u} = (1, 2)$

l_2 doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{v} = (1, m)$

olup $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ arasındaki açı 45° dir.

O halde, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos 45^\circ$

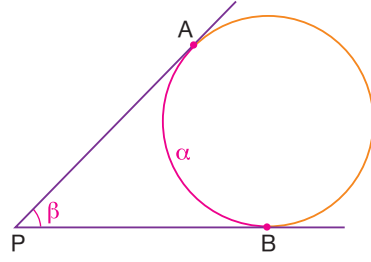
$$1 + 2m = \sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + m^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

her iki yanın karesi alınırsa,

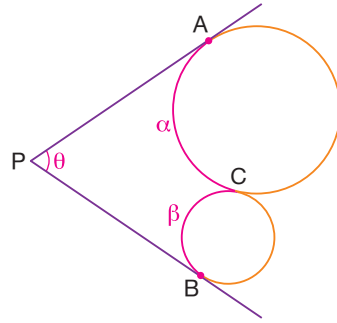
$$3m^2 + 8m - 3 = 0$$

$$(3m - 1) \cdot (m + 3) = 0 \text{ ise } m_1 = \frac{1}{3}, m_2 = -3 \text{ bulunur.}$$

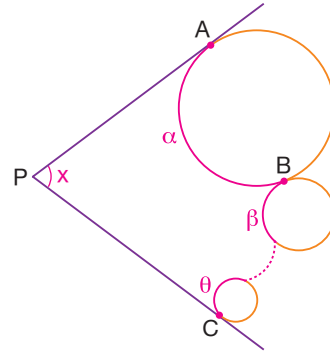
✓ Pratik Bilgi



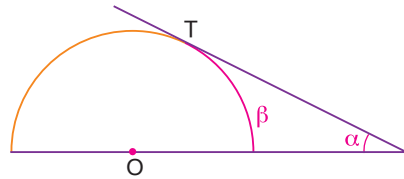
A, B teğet noktaları ise $\alpha + \beta = 180^\circ$



A, B, C teğet noktaları ise $\alpha + \beta + \theta = 360^\circ$

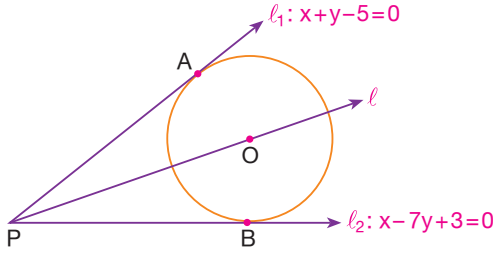


A, B, C teğet noktaları ise $x + \alpha + \beta + \dots + \theta = (\text{Çember sayısı} \cdot 180^\circ)$



T teğet noktası ise $\alpha + \beta = 90^\circ$

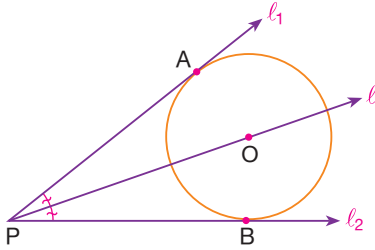
ÖRNEK - 5



O merkezli çemberde, A, B teğet değme noktalarıdır.

Buna göre, l doğrusunun eğimini bulalım.

ÇÖZÜM

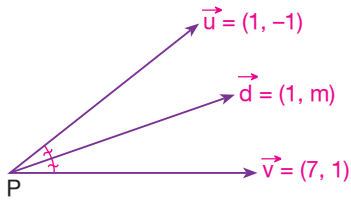


PO açıortay olup l doğrusu l_1 ve l_2 doğrularının açıortay doğrusudur.

l_1 doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{u} = (1, -1)$

l_2 doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{v} = (7, 1)$

l doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{d} = (1, m)$



$\vec{d}$ vektörü $\|\vec{u}\| \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\| \cdot \vec{u}$ ile lineer bağımlıdır.

$$\|\vec{u}\| \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\| \cdot \vec{u} = \sqrt{2} \cdot (7, 1) + 5\sqrt{2} \cdot (1, -1)$$

$$\|\vec{u}\| \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\| \cdot \vec{u} = (12\sqrt{2}, -4\sqrt{2}) \text{ olup,}$$

$\vec{d}$ vektörü ile

$\|\vec{u}\| \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\| \cdot \vec{u}$ nün lineer bağımlılığından,

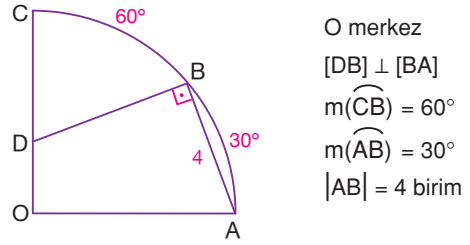
$$\|\vec{u}\| \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\| \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{d} \text{ eşitliği ile}$$

$$(12\sqrt{2}, -4\sqrt{2}) = k(1, m) \Rightarrow m = -\frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

✓ Pratik Bilgi

Eğimleri verilen iki doğrunun açıortaylarının doğrultularını bulmak için verilen doğrultulardaki birim vektörleri bulur, bunların toplamı bir açıortayın doğrultusunu, farkı da diğer açıortayın doğrultusunu verir.

ÖRNEK - 6

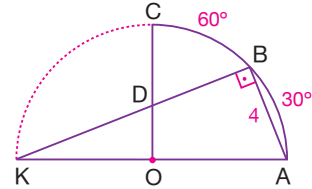


O merkez
 $[DB] \perp [BA]$
 $m(\widehat{CB}) = 60^\circ$
 $m(\widehat{AB}) = 30^\circ$
 $|AB| = 4$ birim

Buna göre, $|BD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

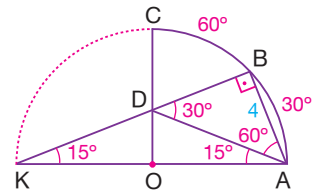
Çapı gören çevre açının ölçüsü 90° olduğundan, şekil yarım çembere tamamlanırsa,



$\widehat{BKA}$ çevre açısı olduğundan,

$m(\widehat{AKB}) = 15^\circ$ ve $|AO| = |OK|$ olup

A ve D noktalarını birleştirelim.



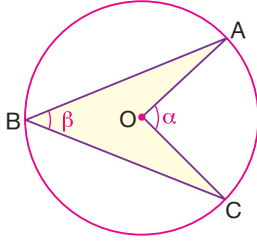
Böylece,

ABD dik üçgeninde, $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$

$|BD| = 4\sqrt{3}$ birim bulunur.

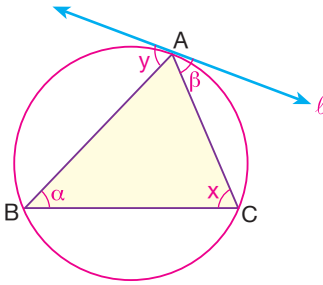
SONUÇLAR :

1. Aynı yayı gören çevre açının ölçüsü, merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir.



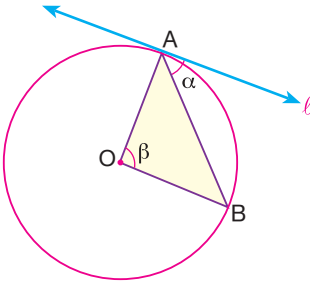
O merkez
 $\beta = \frac{\alpha}{2}$ dir.

2. Aynı yayı gören çevre açının ölçüsü teğet – kiriş açının ölçüsüne eşittir.



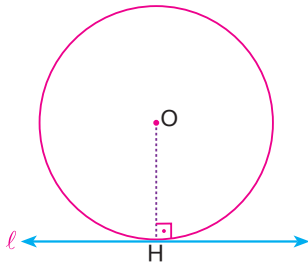
A teğet noktası
 $\alpha = \beta$
 $x = y$

3. Aynı yayı gören merkez açının ölçüsü teğet – kiriş açının ölçüsünün iki katına eşittir.



O merkez
 $\beta = 2 \alpha$

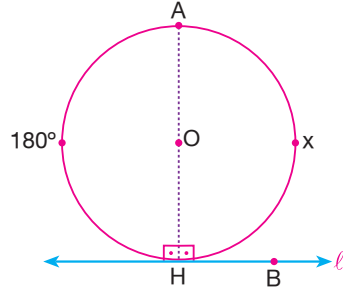
4. Bir çemberin merkezini teğet değme noktasına bileştiren yarıçap teğete diktir.



ℓ doğrusu çembere H noktasında teğet ise $[OH] \perp \ell$ dir.

İspat :

1. Yol :

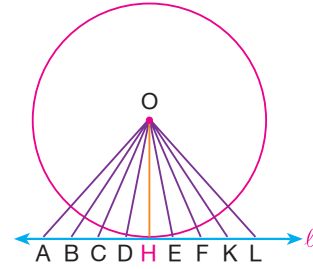


$[AH]$ çap olup $m(\widehat{AxH}) = 180^\circ$ ve

$\widehat{AHB}$ teğet – kiriş açısı olduğundan,

$m(\widehat{AHB}) = 90^\circ$ olur.

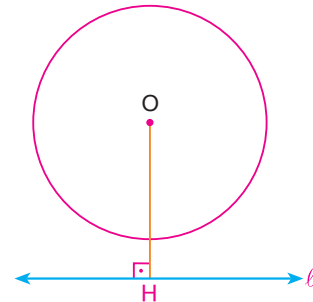
2. Yol :



O noktasından ℓ doğrusuna giden yollardan en kısa olanı $[OH]$ olacağından $[OH] \perp \ell$ dir.

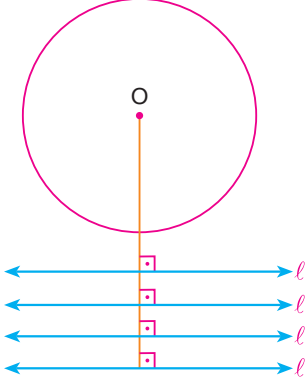
3. Yol :

Bir çemberin merkezinden çembere kesmeyen bir doğruya dikme çizelim.

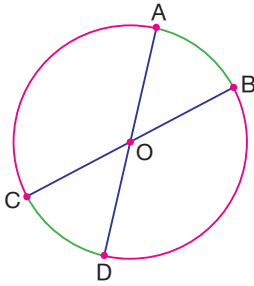


Şimdide ℓ doğrusuna paralel çok sayıda doğru çizelim.

Bir süre sonra ℓ doğrusu çembere teğet olur ve yöndeşlikten $[OH] \perp \ell$ olduğu görülür.



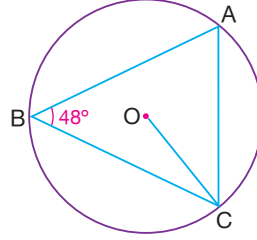
5. Bir çemberde iki küçük yayın eş olması için gerek ve yeter koşul bu yayların merkez açıların eş olmasıdır.



$$m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD}) \text{ ise} \\ [AD] \cap [BC] = O \text{ olmalıdır.}$$



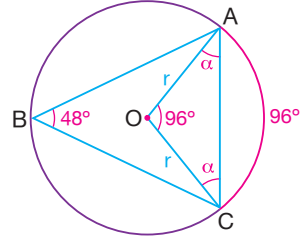
ÖRNEK - 7



ABC üçgen
O, merkez
 $m(\widehat{ABC}) = 48^\circ$

ACO açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



$$m(\widehat{ABC}) = 48^\circ$$

$$m(\widehat{AC}) = 2 \cdot m(\widehat{ABC}) \quad (\text{Çevre açısı})$$

$$m(\widehat{AC}) = 96^\circ \text{ dir.}$$

$$m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{AC}) \quad (\text{Merkez açısı})$$

$$m(\widehat{AOC}) = 96^\circ \text{ olur.}$$

$$|OA| = |OC| = r \text{ olduğundan,}$$

$$\widehat{AOC} \text{ ikizkenar üçgendir.}$$

$$\text{Bundan dolayı } m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{OCA}) \text{ dır.}$$

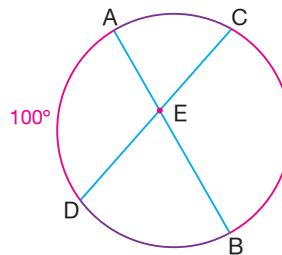
Böylece,

$$96^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 84^\circ$$

$$\alpha = 42^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 8



$$[AB] \cap [CD] = \{E\}$$

$$m(\widehat{BC}) = 120^\circ$$

$$m(\widehat{AD}) = 100^\circ$$

AEC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :

$$m(\widehat{AD}) = 100^\circ \text{ ve } m(\widehat{BC}) = 120^\circ$$

$$m(\widehat{CEB}) = \frac{m(\widehat{CB}) + m(\widehat{AD})}{2} \text{ olduğundan,}$$

$$m(\widehat{CEB}) = \frac{100^\circ + 120^\circ}{2} = 110^\circ \text{ çıkar.}$$

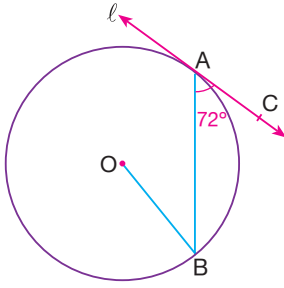
$$m(\widehat{AEC}) \text{ ve } m(\widehat{CEB}) \text{ bütünler iki açı olduğundan,}$$

$$m(\widehat{AEC}) + m(\widehat{CEB}) = 180^\circ$$

$$\alpha + 110^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 70^\circ \text{ bulunur.}$$

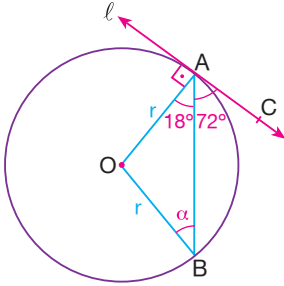
ÖRNEK - 9



A teğet noktası
 $m(\widehat{BAC}) = 72^\circ$

OBA açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



ℓ doğrusu çembere A noktasında teğettir.

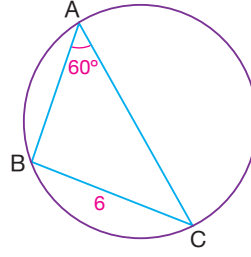
Bundan dolayı, $m(\widehat{OAB}) = 18^\circ$ olup

$|OA| = |OB|$ olduğundan $\triangle AOB$ ikizkenar üçgen olur.

Böylece, $m(\widehat{OBA}) = m(\widehat{OAB})$ dır.

$\alpha = 18^\circ$ olur.

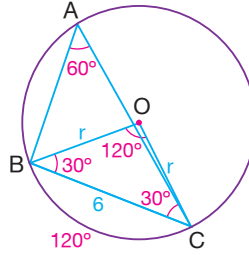
ÖRNEK - 10



ABC üçgen
 $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$
 $|BC| = 6$ birim

Çemberin yarıçap uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :



$$2 \cdot m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BC}) \text{ olduğundan,}$$

$$m(\widehat{BC}) = 120^\circ \text{ çıkar.}$$

$$m(\widehat{BC}) = m(\widehat{BOC}) \text{ olduğundan,}$$

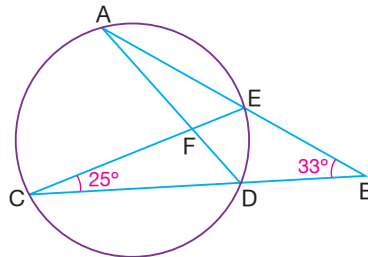
$$m(\widehat{BOC}) = 120^\circ \text{ olur.}$$

$\triangle BOC$ ikizkenar üçgen olduğundan,

$120^\circ - 30^\circ - 30^\circ$ üçgeninden,

$$r\sqrt{3} = 6 \Rightarrow r = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ birim bulunur.}$$

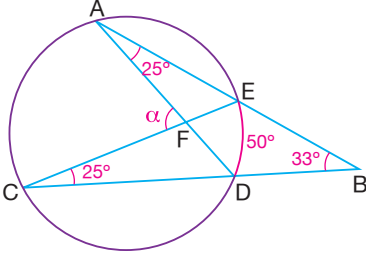
ÖRNEK - 11



ABD üçgen
ECB üçgen
 $m(\widehat{ABC}) = 33^\circ$
 $m(\widehat{ECB}) = 25^\circ$

AFC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



Çevre açıdan dolayı,

$$2 \cdot m(\widehat{DAE}) = 2 \cdot m(\widehat{ECD}) = m(\widehat{ED}) \text{ olur.}$$

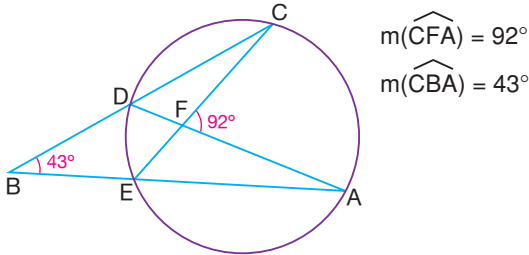
Buradan, $m(\widehat{DAE}) = 25^\circ$ çıkar.

$$m(\widehat{AFC}) = \alpha \text{ diyelim.}$$

$$\underbrace{m(\widehat{DAE})}_{25^\circ} + \underbrace{m(\widehat{ECB})}_{25^\circ} + \underbrace{m(\widehat{ABC})}_{33^\circ} = \alpha$$

$$\alpha = 83^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 12



BCE açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :

Çevre açıdan dolayı,

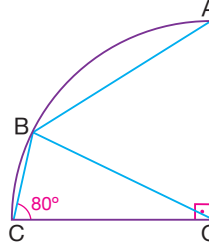
$$2 \cdot m(\widehat{BCE}) = 2 \cdot m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DE}) \text{ olur.}$$

Bu durumdan, $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{BCE}) = \alpha$ olmalıdır.

$$\underbrace{m(\widehat{BCE})}_{\alpha} + \underbrace{m(\widehat{BAD})}_{\alpha} + \underbrace{m(\widehat{CBA})}_{43^\circ} = 92^\circ$$

$$2\alpha = 49^\circ \Rightarrow \alpha = \left(\frac{49}{2}\right)^\circ \text{ bulunur.}$$

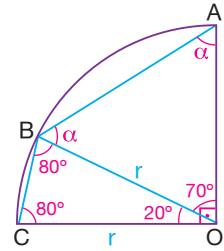
ÖRNEK - 13



O merkez
[AO] ⊥ [OC]
 $m(\widehat{OCB}) = 80^\circ$

OBA açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



|OB| = |OC| = r olduğundan,

$\widehat{BOC}$ ikizkenar üçgen olup

$$m(\widehat{CBO}) = m(\widehat{BCO}) = 80^\circ$$

Buradan, $m(\widehat{BOC}) = 20^\circ$ olur.

$$m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$$

Buradan, $m(\widehat{AOB}) = 70^\circ$ dir.

|OB| = |OA| = r olduğundan,

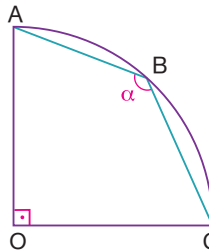
$\widehat{ABO}$ ikizkenar üçgeninde,

$$m(\widehat{ABO}) + m(\widehat{BAO}) + m(\widehat{BOA}) = 180^\circ$$

$$\alpha + \alpha + 70^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 110^\circ \Rightarrow \alpha = 55^\circ \text{ bulunur.}$$

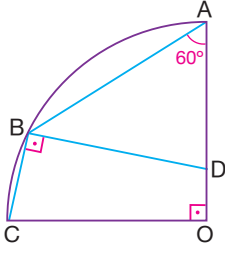
✓ Pratik Bilgi



O merkezli çeyrek
çemberde

$$\alpha = 135^\circ \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 14



O merkez
 $[AO] \perp [OC]$
 $[DB] \perp [BC]$
 $m(\widehat{BAO}) = 60^\circ$

ADB açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

$$m(\widehat{ABC}) = 135^\circ \text{ dir.}$$

$$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{CBD})$$

$$m(\widehat{ABD}) = 135^\circ - 90^\circ$$

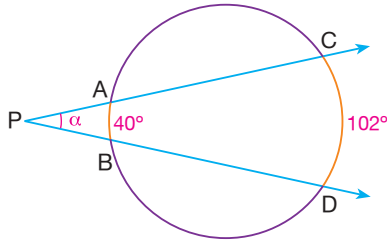
$$m(\widehat{ABD}) = 45^\circ \text{ dir.}$$

$\widehat{ABD}$ nde iç açılar toplamından,

$$m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{ADB}) + m(\widehat{BAD}) = 180^\circ \text{ olup}$$

$$m(\widehat{ADB}) = 75^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 15



$$m(\widehat{CD}) = 102^\circ$$

$$m(\widehat{AB}) = 40^\circ$$

CPD açısının ölçüsünü bulalım.

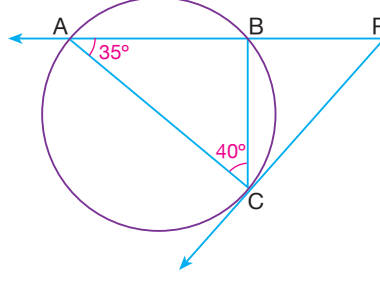
ÇÖZÜM

$$m(\widehat{CPD}) = \frac{m(\widehat{CD}) - m(\widehat{AB})}{2} \text{ olduğundan,}$$

$$\alpha = \frac{102^\circ - 40^\circ}{2}$$

$$\alpha = \frac{62^\circ}{2} \Rightarrow \alpha = 31^\circ \text{ bulunur.}$$

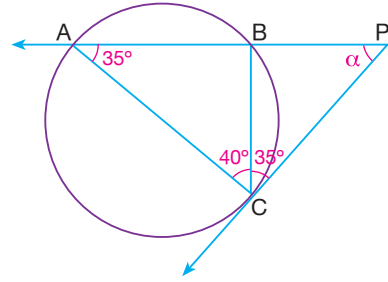
ÖRNEK - 16



APC üçgen
 $m(\widehat{PAC}) = 35^\circ$
 $m(\widehat{ACB}) = 40^\circ$
 C teğet noktası

APC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM



$$m(\widehat{BCP}) = m(\widehat{PAC}) = 35^\circ \text{ (Teğet - kiriş açıdan)}$$

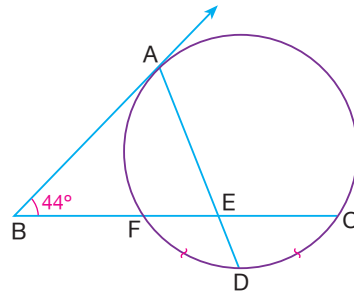
$\widehat{ACP}$ nde iç açılar toplamından,

$$m(\widehat{PAC}) + m(\widehat{ACP}) + m(\widehat{APC}) = 180^\circ$$

$$35^\circ + 75^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 70^\circ \text{ bulunur.}$$

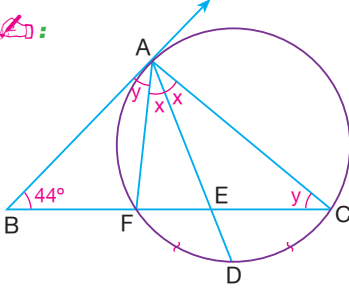
ÖRNEK - 17



$m(\widehat{FD}) = m(\widehat{DC})$
 A teğet noktası
 $m(\widehat{ABC}) = 44^\circ$

AEC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



Çevre açıdan, $m(\widehat{FAD}) = m(\widehat{DAC}) = x$ diyelim.

Aynı yayı gördüklerinden,

$$m(\widehat{BAF}) = m(\widehat{ACB}) = y \text{ olur.}$$

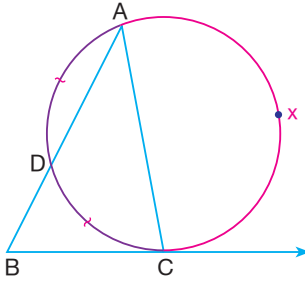
$$\text{Buradan, } 44^\circ + y + x + x + y = 180^\circ$$

$$2x + 2y = 136^\circ \Rightarrow x + y = 68^\circ \text{ çıkar.}$$

$\widehat{AEC}$ nin iç açıları toplamından,

$$m(\widehat{AEC}) = 68^\circ \text{ bulunur.}$$

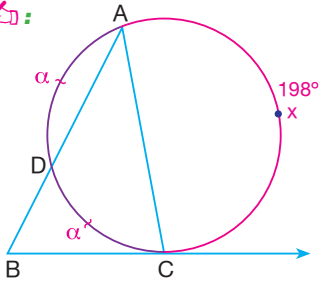
ÖRNEK - 18



$$\begin{aligned} m(\widehat{AD}) &= m(\widehat{DC}) \\ m(\widehat{AxC}) &= 198^\circ \\ \text{C teğet noktası} \end{aligned}$$

ABC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



Tüm yayın ölçüsü 360° olduğundan,

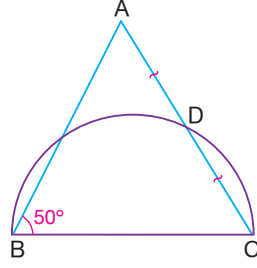
$$m(\widehat{AD}) + m(\widehat{DC}) + m(\widehat{AxC}) = 360^\circ$$

$$\alpha + \alpha + 198^\circ = 360^\circ$$

$$2\alpha = 162^\circ \Rightarrow \alpha = 81^\circ \text{ olup}$$

$$m(\widehat{ABC}) = \frac{198^\circ - 81^\circ}{2} = \left(\frac{117}{2}\right)^\circ \text{ bulunur.}$$

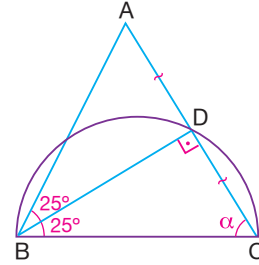
ÖRNEK - 19



[BC] çap
ABC üçgen
 $|AD| = |DC|$
 $m(\widehat{ABC}) = 50^\circ$

ACB açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



Çapı gören çevre açısı 90° olduğundan,

$$m(\widehat{BDC}) = 90^\circ \text{ bulunur.}$$

$|AD| = |DC|$ ve $[BD] \perp [AC]$ olduğundan,

$\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgendir.

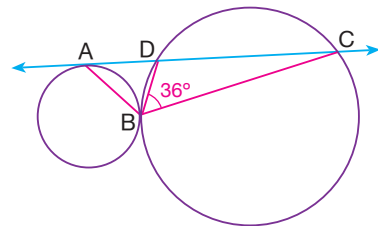
[BD] açıortay olduğundan,

$$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) = 25^\circ \text{ olur.}$$

$$\widehat{DBC} \text{ nde } m(\widehat{DBC}) + m(\widehat{DCB}) = 90^\circ$$

$$25^\circ + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 65^\circ \text{ bulunur.}$$

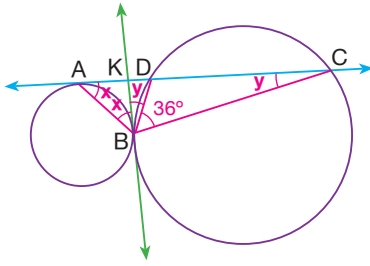
ÖRNEK - 20



A, B teğet
değme noktası
 $m(\widehat{DBC}) = 36^\circ$

ABD açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



$$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ABK}) = x \text{ (Aynı yayı gördükleri için)}$$

$$\widehat{m(KBD)} = \widehat{m(ACB)} = y \quad (\text{Aynı yayı gördükleri için})$$

ABC üçgeninde,

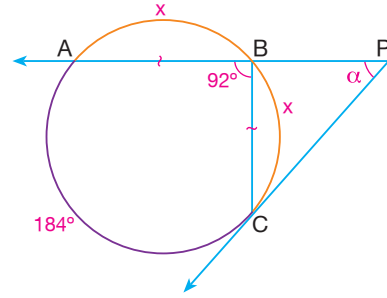
$$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ACB}) = 180^\circ$$

$$x + y + 36^\circ + x + y = 180^\circ$$

$$x + y = 72^\circ$$

Buradan, $m(\widehat{ABD}) = x + y = 72^\circ$ bulunur.

ÇÖZÜM :



$$2.m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{AC})$$

$$2.92^\circ = m(\widehat{AC}) = 184^\circ \text{ olup}$$

$$|AB| = |BC| \Rightarrow m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BC})$$

$$184^\circ + m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BC}) = 360^\circ$$

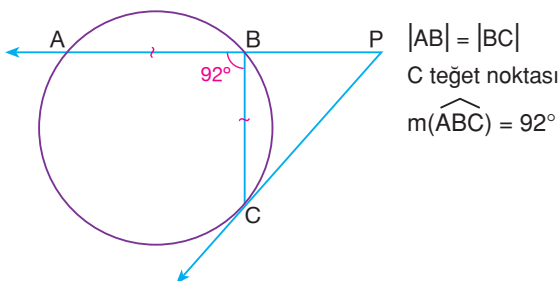
$$184^\circ + 2x = 360^\circ$$

$$2x = 176^\circ \Rightarrow x = 88^\circ$$

$$m(\widehat{APC}) = \frac{m(\widehat{AC}) - m(\widehat{BC})}{2} \text{ olduğundan,}$$

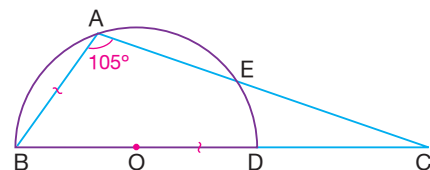
$$\alpha = \frac{184^{\circ} - 88^{\circ}}{2} \Rightarrow \alpha = 48^{\circ} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK – 21



APC açısının ölçüsünü bulalım.

ÖRNEK – 22

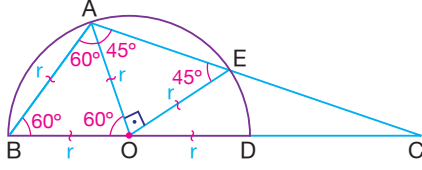


ABC üçgen, O merkez,

$$|AB| = |OD| \text{ ve } m(\widehat{BAC}) = 105^\circ$$

AE yayının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :

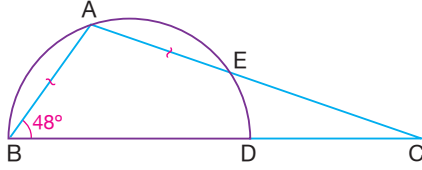


$\triangle ABO$ oluşturursak, $\triangle ABO$ eşkenar üçgen olur.

$\triangle AOE$ oluşturursak, $\triangle AOE$ ikizkenar dik üçgen olur.

Buradan, $m(\widehat{AE}) = 90^\circ$ bulunur. (Merkez açıdan)

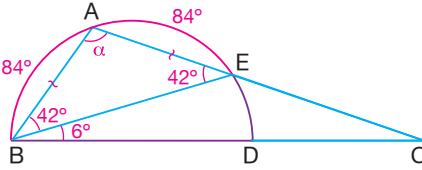
ÖRNEK - 23



ABC üçgen, [BD] çap,
|AB| = |AE| ve $m(\widehat{ABC}) = 48^\circ$

BAC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



$2 \cdot m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{AED})$ (Çevre açıdan)

$m(\widehat{AED}) = 96^\circ$, $m(\widehat{BAD}) = 180^\circ$ ve

|AB| = |AE| olduğundan,

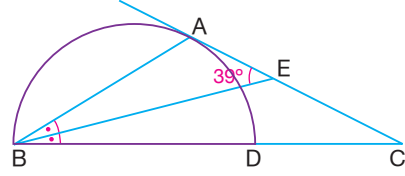
$m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AE}) = 84^\circ$ olup

$\triangle ABE$ ikizkenar üçgeninden,

$\alpha + 42^\circ + 42^\circ = 180^\circ$

$\alpha + 84^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 96^\circ$ bulunur.

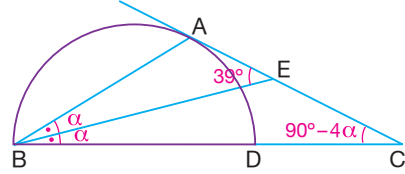
ÖRNEK - 24



ABC üçgen, A teğet noktası, [BD] çap,
[BE] açıortay ve $m(\widehat{AEB}) = 39^\circ$

ACB açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



$m(\widehat{AD}) = 4\alpha$ (Çevre açısı)

$m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{AD}) = 90^\circ$ olup

$m(\widehat{ACB}) = 90^\circ - m(\widehat{AD}) \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 90^\circ - 4\alpha$

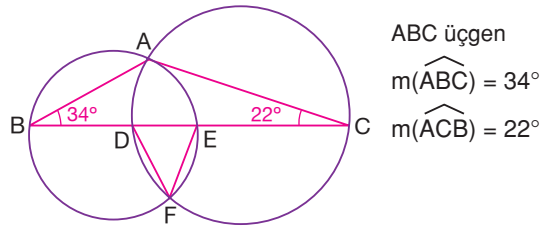
BEC üçgeninde, iki iç açının ölçüleri toplamı bir dış açının ölçüsüne eşit olduğundan,

$m(\widehat{EBD}) + m(\widehat{ACB}) = 39^\circ$ dir.

$\alpha + 90^\circ - 4\alpha = 39^\circ \Rightarrow \alpha = 17^\circ$ bulunur.

$m(\widehat{ACB}) = 90^\circ - 4\alpha \Rightarrow 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ$ bulunur.

ÖRNEK - 25



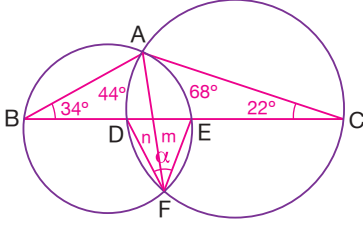
ABC üçgen

$m(\widehat{ABC}) = 34^\circ$

$m(\widehat{ACB}) = 22^\circ$

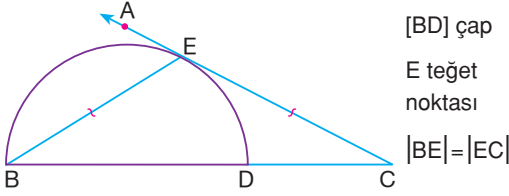
DFE açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



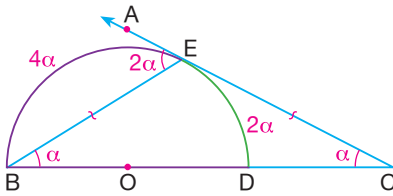
Aynı yayı ($\widehat{AE}$ yayını) gördükleri için,
 $m(\widehat{AFE}) = m(\widehat{ABC}) = 34^\circ \Rightarrow m = 34^\circ$ olup
 Aynı yayı ($\widehat{AD}$ yayını) gördükleri için,
 $m(\widehat{DFA}) = m(\widehat{ACB}) = 22^\circ \Rightarrow n = 22^\circ$ dir.
 $\alpha = m + n = 34^\circ + 22^\circ = 56^\circ$ bulunur.

ÖRNEK - 26



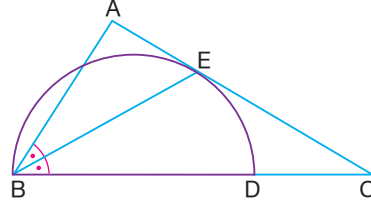
BE yayının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



$m(\widehat{ED}) = 2 \cdot m(\widehat{EBC})$ (Çevre açısı)
 $m(\widehat{ED}) = 2\alpha$
 $m(\widehat{AEB}) = 2\alpha$ (Dış açı)
 $m(\widehat{EB}) = 4\alpha$
 $6\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$ olup.
 O halde $m(\widehat{BE}) = 120^\circ$ bulunur.

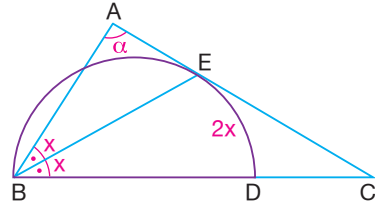
ÖRNEK - 27



ABC üçgen
 [BE] açıortay
 [BD] çap
 E teğet değ-
 me noktası

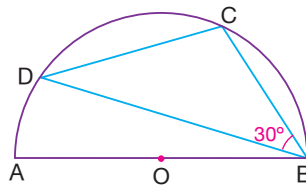
BAC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



$m(\widehat{ED}) = 2x$ (Çevre açısı)
 $m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{ED}) = 90^\circ$ olduğundan,
 $m(\widehat{ACB}) + 2x = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 90^\circ - 2x$ olup.
 $\triangle ABC$ üçgeninde,
 $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB}) = 180^\circ$
 $\alpha + 2x + 90^\circ - 2x = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ$ bulunur.

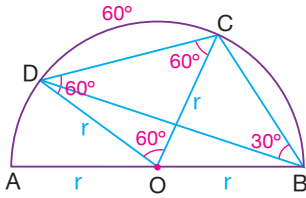
ÖRNEK - 28



BCD üçgen
 $m(\widehat{DBC}) = 30^\circ$

O merkezli yarı çemberde $\frac{|DC|}{|OB|}$ yi bulalım.

ÇÖZÜM :



$$2. \widehat{m(\text{CBD})} = \widehat{m(\text{DC})} = 60^\circ \text{ (Çevre açıdan)}$$

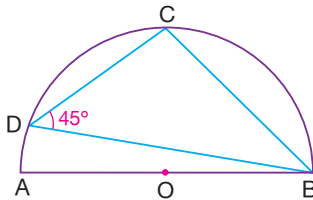
$$m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{DC}) = 60^\circ \text{ (Merkez açıdan)}$$

Buradan, eşkenar üçgen çıkar.

$|DC| = r$ olur.

Buradan, $\frac{|DC|}{|OB|} = \frac{r}{r} = 1$ bulunur.

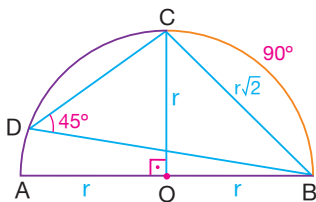
ÖRNEK – 29



BDC üçgen
 $m(\widehat{BDC}) = 45^\circ$

O merkezli yarım çemberde $\frac{|AB|}{|BC|}$ yi bulalım.

ÇÖZÜM :



$$2. \widehat{CDB} = \widehat{BC} = 90^\circ \text{ (Çevre açıdan)}$$

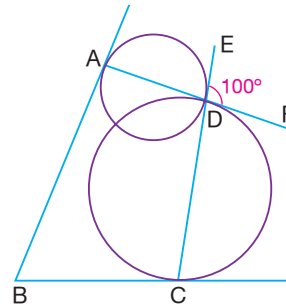
$$m(\widehat{COB}) = m(\widehat{BC}) = 90^\circ \text{ (Merkez açıdan)}$$

Buradan, **COB** üçgeni ikizkenar üçgen bulunur.

$45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ üçgeninden $|BC| = r\sqrt{2}$ olup.

Buradan, $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{2r}{r\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ bulunur.

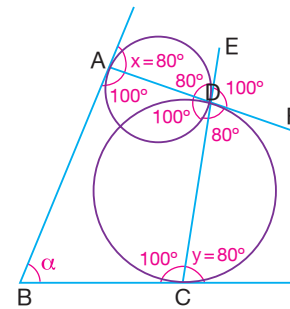
ÖRNEK – 30



D, A, C teğet noktaları
 $m(\widehat{EDF}) = 100^\circ$

ABC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



$x = 80^\circ$ (Aynı yayı gördükleri için)

$y = 80^\circ$ (Aynı yayı gördükleri için)

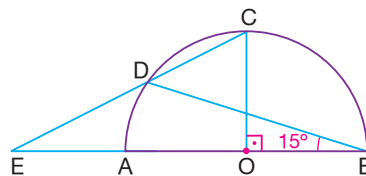
$$m(\widehat{EDF}) = m(\widehat{ADC}) = 100^\circ \text{ (Ters aç\i)}$$

ABCD dörtgeninde iç açılar toplamından,

$$\alpha + 100^\circ + 100^\circ + 100^\circ = 360^\circ$$

$$\alpha + 300^\circ = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ \text{ bulunur.}$$

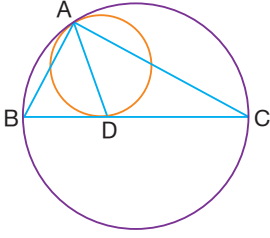
ÖRNEK – 31



[AB] çap
O merkez
[CO] $\perp$ [EB]
 $\widehat{m(\text{DBE})} = 15^\circ$

CEB açısının ölçüsünü bulalım.

ÖRNEK - 33

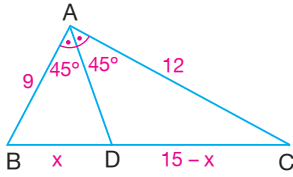


A, D teğet noktası
[BC] çap
|AB| = 9 birim
|AC| = 12 birim

Buna göre, |BD| uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Çapı gören çevre açısı 90° ve [AD] açıortay olduğundan,



|BC| uzunluğu Pisagor bağıntısı ile 15 birim olup

Açıortay teoremi ile,

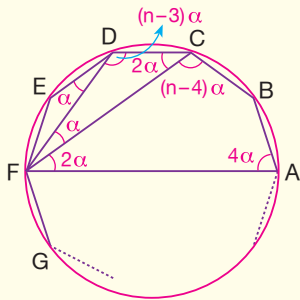
$$\frac{9}{x} = \frac{12}{15-x} \Rightarrow x = \frac{45}{7} \text{ birim bulunur.}$$



NOT :

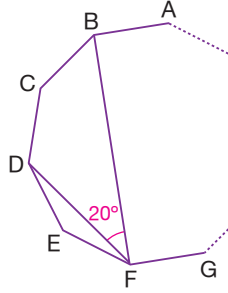
Tüm düzgün çokgenlerin köşelerinden çember geçer.

... ABCDE ... düzgün çokgen



Bir kenarı gören açı α ise dış açı 2α dır.

ÖRNEK - 34



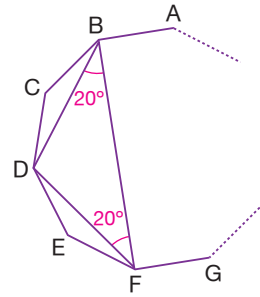
... ABCDE ...
düzgün çokgen

Buna göre, FDC açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

B ile D noktası birleştirilirse, DFB ile DBF açıları aynı sayıda kenar gördüğünden, eş ölçülüdür.

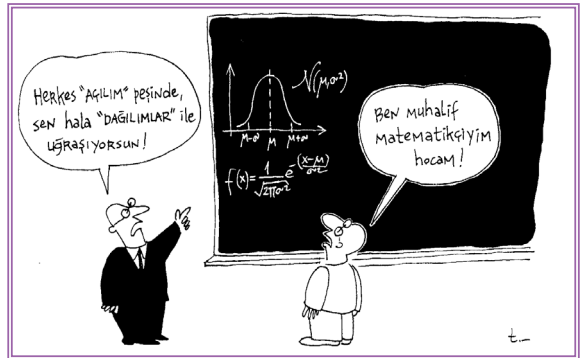
Böylece,



$m(\widehat{DBF}) = 20^\circ$ olup $m(\widehat{BDF}) = 140^\circ$ ise

O halde, $m(\widehat{CDB}) = m(\widehat{EDF}) = 10^\circ$ olup

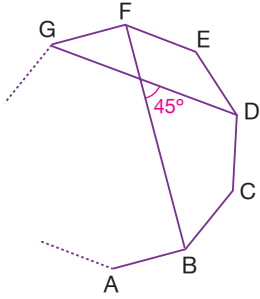
$m(\widehat{FDC}) = 150^\circ$ bulunur.



(Matematik Dünyası Dergisi-www.matematikdunyasi.org)



ÖRNEK - 35



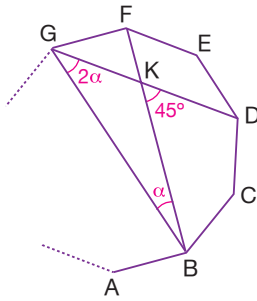
... ABCDE ... düzgün çokgen

Buna göre, GDE açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

[GB] köşegenini çizip, $m(\widehat{GBF}) = \alpha$ diyelim.

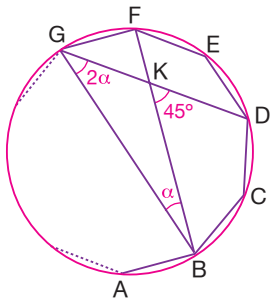
Bu durumda, $m(\widehat{BGD}) = 2\alpha$ olur.



$\widehat{BGK}$ nde 45° bir dış açı olup

$$3\alpha = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ \text{ dir.}$$

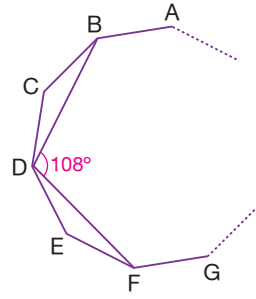
O halde,



GDE açısı 2 kenar gördüğünden,

$$m(\widehat{GDE}) = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 36



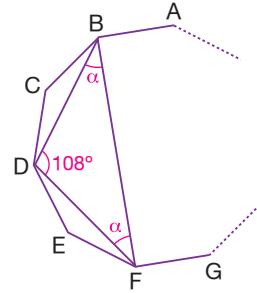
... ABCDE ... düzgün çokgen

Buna göre, ABD açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM

[BF] köşegeni çizilirse, $m(\widehat{DBF}) = m(\widehat{DFB})$ olur.

$m(\widehat{DBF}) = \alpha$ diyelim.



Böylece, $\widehat{DBF}$ nde

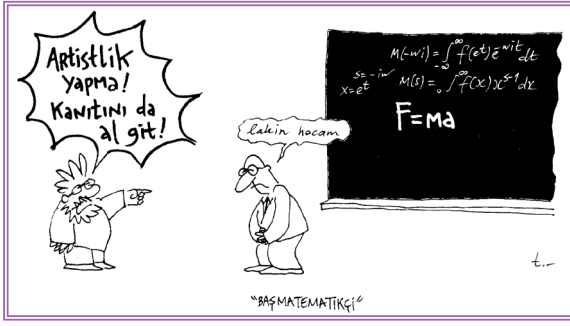
$$2\alpha + 108^\circ = 180^\circ \text{ eşitliğinden, } \alpha = 36^\circ \text{ olur.}$$

Böylece, $m(\widehat{CBD}) = 18^\circ$ dir.

Bu durumda, bir iç açı 144° olup

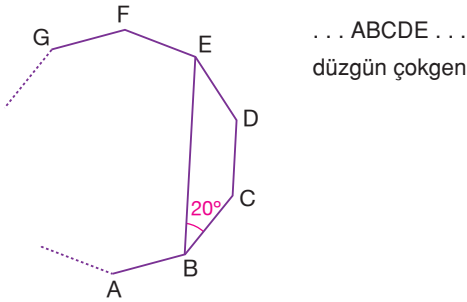
$$m(\widehat{ABD}) = 144^\circ - 18^\circ = 136^\circ \text{ bulunur.}$$





(Matematik Dünyası Dergisi-www.matematikdunyasi.org)

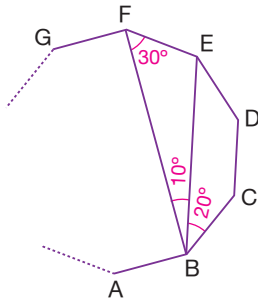
ÖRNEK - 37



Buna göre, BEF açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :

[BF] köşegeni çizilirse, $m(\widehat{EBC}) = 20^\circ$ olduğundan, $m(\widehat{FBE}) = 10^\circ$ ve $m(\widehat{EFB}) = 30^\circ$ olur.

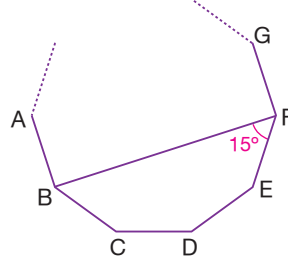


Böylece, BEF nde,

$$30^\circ + 10^\circ + m(\widehat{BEF}) = 180^\circ \text{ olup}$$

$$m(\widehat{BEF}) = 140^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 38



... ABCDE ...
düzgün çokgen

Buna göre, ABF açısının ölçüsünü bulalım.

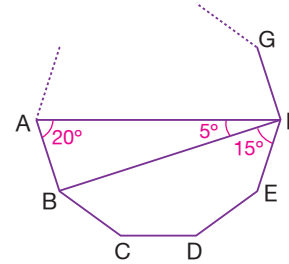
ÇÖZÜM :

[AF] köşegeni çizelim.

Üç kenarı gören çevre aç 15° olduğundan,

bir kenarı gören $m(\widehat{AFB}) = 5^\circ$ ve

$m(\widehat{BAF}) = 20^\circ$ olup



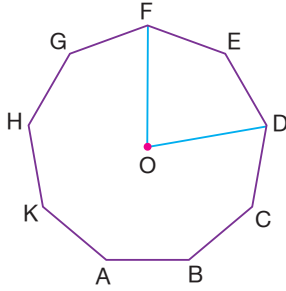
Böylece, ABF nde iç açılar toplamından,

$m(\widehat{ABF}) = 155^\circ$ bulunur.



ÖRNEK - 39

(2011 - LYS)

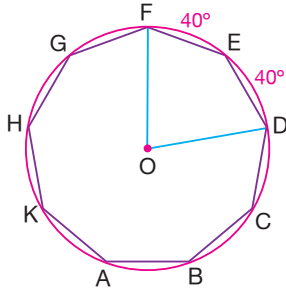


Yukarıda O noktası ABCDEFGHK düzgün dokuzgeninin köşelerinden geçen çemberin merkezi olduğuna göre, FOD açısının ölçüsünü bulalım.

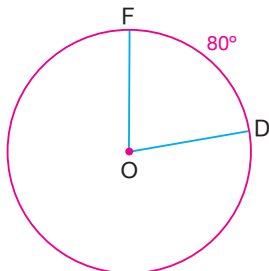
ÇÖZÜM :

Düzgün dokuzgenin köşelerinden geçecek şekilde çember çizersek, tüm kenarlar eşit uzunlukta olduğu için çember yayını 9 eş parçaya ayırır.

O halde her bir yayın ölçüsü $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$ olup



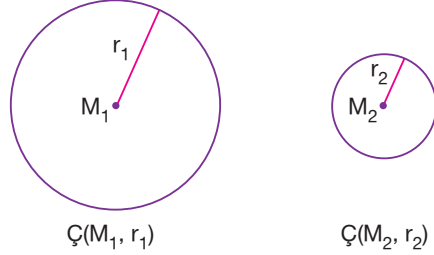
FOD açısı merkez açı olup ölçüsü FED yayının ölçüsüne eşittir.



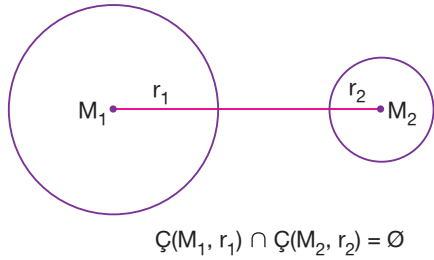
O halde, $m(\widehat{FOD}) = 80^\circ$ bulunur.

Denklemleri Verilen İki Çemberin Birbirine Göre Konumları

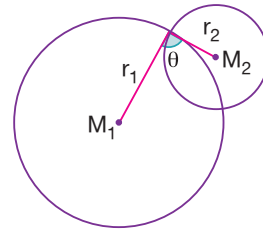
Merkezi M_1 , yarıçap uzunluğu r_1 ve
Merkezi M_2 , yarıçap uzunluğu r_2 olan
iki çember düşünelim.



1. $\| \overrightarrow{M_1 M_2} \| > r_1 + r_2$ ise çemberler ayrıktır.



2. $\| \overrightarrow{M_1 M_2} \|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 \cdot r_2 \cdot \cos\theta$ ise çemberlerin θ açısı altında iki noktaları ortaktır.



Özel olarak $\theta = 90^\circ$ olursa bu iki çember **dik kesişiyor** denir.

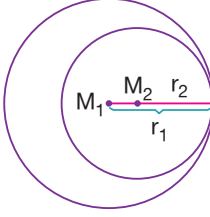
$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \text{ ve}$$

$$x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

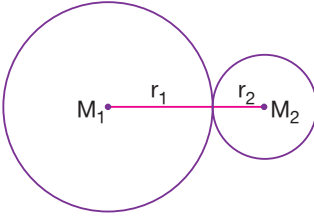
çemberleri dik kesişiyorsa,

$$D_1 \cdot D_2 + E_1 \cdot E_2 = 2(F_1 + F_2) \text{ dir.}$$

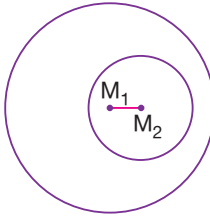
3. $\| \overrightarrow{M_1 M_2} \| = |r_1 - r_2|$ ise çemberler içten teğettir.



4. $\| \overrightarrow{M_1 M_2} \| = r_1 + r_2$ ise çemberler dıştan teğettir.



5. $\| \overrightarrow{M_1 M_2} \| < r_1 < r_2$ ise çemberler kesişmez.



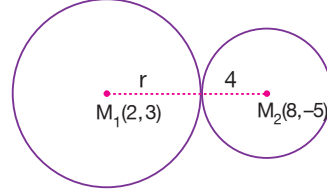
ÖRNEK - 1

Denklemleri,

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = r \text{ ve } (x - 8)^2 + (y + 5)^2 = 16$$

olan çemberler dıştan teğet olduğuna göre, r nin kaç birim olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM  :



$$|M_1 M_2| = r_1 + r_2 \text{ ise}$$

$$\sqrt{(2 - 8)^2 + (3 + 5)^2} = r + 4$$

$$10 = r + 4$$

$$r = 6 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

Denklemleri,

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 49 \text{ ve } (x - a)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

olan çemberler içten teğet olduğuna göre, a nın alabileceği değerleri bulalım.

ÇÖZÜM  :

$$|M_1 M_2| = r_1 - r_2 \text{ olmalıdır.}$$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 49 \Rightarrow M_1(4, -1), r_1 = 7 \text{ ve}$$

$$(x - a)^2 + (y - 3)^2 = 4 \Rightarrow M_2(a, 3), r_2 = 2$$

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(4 - a)^2 + (-1 - 3)^2} \\ = \sqrt{(4 - a)^2 + 16}$$

Dolayısıyla,

$$\sqrt{(4 - a)^2 + 16} = 7 - 2$$

$$(4 - a)^2 + 16 = 25$$

$$(4 - a)^2 = 9$$

$$4 - a = 3 \text{ veya } 4 - a = -3$$

$$a = 1 \text{ veya } a = 7 \text{ olabilir.}$$

ÖRNEK - 3

Denklemleri,

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9 \text{ ve } (x + 4)^2 + (y - 9)^2 = 16$$

olan iki çember arasındaki en kısa uzaklığın kaç birim olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9 \Rightarrow M_1(4, 3), r_1 = 3 \text{ birim}$$

$$(x + 4)^2 + (y - 9)^2 = 16 \Rightarrow M_1(-4, 9), r_2 = 4 \text{ birim}$$

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(4 + 4)^2 + (3 - 9)^2} = 10 \text{ birim}$$

$$r_1 + r_2 = 3 + 4 = 7 \text{ birim}$$

$$|M_1 M_2| > r_1 + r_2 \text{ olduğundan çemberler ayrıktır.}$$

Bu durumda aralarındaki en kısa uzaklık,

$$10 - 7 = 3 \text{ birim dir.}$$

ÖRNEK - 4

Denklemleri,

$$(x - 1)^2 + y^2 = r^2 \text{ ve } (x + 3)^2 + (y - r)^2 = 4$$

olan çemberlerin farklı iki noktada kesişmeleri için r nin aralığının ne olması gerektiğini bulalım.

ÇÖZÜM :

$$|M_1 M_2| < r_1 + r_2 \text{ olmalıdır.}$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow M_1(1, 0), r_1 = r \text{ ve}$$

$$(x + 3)^2 + (y - r)^2 = 4 \Rightarrow M_2(-3, r), r_2 = 2$$

$$|M_1 M_2| < r_1 + r_2$$

$$\sqrt{(1 + 3)^2 + r^2} < r + 2$$

$$r^2 + 16 < r^2 + 4r + 4$$

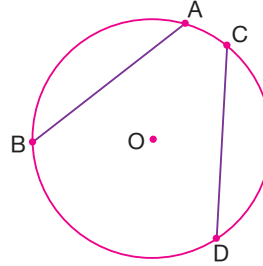
$$12 < 4r$$

$$3 < r$$

Dolayısıyla, $r \in (3, \infty)$ olmalıdır.

Çemberde Kiriş ve Kesenler
İle İlgili Özellikler

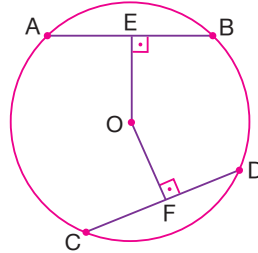
- Bir çemberde ya da eş çemberlerde eşit uzunluk-taki kirisler, arkasında eş yaylar ayırır.



$$|AB| = |CD| \text{ ise} \\ m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD}) \text{ dir.}$$

Küçük yay küçük yaya, büyük yay büyük yaya eşittir. Bu önermenin karşıtıda doğrudur.

- Bir çemberde ya da eş çemberlerde eş kirislerin merkeze olan uzaklıkları eşittir.

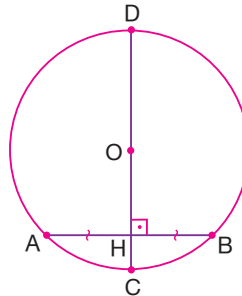


$$O \text{ merkez ve} \\ |AB| = |CD| \Rightarrow \\ |OE| = |OF| \text{ dir.}$$

Bu önermenin karşıtıda doğrudur.

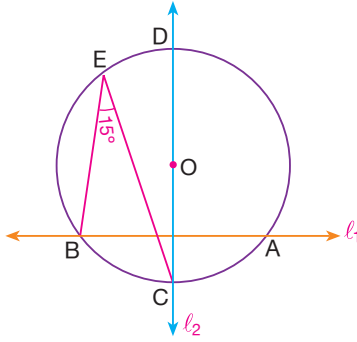
$$|OE| = |OF| \Rightarrow |AB| = |CD| \text{ dir.}$$

- Bir çemberde kiris'e dik olan bir çap kiris'i ve bu kiris'in yaylarını iki eşit parçaya böler.



$$[DC] \text{ çap ve} \\ [DC] \perp [AB] \text{ ise} \\ |AH| = |HB| \text{ ve} \\ m(\widehat{AC}) = m(\widehat{CB}), \\ m(\widehat{AD}) = m(\widehat{DB}) \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 1



O : merkez
 $l_1 : y + x - 4 = 0$
 $l_2 : y - x + 6 = 0$
 $m(\widehat{BEC}) = 15^\circ$

Buna göre, AC yayının ölçüsünü bulalım.

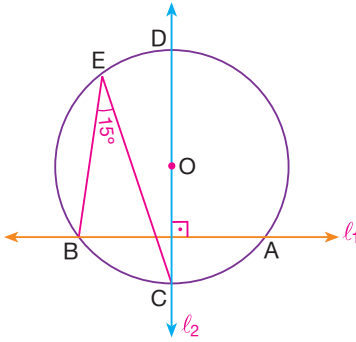
ÇÖZÜM :

l_1 doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{u} = (1, -1)$

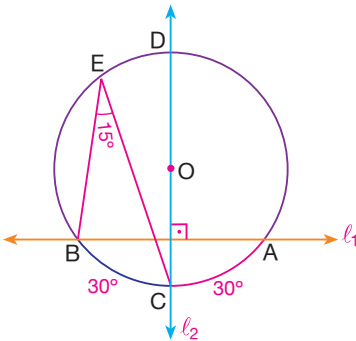
l_2 doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{v} = (1, 1)$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1 - 1 = 0$ olduğundan,

$\vec{u} \perp \vec{v}$ ve dolayısıyla $l_1 \perp l_2$ dir.



Merkezden kirişe inilen dikme kirişi ve kirişin yayını ikiye böldüğünden $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{CB}) = 30^\circ$ olur.

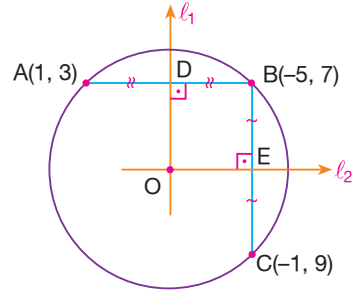


ÖRNEK - 2

- A(1, 3)
- B(-5, 7)
- C(-1, 9)

noktalarından geçen çemberin merkezinin koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM :



[AB] ve [BC] doğru parçalarının kenar orta dikmelerinin kesim noktası çemberin merkezini belirler.

[AB] nın orta noktası D(-2, 5) ve

[BC] nın orta noktası E(-3, 8)

[AB] nın eğimi $m_{AB} = \frac{7-3}{-5-1} = -\frac{2}{3} \Rightarrow m_{l_1} = \frac{3}{2}$

[BC] nın eğimi $m_{BC} = \frac{9-7}{-1+5} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{l_2} = -2$ dir.

l_1 doğrusu D(-2, 5) noktasından geçip eğimi $\frac{3}{2}$ olduğundan denklemi;

$l_1 : y - 5 = \frac{3}{2} (x - (-2))$ eşitliğinden

$l_1 : 2y - 3x - 16 = 0$ ve

l_2 doğrusu E(-3, 8) noktasından geçip eğimi -2 olduğundan denklemi;

$l_2 : y - 8 = -2 (x - (-3))$ eşitliğinden

$l_2 : y + 2x - 2 = 0$ bulunur.

O halde l_1 ve l_2 doğrularının kesim noktasını bulalım.

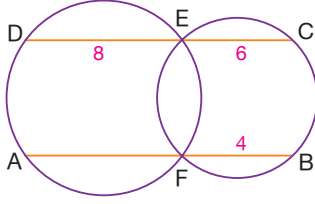
$$\begin{array}{rcl} 2y - 3x & = & 16 \\ -2 / y + 2x & = & 2 \\ \hline -7x & = & 12 \Rightarrow x = -\frac{12}{7} \text{ ve } y = \frac{38}{7} \text{ olup} \end{array}$$

Çemberin merkezi,

$M\left(-\frac{12}{7}, \frac{38}{7}\right)$ noktasıdır.



ÖRNEK - 3



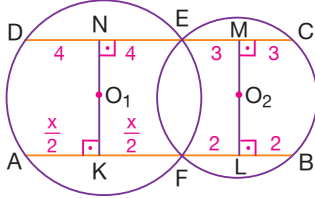
Çemberler E ve F noktalarında kesişmektedir.

$[DC] \parallel [AB]$ olduğuna göre, $|AF|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Merkezden kirişe inilen dikme kirişi eşit iki parçaya ayırır.

O halde, $|AF| = x$ birim diyelim.

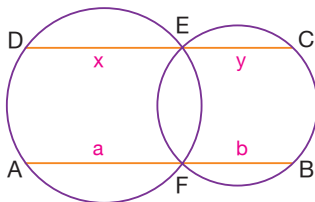


KLMN dikdörtgeninde,

$$|MN| = |KL| \text{ olup } 3 + 4 = \frac{x}{2} + 2$$

$$5 = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 10 \text{ birim bulunur.}$$

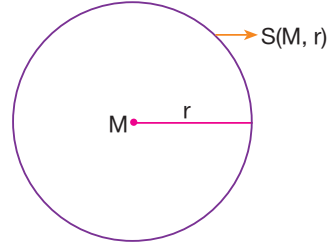
✓ Pratik Bilgi



D, E, C doğrusal
A, F, B doğrusal ve
 $[DC] \parallel [AB]$ ise
 $x + y = a + b$ dir.

Bir Çemberin Kuvvet Fonksiyonu

M merkezli ve r yarıçaplı çember $S(M, r)$ olsun.

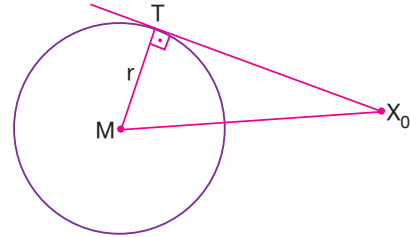


$$K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

$K(X) = \|\overrightarrow{MX}\|^2 - r^2$ dönüşümü $S(M, r)$ çemberine göre kuvvet fonksiyonudur.

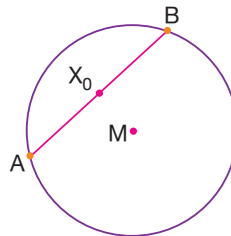
$K(X_0) = \|\overrightarrow{MX_0}\|^2 - r^2$ değerine X_0 noktasının $S(M, r)$ çemberine göre kuvveti denir.

1. X_0 noktası çemberin dışında ise, $K(X_0)$, X_0 dan $S(M, r)$ çemberine çizilen teğetin uzunluğunun karesine eşittir. $K(X_0) = \|\overrightarrow{TX_0}\|^2$



Demekki K fonksiyonu çemberin dışında pozitif tanımlıdır.

2. X_0 noktası çemberin içinde ise $K(X_0)$, X_0 dan geçen kirişin X_0 tarafından belirlenen parçalarının uzunlukları çarpımının ters işaretlisine eşittir.

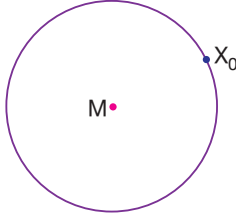


$$K(X_0) = \|\overrightarrow{MX_0}\|^2 - r^2$$

$$K(X_0) = -|AX_0| \cdot |BX_0|$$

Demekki K fonksiyonu çemberin içinde negatif tanımlıdır.

2. X_0 noktası çember üzerinde ise $K(X_0) = 0$ dir.



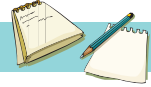
SONUÇ :

$K(X_0)$ değeri X_0 noktasından geçen doğruların oluşturduğu çember, kirişlerinin seçiminden bağımsızdır.

Bir Çemberin İçindeki Bir Noktadan Geçen En Kısa Kirişin Uzunluğu

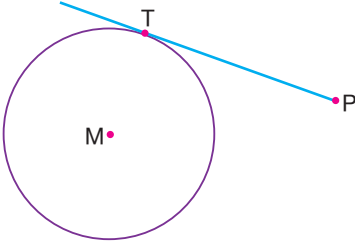
Bir çemberin içindeki X_0 noktasından geçen en kısa kirişin uzunluğu,

$$2\sqrt{|KX_0|} \text{ dir.}$$



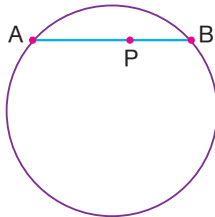
ÖZET

1



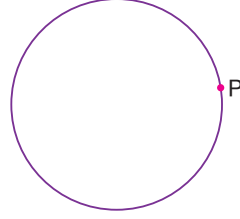
P noktasının çembere göre kuvveti $|PT|^2$ dir.

2



P noktasının çembere göre kuvveti $-|PA| \cdot |PB|$ dir.

3



P noktasının çembere göre kuvveti sıfırdır.



Özetin Özeti

Demek ki herhangi bir noktanın koordinatlarını sıfıra eşitlenmiş bir çember denkleminde yerine yazdığımızda elde edilen sayıya noktanın çembere göre kuvveti diyoruz.

- ✓ Eğer kuvvet pozitif ise bu bize noktanın çemberin dışında seçilmiş olduğunu gösterir ve kuvvetin karekökü de bu noktadan çembere çizilen teğet parçasının uzunluğunu verir.
- ✓ Eğer kuvvet negatif ise bu bize noktanın çemberin içinde seçilmiş olduğunu gösterir ve kuvvetin mutlak değerce karekökünün iki katı da bu noktadan geçen en kısa kirişin uzunluğunu verir.
- ✓ Eğer kuvvet sıfır ise bu bize noktanın çember yayı üzerinde seçilmiş olduğunu gösterir.

ÖRNEK - 1

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$ çemberi ile $P(4, 6)$ noktasının konumu hakkında yorum yapalım.

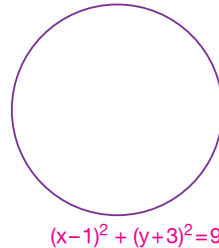
ÇÖZÜM :

$P(4, 6)$ noktasının $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$ çemberine göre kuvvetini bulalım.

$$K(P) = (4 - 1)^2 + (6 + 3)^2 - 9$$

$$K(P) = 9 + 81 - 9 \Rightarrow K(P) = 81$$

$K(P) > 0$ olduğundan $P(4, 6)$ noktası çember düzleminin dış bölgesinde bir noktadır.



ÖRNEK - 2

$M(0, 0)$ olmak üzere $\|\vec{MX}\| = 5$ çemberi ile $A(3, -4)$ noktasının konumu hakkında yorum yapalım.

ÇÖZÜM :

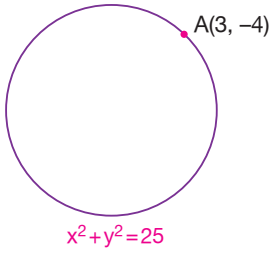
$\|\vec{MX}\| = 5$ ise $x^2 + y^2 = 25$ olup

$A(3, -4)$ noktasının çembere göre kuvvetini bulalım.

$$K(A) = 3^2 + (-4)^2 - 25$$

$K(A) = 9 + 16 - 25$ ve $K(A) = 0$ olduğundan

$A(3, -4)$ noktası çember yayı üzerindedir.



ÖRNEK - 3

$x^2 + y^2 + 2x - 3y - 5 = 0$ çemberi ile $A(1, 2)$ noktasının konumu hakkında yorum yapalım.

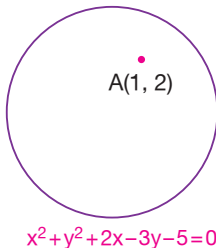
ÇÖZÜM :

$A(1, 2)$ noktasının çembere göre kuvvetini bulalım.

$$K(A) = 1^2 + 2^2 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 5$$

$K(A) = -4$ ve $K(A) < 0$ olduğundan

$A(1, 2)$ noktası çemberin iç bölgesindedir.



ÖRNEK - 4

$x^2 + y^2 - 2x + 5y - m = 0$ çemberinin dışındaki bir nokta $A(1, 2)$ olduğuna göre, m nin en büyük tamsayı değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

$A(1, 2)$ noktasının çembere göre kuvveti, $K(A) > 0$ olmalıdır.

O halde,

$$K(A) = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - m$$

$$K(A) = 1 + 4 - 2 + 10 - m$$

$$K(A) = 13 - m$$

$K(A) > 0$ olacağından,

$$13 - m > 0$$

$$m < 13 \text{ olup}$$

m nin en büyük tamsayı değeri 12 dir.

ÖRNEK - 5

$x^2 + y^2 - 3x + 2y - n = 0$ çemberinin iç bölgesindeki bir nokta $A(1, 2)$ olduğuna göre, n nin en küçük tamsayı değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

$A(1, 2)$ noktasının çembere göre kuvveti $K(A) < 0$ olmalıdır.

O halde,

$$K(A) = 1^2 + 2^2 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - n$$

$$K(A) = 1 + 4 - 3 + 4 - n$$

$$K(A) = 6 - n$$

$K(A) < 0$ olacağından,

$$6 - n < 0$$

$$n > 6 \text{ olup}$$

n nin en küçük tamsayı değeri 7 dir.

ÖRNEK - 6

$x^2 + y^2 - 5x - 4y + m = 0$ çemberinin üzerindeki bir nokta $A(-1, 3)$ olduğuna göre, m değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

$A(-1, 3)$ noktasının çembere göre kuvveti $K(A) = 0$ olmalıdır.

O halde,

$$K(A) = (-1)^2 + 3^2 - 5(-1) - 4 \cdot 3 + m$$

$$K(A) = 1 + 9 + 5 - 12 + m$$

$$K(A) = 3 + m$$

$$K(A) = 0 \text{ olacağından,}$$

$$3 + m = 0$$

$$m = -3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 7

$A(1, 4)$ noktasından $x^2 + y^2 + 3x + 2y - 1 = 0$ çemberine çizilen teğet parçasının uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçasının uzunluğu bu noktanın çembere göre kuvvetinin kareköküne eşittir.

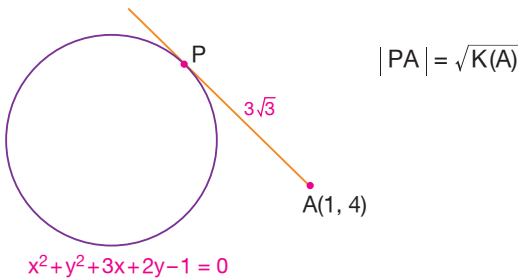
O halde,

$$K(A) = 1^2 + 4^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 - 1$$

$$K(A) = 20 + 8 - 1 \text{ ve } K(A) = 27 \text{ olup}$$

Teğet parçasının uzunluğu,

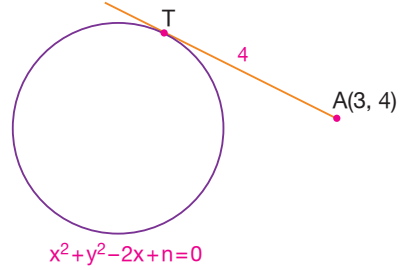
$$\sqrt{K(A)} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ birim dir.}$$



ÖRNEK - 8

$A(3, 4)$ noktasından $x^2 + y^2 - 2x + n = 0$ çemberine çizilen teğet parçasının uzunluğu 4 birim ise n değerini bulalım.

ÇÖZÜM :



$$\sqrt{K(A)} = 4 \text{ olmalıdır.}$$

O halde,

$$\sqrt{9 + 16 - 6 + n} = 4$$

$$25 - 6 + n = 16$$

$$n = -3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 9

$x^2 + y^2 = 25$ çemberinin içindeki $P(2, 1)$ noktasından geçen en kısa kirişinin uzunluğunu bulalım.

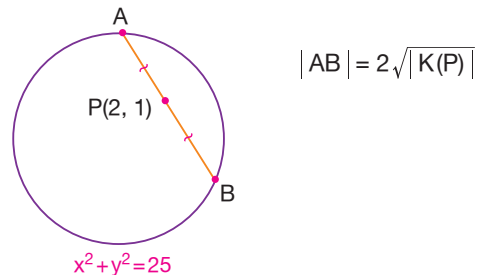
ÇÖZÜM :

$$K(P) = 2^2 + 1^2 - 25$$

$$K(P) = -20 \text{ olup}$$

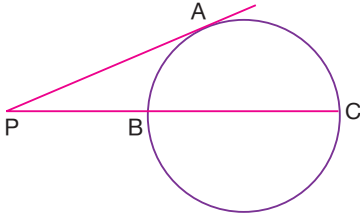
P noktasından geçen en kısa kirişinin uzunluğu,

$$2\sqrt{|K(P)|} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5} \text{ birim bulunur.}$$



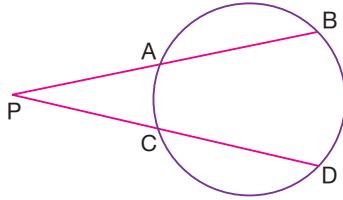
Kuvvet Özellikleri :

1.



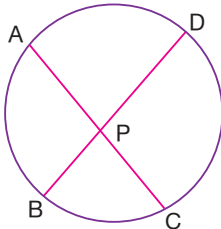
- A, teğet noktası ise $\|\overrightarrow{PA}\|^2 = \|\overrightarrow{PB}\| \cdot \|\overrightarrow{PC}\|$ dir.

2.



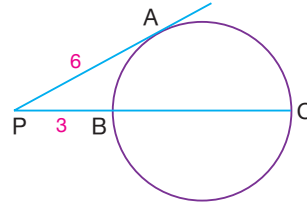
- $\|\overrightarrow{PA}\| \cdot \|\overrightarrow{PB}\| = \|\overrightarrow{PC}\| \cdot \|\overrightarrow{PD}\|$

3.



- $[AC] \cap [BD] = \{P\}$ ise $\|\overrightarrow{PA}\| \cdot \|\overrightarrow{PC}\| = \|\overrightarrow{PB}\| \cdot \|\overrightarrow{PD}\|$ dir.

ÖRNEK - 10



A teğet noktası

$$|PA| = 6 \text{ birim}$$

$$|PB| = 3 \text{ birim}$$

Buna göre, $|BC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Kuvvet bağıntısından,

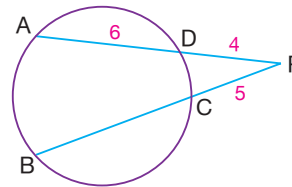
$$|PA|^2 = |PB| \cdot |PC| \text{ eşitliği ile}$$

$$6^2 = 3(3 + |BC|)$$

$$12 = 3 + |BC|$$

$$|BC| = 9 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 11



$$|PD| = 4 \text{ birim}$$

$$|DA| = 6 \text{ birim}$$

$$|PC| = 5 \text{ birim}$$

Buna göre, $|BC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Kuvvet bağıntısından,

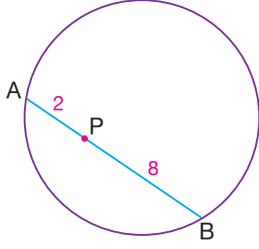
$$|PD| \cdot |PA| = |PC| \cdot |PB| \text{ eşitliği ile}$$

$$4 \cdot 10 = 5(5 + |BC|)$$

$$8 = 5 + |BC|$$

$$|BC| = 3 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 12

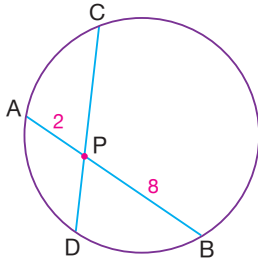


A, P, B doğrusal
 $|AP| = 2$ birim
 $|PB| = 8$ birim

Buna göre, P noktasından geçen en kısa kirişin uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

P noktasından geçen en kısa kiriş $[CD]$ olsun.



Bu durumda kuvvet bağıntısından,

$$|PC| \cdot |PD| = 2 \cdot 8 = 16 \text{ olup}$$

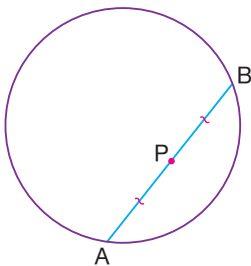
$|PC| + |PD|$ toplamının en küçük değeri istendiğinden,

$$|PC| = |PD| = 4 \text{ birim seçilerek}$$

$$|CD| = 8 \text{ birim bulunur.}$$

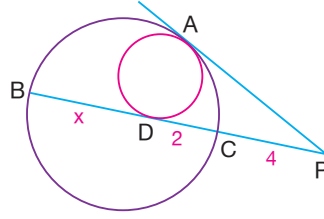
✓ Pratik Bilgi

Bir çemberin iç bölgesindeki bir P noktasından geçen en kısa kiriş P noktasının eşit iki parçaya ayırdığı kiriştir.



A, P, B doğrusal ve $|PA| = |PB|$ ise P noktasından geçen en kısa kiriş $[AB]$ dir.

ÖRNEK - 13



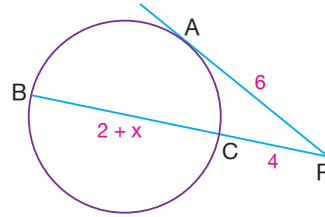
A, D teğet noktası
 $|PC| = 4$ birim
 $|CD| = 2$ birim
 $|BD| = x$

Buna göre, $|BD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

$|PA| = |PD|$ olduğundan, $|PA| = 6$ birim olup

Büyük çemberde,

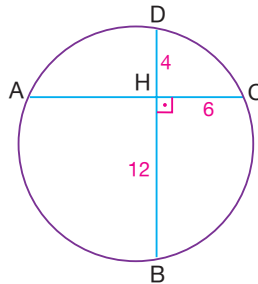


Kuvvet bağıntısından,

$$6^2 = 4(6 + x) \text{ eşitliği ile}$$

$x = 3$ birim bulunur.

ÖRNEK - 14



$[AC] \cap [BD] = \{H\}$
 $[AC] \perp [BD]$
 $|DH| = 4$ birim
 $|HC| = 6$ birim
 $|HB| = 12$ birim

Buna göre, çemberin yarıçap uzunluğunu bulalım.

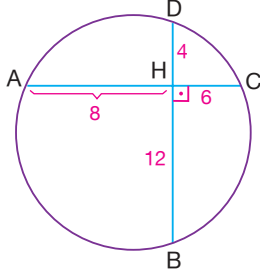
ÇÖZÜM :

Kuvvet bağıntısından,

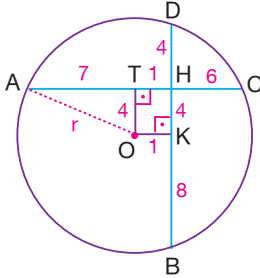
$$|HD| \cdot |HB| = |HA| \cdot |HC| \text{ eşitliği ile}$$

$$4 \cdot 12 = |HA| \cdot 6$$

$$|HA| = 8 \text{ birim olup}$$



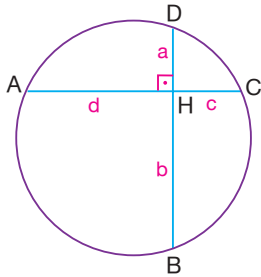
Merkezden [AC] ve [BD] kirislerine inilen dikmeler kirisleri eşit iki parçaya ayıracağından,



AOT dik üçgeninde Pisagor teoremi ile,

$$r^2 = 4^2 + 7^2 \Rightarrow r = \sqrt{65} \text{ birim bulunur.}$$

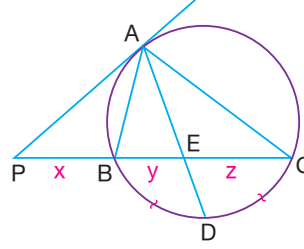
✓ Pratik Bilgi



$[AC] \cap [BD] = \{H\}$ ve R : Çap uzunluğu ise

$$R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 15



ABC üçgen

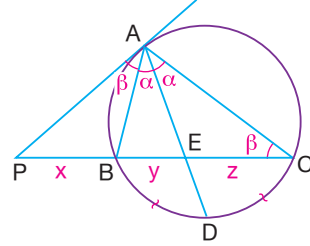
A teğet noktası

$$m(\widehat{BD}) = m(\widehat{DC})$$

Buna göre, x, y, z arasında nasıl bir bağıntı olduğunu bulalım.

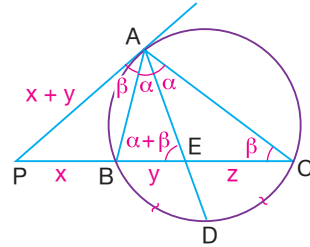
ÇÖZÜM :

Aynı yayı gören çevre açılarının ölçüleri eşit olduğundan,

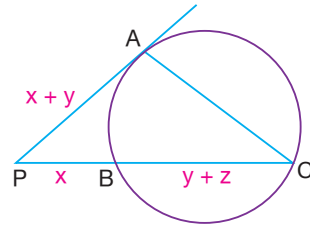


$$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC}) = \alpha \text{ ve } m(\widehat{PAB}) = m(\widehat{ACP}) = \beta$$

$\widehat{AEC}$ nde $m(\widehat{AEP}) = \alpha + \beta$ dir. Böylece,



$$|PA| = |PE| = x + y \text{ olup}$$



Kuvvet bağıntısından,

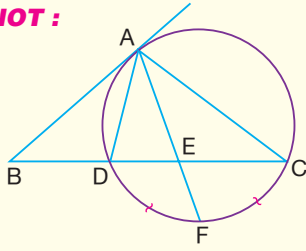
$$(x + y)^2 = x(x + y + z) \text{ eşitliği ile}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + xy + xz$$

$$y^2 = xz - xy \Rightarrow y^2 = x(z - y) \text{ bulunur.}$$

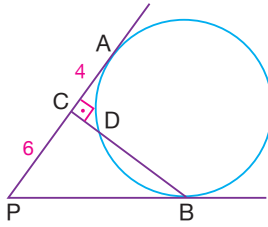


NOT :



A teğet noktası ve $m(\widehat{DF}) = m(\widehat{FC})$ ise
 $|AB| = |BE|$ dir.

ÖRNEK - 16

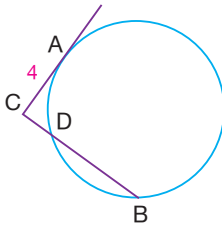


$[BC] \perp [PA]$
 $|PC| = 6$ birim
 $|CA| = 4$ birim

Buna göre, $|CD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$|PA| = |PB| = 10$ birim olup
 $\triangle PBC$ nde Pisagor teoremi ile,
 $|BC| = 8$ birim bulunur.



Kuvvet bağıntısından,

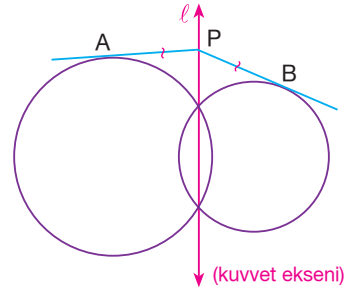
$|CA|^2 = |CD| \cdot |CB|$ eşitliği ile
 $4^2 = |CD| \cdot 8 \Rightarrow |CD| = 2$ birim bulunur.

Kuvvet Eksenini

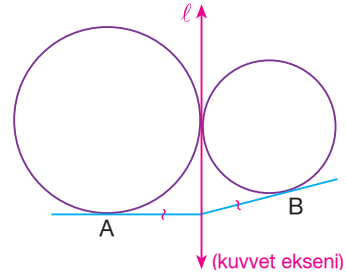
Tanım : İki çembere göre aynı kuvvette olan noktaların oluşturduğu doğruya **kuvvet eksenini** denir.

(İki çemberin kuvvet eksenini öyle bir doğrudurki üzerinde alınan herhangi bir noktadan çemberlere çizilen teğet uzunlukları eşittir.)

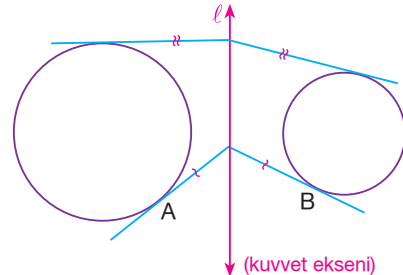
a) Kesişen iki çemberin kuvvet eksenini



b) Dıştan teğet iki çemberin kuvvet eksenini

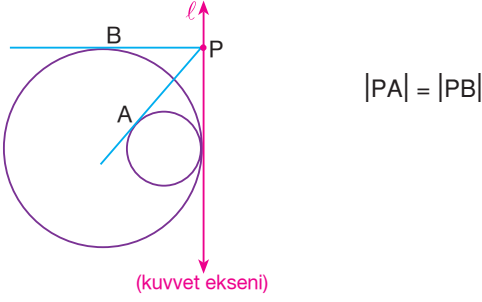


c) Ayırık iki çemberin kuvvet eksenini

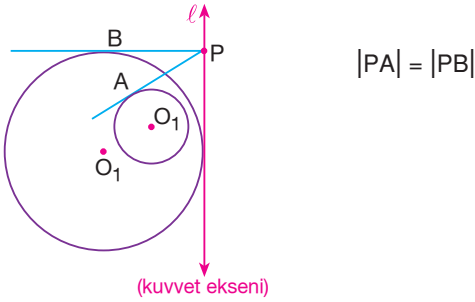


NOT : Kuvvet eksenini merkezleri birleştiren doğruya diktir.

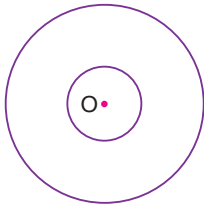
d) İçten teğet iki çemberin kuvvet eksenini



e) İç içe merkezleri farklı iki çemberin kuvvet eksenini



f) Merkezi ortak olan farklı iki çemberin kuvvet eksenini



Kuvvet eksenini yoktur.



NOT :

İki çemberin kuvvet eksenini olmayabilir.

ÖRNEK - 1

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y - 5 = 0$$

$$x^2 + y^2 + x - y - 1 = 0$$

çemberlerinin kuvvet eksenini denklemini bulalım.

ÇÖZÜM

Kuvvet eksenini bir doğru olduğundan x^2 ve y^2 li terimleri yok edelim.

$$-1/ \quad x^2 + y^2 - 2x + 3y - 5 = 0$$

$$+ \quad x^2 + y^2 + x - y - 1 = 0$$

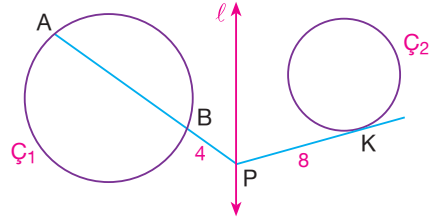
$$3x - 4y + 4 = 0$$

denklemini kuvvet eksenini denklemdir.

Yani, $3x - 4y + 4 = 0$ doğrusu üzerinde alınan herhangi bir noktadan çemberlere çizilen teğet uzunlukları eşittir.

ÖRNEK - 2

ℓ doğrusu ζ_1 ve ζ_2 çemberlerinin kuvvet eksenini.

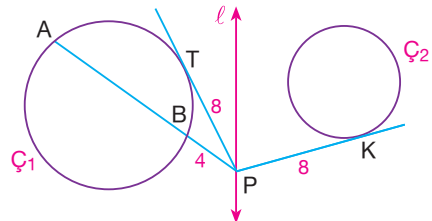


K teğet noktası, $|PK| = 8$ birim ve $|PB| = 4$ birim dir.

Buna göre, $|AB|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

P noktasından ζ_1 ve ζ_2 çemberlerine çizilen teğet uzunlukları eşittir. O halde,



$|PT| = 8$ birim olup ζ_1 çemberinde kuvvet bağıntısından $|PT|^2 = |PB| \cdot |PA|$ eşitliği ile,

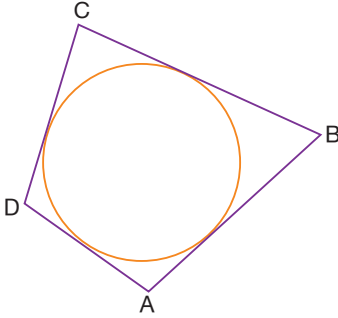
$$8^2 = 4 \cdot |PA| \Rightarrow |PA| = 16 \text{ birim olup}$$

$$|AB| = 16 - 4 = 12 \text{ birim bulunur.}$$



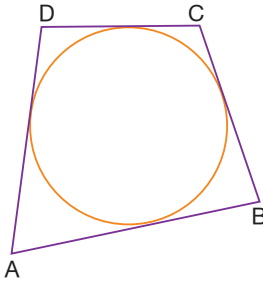
Teğetler Dörtgeni

Kenarları bir çembere teğet olan bir dörtgene **teğetler dörtgeni** denir.



ABCD teğetler dörtgeni

- Bir teğetler dörtgeninde karşılıklı kenarların uzunlukları toplamı eşittir.



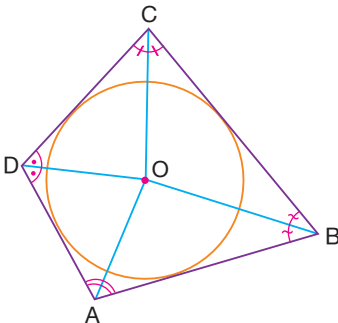
ABCD teğetler dörtgeni ise
 $|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$ dir.



NOT :

Kare, eşkenar dörtgen ve deltoid birer teğetler dörtgenidir.

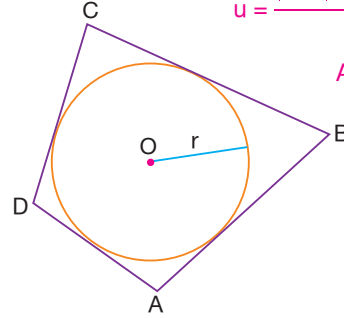
- Bir teğetler dörtgeninde iç açıortayların kesim noktası iç teğet çemberin merkezini belirler.



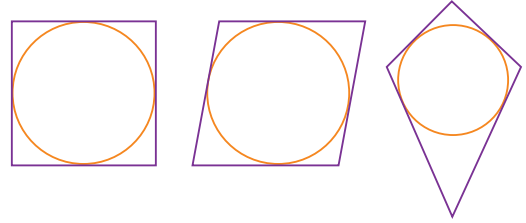
- Bir teğetler dörtgeninin alanı, çevre uzunluğu ile iç teğet çemberinin yarıçap uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir.

$$u = \frac{|AB| + |BC| + |CD| + |DA|}{2}$$

$$A(ABCD) = u \cdot r \text{ dir.}$$

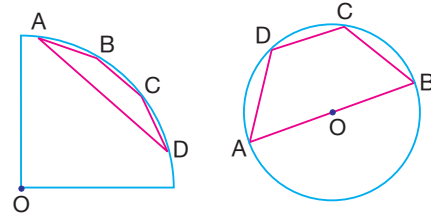
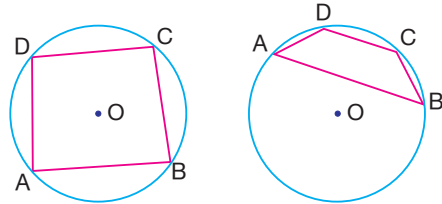


- Kare, eşkenar dörtgen ve deltoid birer teğetler dörtgenidir.



Kirişler Dörtgeni

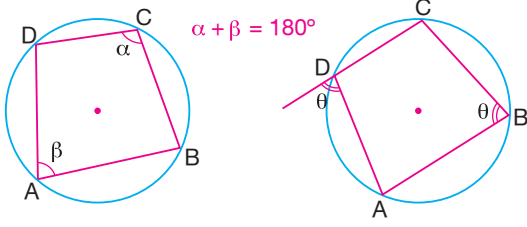
Köşe noktaları bir çember üzerinde bulunan dörtgene **kirişler dörtgeni** denir.



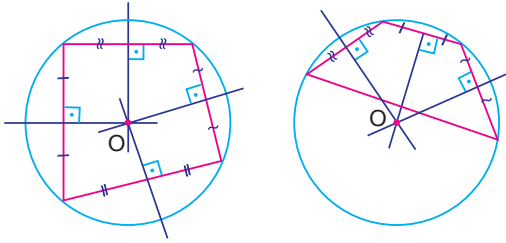
NOT :

Kare, dikdörtgen, ikizkenar yamuk birer girişler dörtgenidir.

- Kirişler dörtgeninde karşılıklı açların ölçüleri toplamı 180° dir. Ayrıca bir iç açının ölçüsü karşısındaki köşenin dış açısının ölçüsüne eşittir.



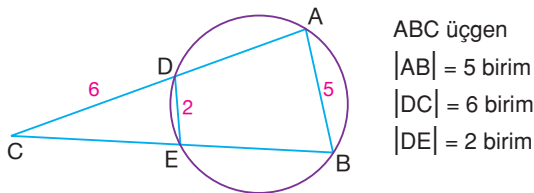
- Kirişler dörtgeninde kenar orta dikmeler merkezde kesişir.



SONUÇ :

Kenar orta dikmeleri bir noktada kesişen çokgen kirişler çokgenidir.

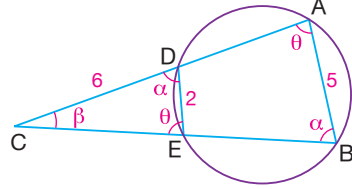
ÖRNEK - 1



Buna göre, $|BC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

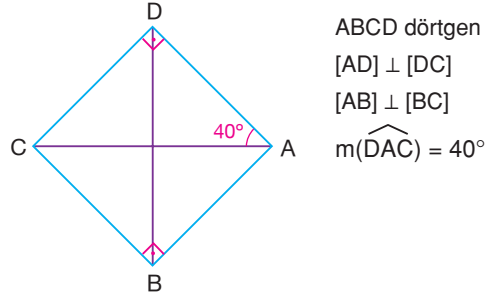
ABED kirişler dörtgeni olduğundan,
 $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ dersek,
 $m(\widehat{EDC}) = \alpha$ olur.



O halde, $\widehat{ABC} \sim \widehat{EDC}$ olup benzerlik yazılırsa,

$$\frac{5}{2} = \frac{|BC|}{6} \Rightarrow |BC| = 15 \text{ birim bulunur.}$$

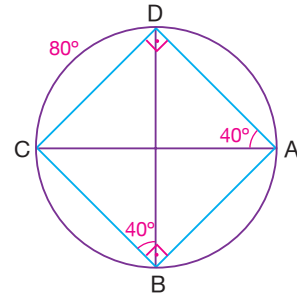
ÖRNEK - 2



Buna göre, ABD açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :

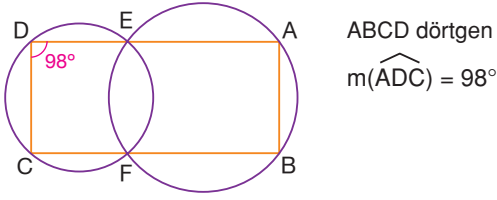
$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ADC}) = 180^\circ$ olduğundan,
 ABCD kirişler dörtgenidir. O halde,



Aynı yayı gören çevre açılarının ölçüleri eşit olduğundan,

$m(\widehat{DBC}) = 40^\circ$ olup $m(\widehat{ABD}) = 50^\circ$ bulunur.

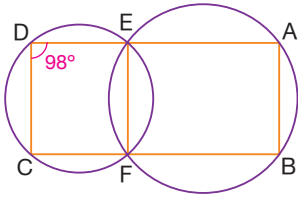
ÖRNEK - 3



Buna göre, BAD açısının ölçüsünü bulalım.

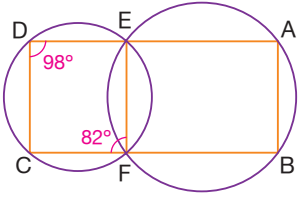
ÇÖZÜM :

E ve F noktaları birleştirilirse,



ABFE ve EFCD dörtgenlerinin kirişler dörtgeni olduğu görülür.

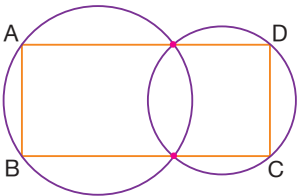
Kirişler dörtgeninde karşılıklı açılar toplamı 180° olduğundan,



$$m(\widehat{EFC}) = 180^\circ - 98^\circ = 82^\circ \text{ dolayısıyla,}$$

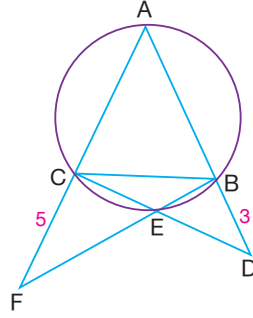
$$m(\widehat{BFE}) = 82^\circ \text{ ve } m(\widehat{BAD}) = 82^\circ \text{ bulunur.}$$

✓ Pratik Bilgi



$[AB] \parallel [DC]$ dir.

ÖRNEK - 4

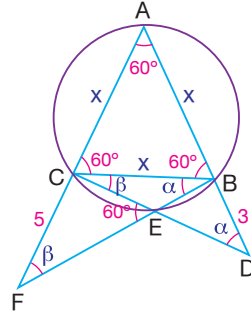


ABC eşkenar üçgen
 A, B, D doğrusal
 A, C, F doğrusal
 $|BD| = 3$ birim
 $|CF| = 5$ birim

Buna göre, $|BC|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

ABEC kirişler dörtgeni olup $m(\widehat{BEC}) = 120^\circ$ dir.



$$m(\widehat{ADC}) = \alpha \text{ ve } m(\widehat{BCD}) = \beta \text{ dersek,}$$

$$\widehat{BCD} \text{ nde } \alpha + \beta = 60^\circ$$

$$\widehat{CEF} \text{ nde } 60^\circ + \beta = 60^\circ + m(\widehat{AFE}) \text{ olup}$$

$$m(\widehat{AFE}) = \beta \text{ dir.}$$

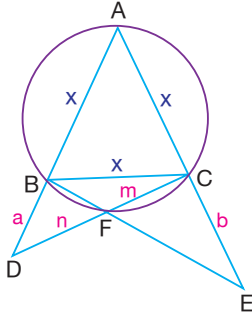
$$\text{O halde } m(\widehat{CBF}) = \alpha \text{ olmalıdır.}$$

$$\text{Böylece } \widehat{CBD} \sim \widehat{FCB} \text{ olup}$$

Benzerlik yazılırsa,

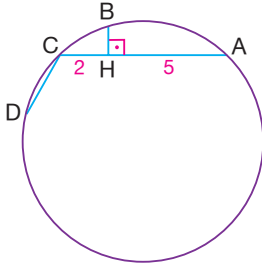
$$\frac{x}{5} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \sqrt{15} \text{ birim bulunur.}$$

✓ Pratik Bilgi



ABC eşkenar üçgen, A, B, D doğrusal
A, C, E doğrusal $\Rightarrow x^2 = a \cdot b = m \cdot (m+n)$ dir.

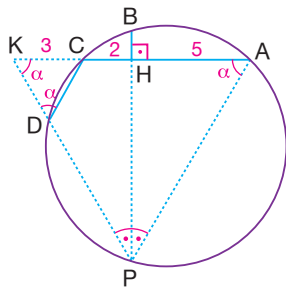
ÖRNEK - 5



Şekildeki A, B, C, D
çemberseldir.
[BH] $\perp$ [AC]
 $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BD})$
|AH| = 5 birim
|HC| = 2 birim

Buna göre, |DC| uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



Verilen yay eşitliğinden [PB] nin açıortay olduğu anlaşılır.

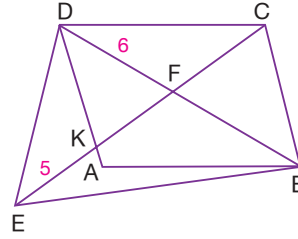
Böylece PAK bir ikizkenar üçgen olur.

PACD bir kirişler dörtgeni olduğu için,

$m(\widehat{PAK}) = m(\widehat{KDC})$ dir.

|DC| uzunluğu 3 birim bulunur.

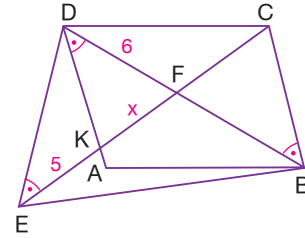
ÖRNEK - 6



ABCD paralelkenar
EBFD kirişler
dörtgeni
E, K, F, C doğrusal
|EK| = 5birim
|DF| = 6 birim

Buna göre, |KF| uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM



EBFD kirişler dörtgeni olduğundan,

$m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DEC})$ olur.

ABCD paralelkenar olduğundan

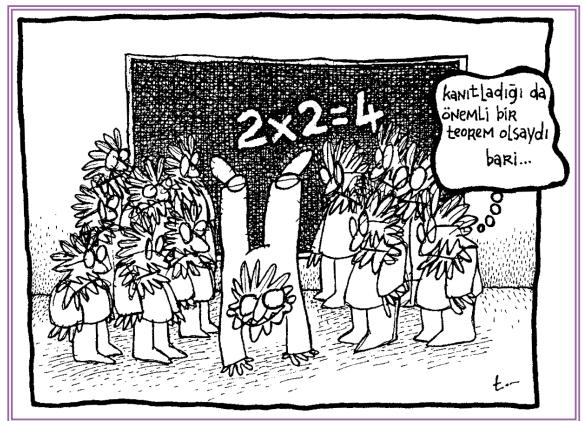
$m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{ADB})$ olur.

$\widehat{DFK} \sim \widehat{EFD}$ olup

Benzerlik yazılırsa,

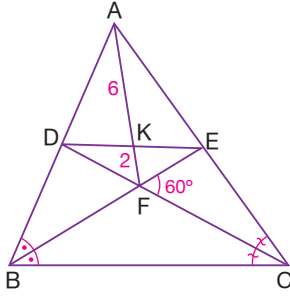
$6^2 = x(x + 5)$ denklemi elde edilir.

Buradan $x = 4$ birim bulunur.



(Matematik Dünyası Dergisi-www.matematikdunyasi.org)

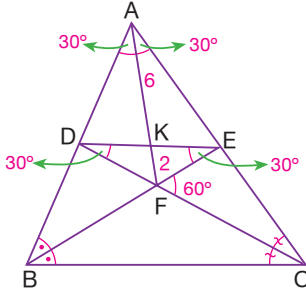
ÖRNEK - 7



ABC üçgen
[CD] açıortay
[BE] açıortay
 $|KF| = 2$ birim
 $|AK| = 4$ birim
 $m(\widehat{EFC}) = 60^\circ$

Buna göre, DEF üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EFC}) = 60^\circ$ olduğundan,

ADFE bir kirişler dörtgenidir.

$m(\widehat{EDF}) = m(\widehat{DEB}) = 30^\circ$ olup

$\widehat{AFE} \sim \widehat{DFK}$ benzerliğinden,

$$\frac{8}{|EF|} = \frac{|EF|}{2} \Rightarrow |EF| = 4 \text{ birim ve}$$

$\widehat{ADF} \sim \widehat{RKF}$ benzerliğinden,

$$\frac{8}{|DF|} = \frac{|DF|}{2} \Rightarrow |DF| = 4 \text{ birim olur.}$$

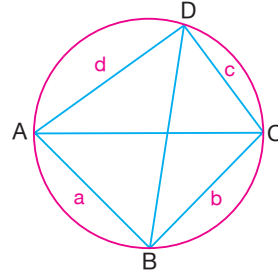
Böylece,

$$|DF| = |FE| = 4 \text{ birim olur.}$$

$$A(\widehat{DEF}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

Batlamyüs (Ptolemy) Teoremi

Bir kirişler dörtgeninde köşegen uzunluklarının çarpımı dörtgenin karşılıklı kenar uzunluklarının çarpımının toplamına eşittir.



ABCD kirişler dörtgeni
[AC] köşegen
[BD] köşegen
 $|AC| = e$
 $|BD| = f$
ise

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d \text{ yazılabilir.}$$

İspat :

$m(\widehat{ABC}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ADC}) = \beta$ olsun.

$\alpha + \beta = 180^\circ$ olduğundan $\cos \alpha = -\cos \beta$ olup
 $\cos \alpha + \cos \beta = 0$ yazılabilir.

O halde, ABC ve ADC üçgenlerinde cos teoremi ile

$$\frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab} + \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2cd} = 0 \text{ eşitliğinden,}$$

$$e^2 = \frac{(ac + bd) \cdot (ad + bc)}{ab + cd} \text{ elde edilir.}$$

Aynı şekilde, $m(\widehat{BAD}) = \theta$ ve $m(\widehat{DCB}) = \gamma$ olsun.

$\theta + \gamma = 180^\circ$ olduğundan $\cos \theta = -\cos \gamma$ olup
 $\cos \theta + \cos \gamma = 0$ yazılabilir.

O halde, BAD ve BCD üçgenlerinde cos teoreminden,

$$\frac{a^2 + d^2 - f^2}{2ad} + \frac{c^2 + b^2 - f^2}{2bc} = 0 \text{ eşitliğinden,}$$

$$f^2 = \frac{(ab + cd) \cdot (ac + bd)}{ad + bc} \text{ elde edilir.}$$

e^2 ve f^2 li denklemler taraf tarafa çarpılırsa,

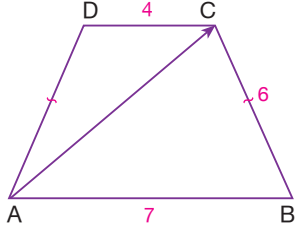
$$e^2 \cdot f^2 = (ac + bd)^2 \text{ olup}$$

$$e \cdot f = ac + bd \text{ elde edilir.}$$

"Sentetik ispatıda benzerlik kullanarak siz yapmaya çalışınız."

Batlamyüs teoreminin bazı uygulamaları :

ÖRNEK - 1



ABCD ikizkenar yamuk
 $|AB| = 7$ birim
 $|BC| = 6$ birim
 $|DC| = 4$ birim

Buna göre, $\overline{AC}$ nün uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

ikizkenar yamuk bir kirişler dörtgeni olduğundan, Batlamyüs teoremi uygulanabilir.

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BD}\| = e \text{ diyelim.}$$

O halde,

$$e \cdot e = 6 \cdot 6 + 7 \cdot 4$$

$$e^2 = 36 + 28$$

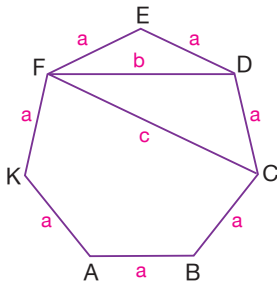
$$e = \sqrt{64} = 8 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

Bir düzgün yedigende bir kenar uzunluğu a , en kısa köşegen uzunluğu b , en uzun köşegen uzunluğu c olsun.

Buna göre, a, b, c arasındaki ilişkiyi bulalım.

ÇÖZÜM



$[FD]$ ve $[FC]$ köşegenleri çizilirse,

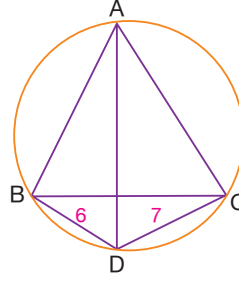
FCDE dörtgeni bir ikizkenar yamuk olur.

İkizkenar yamuk bir kirişler dörtgeni olduğundan,

Batlamyüs teoremi ile,

$$b^2 = a^2 + ac \text{ yazılabilir.}$$

ÖRNEK - 3



ABC eşkenar üçgen
 $|BD| = 6$ birim
 $|DC| = 7$ birim

Buna göre, $|AD|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

ABDC kirişler dörtgeni olduğundan,

Batlamyüs teoreminden,

$$|AD| \cdot |BC| = 6 \cdot |AC| + 7 \cdot |AB|$$

$$|AB| = |AC| = |BC| = a \text{ diyelim.}$$

Böylece,

$$|AD| \cdot a = 6 \cdot a + 7 \cdot a$$

$$|AD| = 13 \text{ birim bulunur.}$$

ARAŞTIRMA



Batlamyüs (Ptolemy) teoreminin başka hangi çokgenlerde uygulanabileceğini araştırınız?

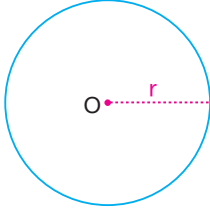


Batlamyüs

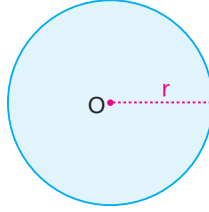
Çemberin Çevre Uzunluğu ve Dairenin Alan Bağlantıları

Bütün çemberlerde $\frac{\text{çevre}}{\text{çap}}$ oranı sabit bir sayı olup bu sayı yaklaşık olarak 3,14 . . . olup π (pi) ile gösterilmiştir.

- π sayısı hiçbir zaman iki tam sayının bölümü olarak yazılamayan yani irasyonel (rasyonel olmayan, aşkın) bir sayıdır.

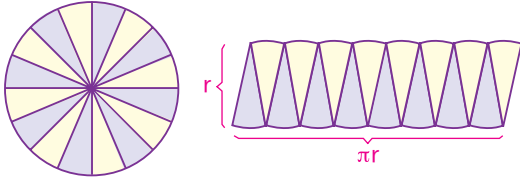


$$\frac{\text{çevre}}{\text{çap}} = \frac{C}{2r} = \pi \text{ ise}$$



$$\text{Alan} = \pi \cdot r^2$$

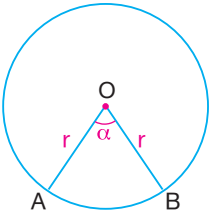
- Dairenin alanına aşağıdaki gibi düşünme yöntemi ile ulaşabiliriz.



ABCD paralelkenarsal bölgesinin alanı,

$$A(ABCD) = \pi \cdot r \cdot r = \pi r^2$$

★ Yay Uzunluğu



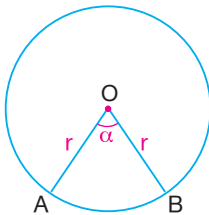
Oran orantı ile

$$360^\circ \rightarrow 2\pi r$$

$$\alpha^\circ \rightarrow |\widehat{AB}|$$

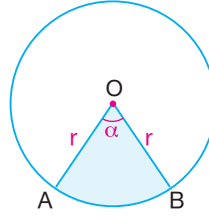
$$|\widehat{AB}| = \frac{2\pi r \alpha}{360^\circ}$$

- **1 radyan** : Yarıçap uzunluğunda yayı gören merkez açının ölçüsüne **1 radyan** denir.



$$|\widehat{AB}| = r \Rightarrow \alpha = 1 \text{ radyan dır.}$$

★ Daire Dilimi

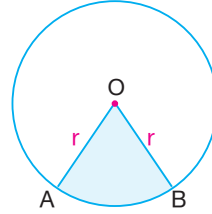


$$360^\circ \rightarrow \pi r^2$$

$$\alpha^\circ \rightarrow \text{Taralı alan}$$

$$\text{Taralı alan} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$$

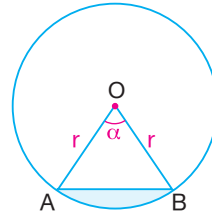
★ Daire Dilimi



$$\text{Taralı alan} = \frac{r \cdot |\widehat{AB}|}{2} \quad (\text{üçgenin alanı gibi})$$



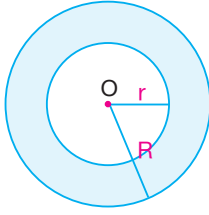
★ Daire Kesmesi



$$\text{Taralı alan} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \alpha$$

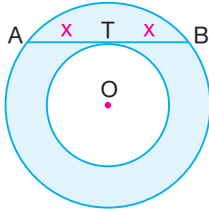


★ Daire Halkası

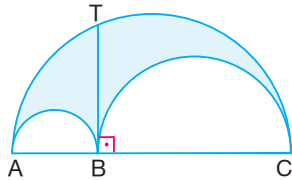


$$\text{Taralı alan} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

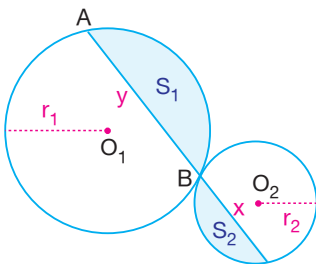
★ Daire Halkası



$$\text{Taralı alan} = \pi x^2$$

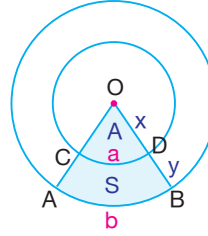


$$[AB], [BC], [AC] \text{ çap, Taralı alan} = \pi \cdot \frac{|TB|^2}{4}$$



B teğet noktası

$$\frac{y}{x} = \frac{r_1}{r_2} \text{ ve } \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \text{ yazılabilir.}$$



O merkez

$$|AB| = b$$

$$|CD| = a$$

$$|OD| = x$$

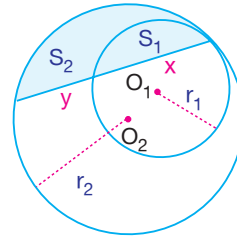
$$|DB| = y$$

$$\frac{x}{x+y} = \frac{a}{b} \text{ (yaylı Tales)}$$

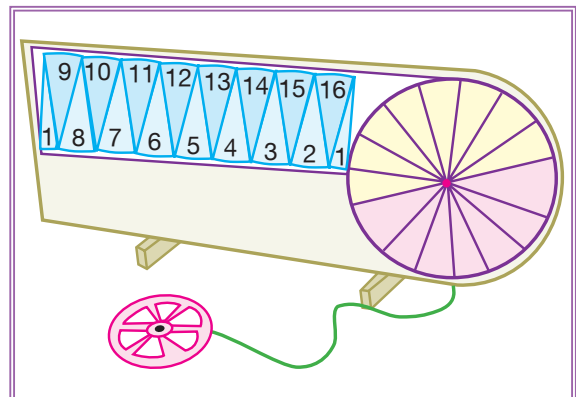
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot y \text{ (yaylı yamuk)}$$

$$A = \frac{x \cdot a}{2}$$

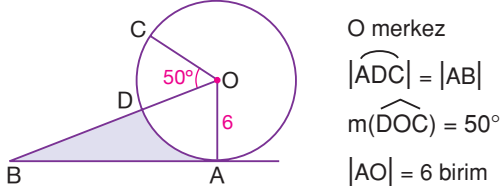
$$\frac{A}{A+S} = \left(\frac{x}{x+y}\right)^2$$



$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{x}{x+y} \text{ ve } \frac{S_1}{S_1+S_2} = \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 \text{ yazılabilir.}$$



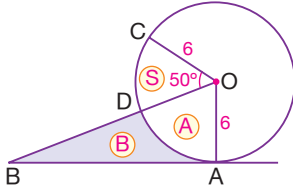
ÖRNEK - 1



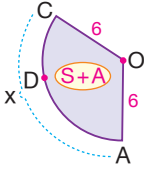
Buna göre, taralı bölgenin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

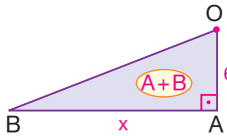
Bazı bölgelerin alanlarını isimlendirelim.



$|\widehat{ADC}| = |AB| = x$ diyelim.



O halde,
 $S + A = \frac{6 \cdot x}{2} = 3x$

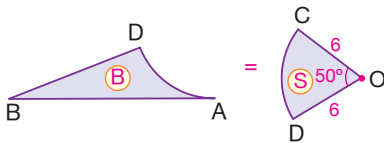


$A + B = \frac{6 \cdot x}{2} = 3x$ olup

Bu durumda,

$A + B = S + A$ eşitliğinden, $S = B$ olur.

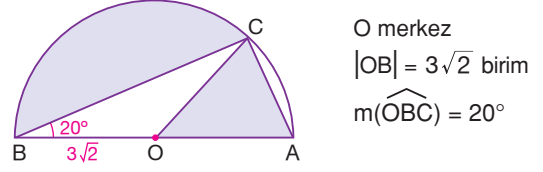
Böylece,



olduğu görülür. Bu durumda,

Taralı alan = $\frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 50^\circ}{360^\circ} = 5\pi \text{ br}^2$ bulunur.

ÖRNEK - 2

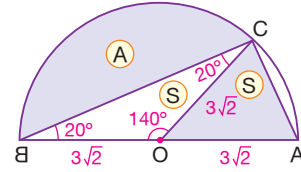


O merkezli yarımdairede taralı bölgelerin alanları toplamını bulalım.

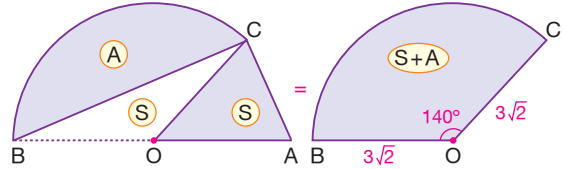
ÇÖZÜM :

Yarıçap eşitliğinden, $|AO| = |OB|$,

CAO ve COB üçgenlerinin yükseklikleri eşit olduğundan, $A(\widehat{CAO}) = A(\widehat{COB})$ dir.



Böylece,

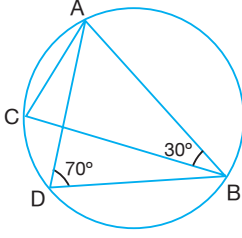


Taralı alanlar toplamı,

COB diliminin alanına eşit olup

$S + A = \frac{\pi \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot 140^\circ}{360^\circ} = 7\pi \text{ br}^2$ bulunur.

1.



ABC üçgen
ADB üçgen
Şekilde A, B, C, D
çemberseldir.
 $m(\widehat{ADB}) = 70^\circ$
 $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$

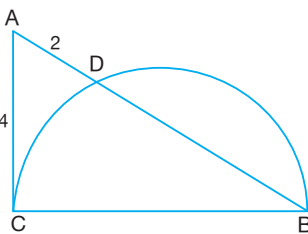
Buna göre, BAC açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 85 B) 80 C) 75 D) 70 E) 60

2. Merkezinin koordinatları $M(3, -5)$ olmak üzere $\|\vec{MX}\| = 4$ çemberinin denklemi nedir?

- A) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$
B) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 15$
C) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 14$
D) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 13$
E) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 12$

3.

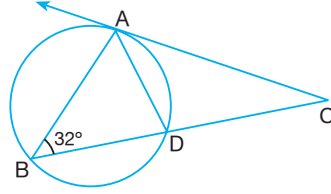


C, teğet noktası
[BC] çap
|AC| = 4 birim
|AD| = 2 birim

Buna göre, çemberin yarıçapı kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $5\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

4.



ABC üçgen
[CA] teğet
 $m(\widehat{ABC}) = 32^\circ$

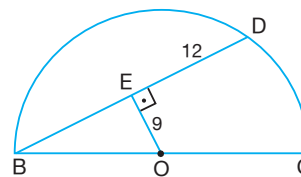
Buna göre, BAC açısının ölçüsü tamsayı olarak en az kaç derecedir?

- A) 36 B) 35 C) 34 D) 33 E) 32

5. Merkezinin koordinatları $M(4, 5)$ ve x eksenine teğet olan çemberin denklemi nedir?

- A) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$
B) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 16$
C) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$
D) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 30$
E) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 34$

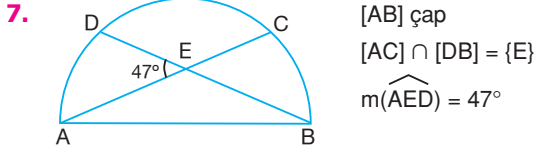
6.



[BC] çap
O, merkez
[OE] $\perp$ [BD]
 $\|\vec{ED}\| = 12$ birim
|OE| = 9 birim

Yukarıdaki verilere göre, |OC| kaç birimdir?

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15



Buna göre, $m(\widehat{DC})$ kaç derecedir?

- A) 80 B) 82 C) 84 D) 86 E) 88

8. Denklemi $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 33$ olan çember ile denklemi $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 27$ olan çemberin merkezleri arası uzaklık kaç birimdir?

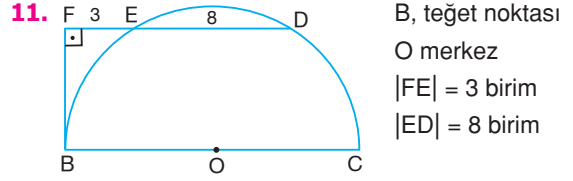
- A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{5}$ D) 9 E) 10

9. P(4, 6) noktasına 3 birim uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerinin denklemi nedir?

- A) $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 6$
B) $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 8$
C) $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 9$
D) $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 16$
E) $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 20$

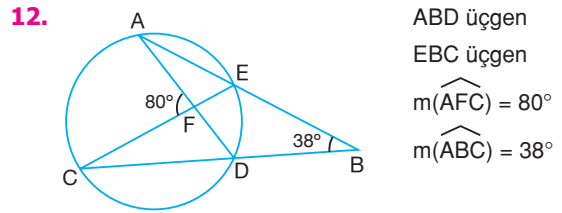
10. $x^2 + y^2 - 12x + 8y - 21 = 0$ denklemi ile verilen çemberin merkezinin koordinatları nedir?

- A) (4, 3) B) (-4, 3) C) (-4, -3)
D) (6, -4) E) (3, -4)



Yukarıdaki verilere göre, |BC| kaç birimdir?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14



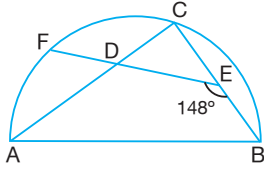
Buna göre, BAD açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 26 B) 21 C) 20 D) 15 E) 10

13. Merkezinin koordinatları M(2, 3) olan çember $3x + 4y + 2 = 0$ doğrusuna teğet olduğuna göre, denklemi nedir?

- A) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 27$
B) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 37$
C) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 39$
D) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 41$
E) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

1.



[AB] çap
[AC] ∩ [EF] = {D}
 $m(\widehat{FEB}) = 148^\circ$

Buna göre, ADF açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 50 B) 52 C) 54 D) 56 E) 58

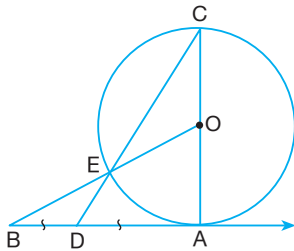
2. Merkezi $M(-2, 12)$ olan x eksenini $K(3, 0)$ noktasında kesen çemberin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{3}$ E) 13

3. $x^2 - 6y + y^2 = 7$ denklemi ile verilen çemberin yarıçapının uzunluğu kaç birimdir?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

4.

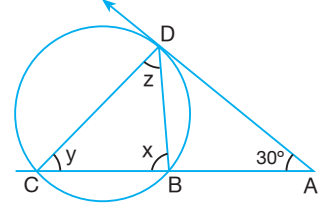


O merkez
A teğet noktası
[OB] ∩ [CD] = {E}
|AD| = |DB|
|CD| = 18 birim

Yukarıdaki verilere göre, |ED| kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5. Şekilde DAB açısının ölçüsü 30° , BCD üçgeninin iç açıları x, y ve z dir.



Buna göre, aşağıdaki sonuçlardan hangisi çıkarılamaz?

- A) $x > z$ B) $2x + z > 180^\circ$ C) $x > y$
D) $x > 30^\circ$ E) $y + z < 150^\circ$

6. I. Bölgede eksenlere teğet olan $\vec{MX} = 4$ çemberinin denklemi nedir?

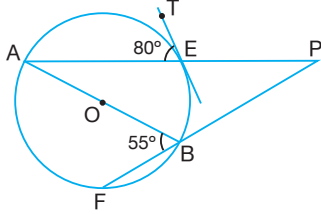
- A) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$
B) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 12$
C) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 8$
D) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$
E) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 2$

7. $A(-2, 3)$ ve $B(-10, 9)$ noktaları veriliyor.

$\vec{AB}$ nı çap kabul eden çemberin denklemi nedir?

- A) $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$
B) $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 25$
C) $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$
D) $(x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$
E) $(x + 6)^2 + (y - 6)^2 = 25$

8. O çemberin merkezidir. P noktasından geçen iki doğru çemberi E, A ve F, B noktalarında kesiyor. TEA açısının ölçüsü 80° , ABF açısının ölçüsü 55° dir.



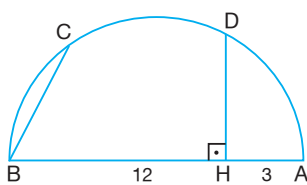
Buna göre, APF açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 45 B) 42 C) 41 D) 40 E) 37

9. Merkezi $y - x - 1 = 0$ doğrusu üzerinde olup $A(-1, 2)$ ve $B(1, 1)$ noktalarından geçen çemberin denklemi nedir?

- A) $x^2 + y^2 + x - y + 2 = 0$
B) $x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$
C) $x^2 + y^2 + x - y - 2 = 0$
D) $x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$
E) $x^2 + y^2 - x - y - 1 = 0$

10.



$m(\widehat{AC}) = m(\widehat{BD})$
[AB] çap
[DH] $\perp$ [AB]
|BH| = 12 birim
|AH| = 3 birim

Yukarıdaki verilere göre, |BC| kaç birimdir?

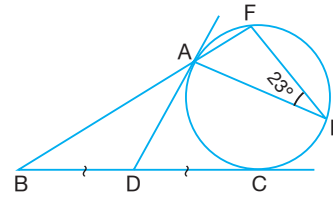
- A) $2\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $4\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{7}$ E) $6\sqrt{7}$

11. $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 17$
 $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 25$

çemberlerinin merkezlerinden geçen doğru-
nun denklemi nedir?

- A) $y + 3x - 1 = 0$ B) $y - 3x - 2 = 0$
C) $y + 3x - 5 = 0$ D) $y - 3x + 1 = 0$
E) $y + 3x + 2 = 0$

12.



B, D, C doğrusal
B, A, F doğrusal
|BD| = |DC|
 $m(\widehat{AEF}) = 23^\circ$
A, C teğet
noktaları

Buna göre, $m(\widehat{ADC})$ kaç derecedir?

- A) 25 B) 40 C) 46 D) 52 E) 60

13.

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0$$

çemberi $A(0,5)$ ve $B(7,0)$ noktalarından geçtiğine göre, merkezinin koordinatları toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

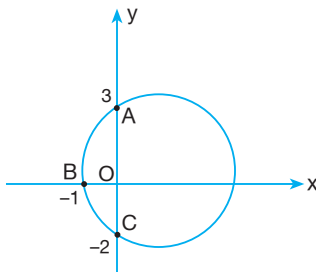
14.

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

çemberi ile $A(1, -6)$ noktası arasındaki en kısa
uzaklık kaç birimdir?

- A) $\sqrt{89} - 3$ B) $\sqrt{89} - 4$ C) $\sqrt{89} - 5$
D) $\sqrt{89} - 6$ E) $\sqrt{89} - 7$

1.

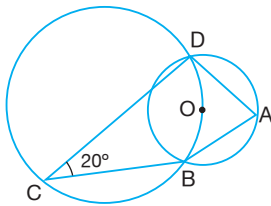


A(0, 3)
B(−1, 0)
C(0, −2)

Yukarıdaki A, B, C noktalarından geçen çemberin denklemi nedir?

- A) $x^2 + y^2 - 5x - y - 6 = 0$
 B) $x^2 + y^2 - 5x - y - 4 = 0$
 C) $x^2 + y^2 - 5x - y - 3 = 0$
 D) $x^2 + y^2 - 5x - y - 2 = 0$
 E) $x^2 + y^2 - 5x - y - 1 = 0$

2.

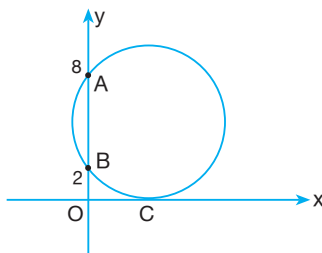


ABCD dörtgen
O merkez
 $\widehat{m(\text{BCD})} = 20^\circ$

Buna göre, BAD açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 60 B) 65 C) 70 D) 75 E) 80

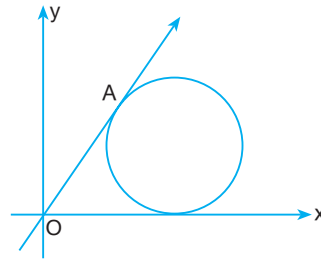
3.


$$\begin{matrix} A(0, 2) \\ B(0, 8) \end{matrix}$$

Ox eksenine C noktasında teğet olan çemberin yarıçapı kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

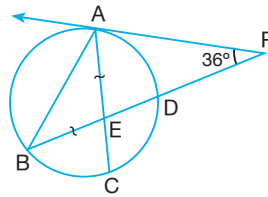
4.


$$A(2\sqrt{3}, 6)$$

Şekildeki Ox ve OA doğrularına teğet olan çemberin vektörel denklemi nedir?

- A) $M(2\sqrt{3}, 3), \|\vec{MX}\| = 4$
 B) $M(4\sqrt{3}, 4), \|\vec{MX}\| = 4$
 C) $M(4\sqrt{3}, 1), \|\vec{MX}\| = \sqrt{21}$
 D) $M(4\sqrt{3}, 1), \|\vec{MX}\| = 2\sqrt{5}$
 E) $M(2\sqrt{3}, 4), \|\vec{MX}\| = \sqrt{21}$

5.

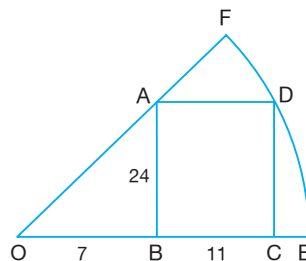


ABP üçgen
A, B, C, D çembersel
A teğet noktası
 $|AE| = |EB|$
 $m(\widehat{BC}) = m(\widehat{CD})$
 $m(\widehat{APB}) = 36^\circ$

Buna göre, BAC açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 30 B) 32 C) 33 D) 34 E) 36

6.

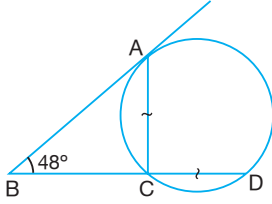


O merkez
ABCD dikdörtgen
 $|AB| = 24$ birim
 $|OB| = 7$ birim
 $|BC| = 11$ birim

Yukarıdaki verilere göre, $|AF|$ kaç birimdir?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

7.

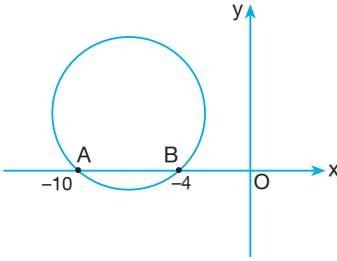


Şekildeki çemberde
A teğet noktası
 $|AC| = |CD|$
 $m(\widehat{ABD}) = 48^\circ$

Buna göre, $\angle ACD$ açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 64 B) 70 C) 75 D) 80 E) 92

8.

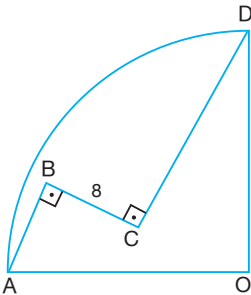


$A(-10, 0)$
 $B(-4, 0)$

Şekilde x eksenini A ve B noktalarında kesen çemberin yarıçapı 5 birim olduğuna göre, denklemini nedir?

- A) $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$
B) $(x + 7)^2 + (y - 4)^2 = 25$
C) $(x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 25$
D) $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 25$
E) $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$

9.



O merkezli
çeyrek çember
 $[DC] \perp [CB]$
 $[CB] \perp [BA]$
 $|CB| = 8$ birim
 $|DC| + |BA| = 16$ br

Yukarıdaki verilere göre, $|OA|$ kaç birimdir?

- A) 9 B) $6\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{6}$ D) $4\sqrt{10}$ E) $8\sqrt{3}$

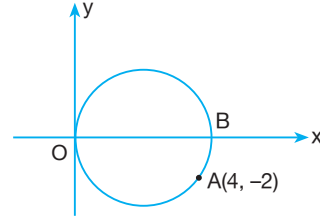
10. Denklemleri,

$$2y + 3x + 18 = 0 \text{ ve } 2x - 3y - 12 = 0$$

olan doğrular ile Ox ekseninin oluşturduğu üçgenin çevrel çemberinin merkezinin koordinatları nedir?

- A) (0, 0) B) (1, 0) C) (2, 0)
D) (3, 0) E) (4, 0)

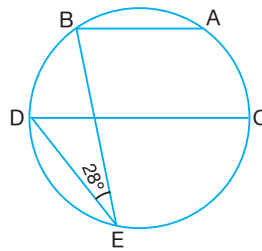
11.



Şekildeki $[OB]$ çaplı çemberde $A(4, -2)$ noktası çember yayının üzerinde olduğuna göre çemberin denklemi nedir?

- A) $x^2 + y^2 - 6x = 0$ B) $x^2 + y^2 - 5x = 0$
C) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ D) $x^2 + y^2 - 3x = 0$
E) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

12.

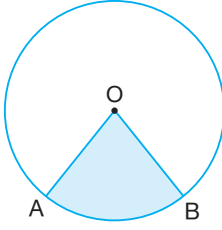


$[DC]$ çap
 $[AB] \parallel [CD]$
 $m(\widehat{BED}) = 28^\circ$

Buna göre, $m(\widehat{AB})$ kaç derecedir?

- A) 84 B) 72 C) 68 D) 65 E) 60

1.

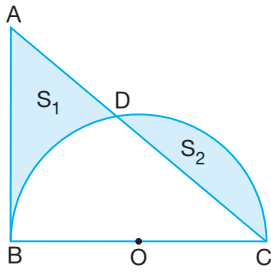


O merkez
 $|OB| = 5$ birim
 $|\widehat{AB}| = 6$ birim

Buna göre, taralı alan kaç br^2 dir?

- A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

2.

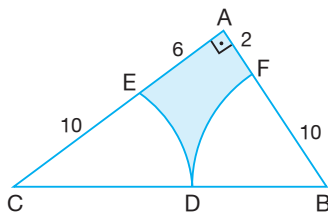


O merkez
 B teğet noktası
 S_1 ve S_2 içinde bu-
 lundukları bölgelerin
 alanları
 $S_1 = S_2$
 $|BC| = 8$ birim

Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\frac{3\pi}{2}$ B) 2π C) $\frac{5\pi}{2}$ D) 3π E) $\frac{7\pi}{2}$

3.

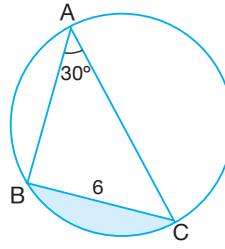


B ve C teğet
 merkez
 D teğet noktası

Buna göre, taralı alan kaç br^2 dir?

- A) $48 - 10\pi$ B) $96 - 3\pi$ C) $96 - 25\pi$
 D) $96 - 15\pi$ E) $96 - 10\pi$

4.

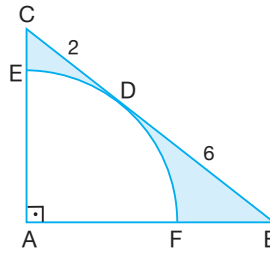


ABC bir üçgen
 $|BC| = 6$ birim
 $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$

Buna göre, taralı alan kaç br^2 dir?

- A) $4\pi - 4\sqrt{3}$ B) $4\pi - 3\sqrt{3}$
 C) $6\pi - 12\sqrt{3}$ D) $6\pi - 9\sqrt{3}$
 E) $6\pi - 6\sqrt{3}$

5.

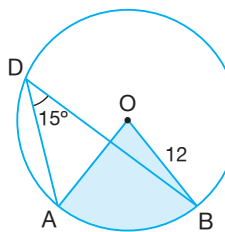


ABC dik üçgen
 A merkez
 D teğet değme
 noktası
 $|CD| = 2$ birim
 $|DB| = 6$ birim

Buna göre, taralı alan kaç br^2 dir?

- A) $8\sqrt{3} - 3\pi$ B) $8\sqrt{3} - 2\pi$ C) $8\sqrt{3} - \pi$
 D) $3\sqrt{3} - 3\pi$ E) $6\sqrt{3} - 2\pi$

6.

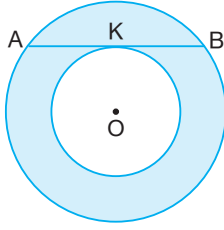


O merkez
 $|OB| = 12$ birim
 $m(\widehat{AOB}) = 15^\circ$

Buna göre, taralı alan kaç br^2 dir?

- A) 10π B) 12π C) 14π D) 16π E) 18π

7.

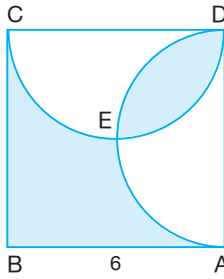


O çemberlerin
merkezi
K teğet değme
noktası
 $|AB| = 8$ birim

Buna göre, taralı alan kaç br^2 dir?

- A) 16π B) 14π C) 12π D) 10π E) 8π

8.

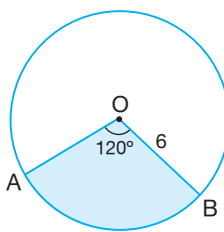


ABCD kare
[AD] ve [DC] çaplı
daireler E noktasın-
da kesişmektedir.
 $|AB| = 6$ birim

Buna göre, taralı alan kaç br^2 dir?

- A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

9.

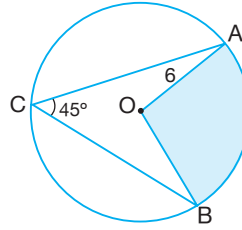


O merkez
 $|OB| = 6$ birim
 $m(\widehat{AOB}) = 120^\circ$

Buna göre, taralı alan kaç br^2 dir?

- A) 10π B) 12π C) 14π D) 16π E) 18π

10.

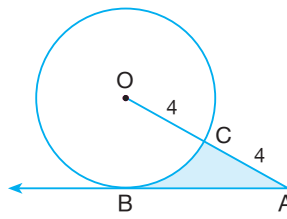


O merkez
 $|AO| = 6$ birim
 $m(\widehat{ACB}) = 45^\circ$

Buna göre, taralı alan kaç br^2 dir?

- A) 6π B) 9π C) 12π D) 14π E) 16π

11.

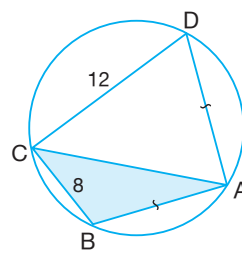


O merkez
B teğet noktası
A, C, O doğrusal
 $|AC| = 4$ birim
 $|CO| = 4$ birim

Buna göre, taralı alan kaç br^2 dir?

- A) $6\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ B) $8\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ C) $8\sqrt{3} - 2\pi$
D) $8\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}$ E) $8\sqrt{3} - 4\pi$

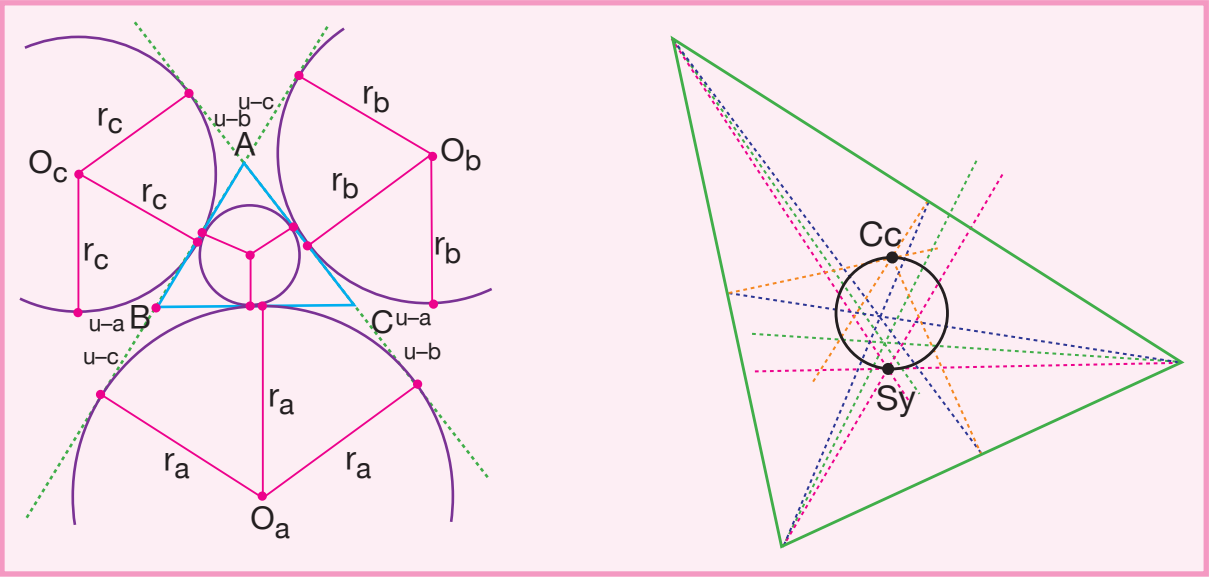
12.



$|CD| = 12$ birim
 $|BC| = 8$ birim
 $|AB| = |AD|$
 $A(\widehat{ADC}) = 18 \text{ br}^2$

Buna göre, $A(\widehat{ABC})$ kaç br^2 dir?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12



ÜÇGENİN MERKEZLERİ



ÜNİTE - 11

- Diklik Merkezi
- İç teğet Çemberin Merkezi (İç Merkez)
- Dış Teğet Çemberin Merkezi (Dış Merkez)
- Bir Üçgensel Bölgenin Ağırlık Merkezi
- Bir Üçgenin Ağırlık Merkezi

"Dünyadaki en masum uğraş matematiktir."

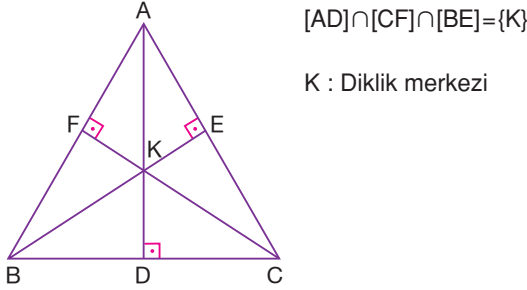
(G.H. HARDY)



ÜÇGENİN MERKEZLERİ

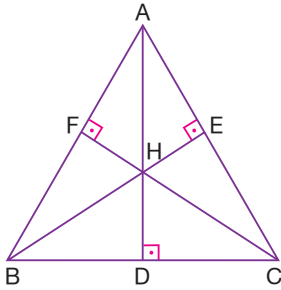
Diklik Merkezi :

Bir üçgende üç yükseklik ya da bu yüksekliklerin uzantıları her zaman bir noktada kesişir ve bu noktaya **üçgenin diklik merkezi** denir.



Özellikleri :

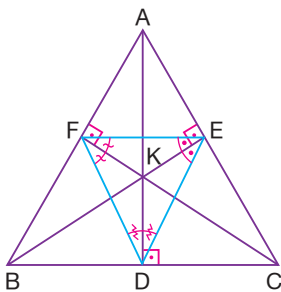
1.



ABC üçgen H diklik merkezi ise

$$|AH| \cdot |HD| = |BH| \cdot |HE| = |CH| \cdot |HF| \text{ dir.}$$

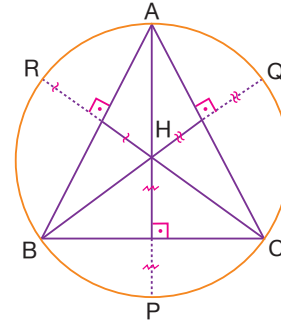
2.



ABC üçgen, K diklik merkezi ise

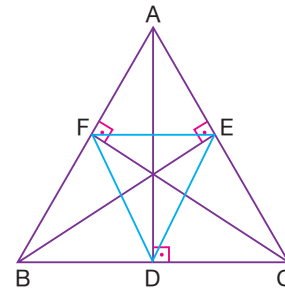
$\triangle FED$ nde K iç teğet çemberin merkezidir.

3.



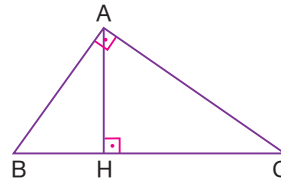
Bir üçgende diklik merkezinin üçgenin kenarlarına göre simetrikleri üçgenin çevrel çemberi üzerine düşer.

4.



DEF üçgeni ABC üçgeni içine çizilebilecek ve köşeleri ABC nin kenarları üzerinde olan çevresi en küçük üçgendir.

➤ Dik üçgenin diklik merkezi dik olan köşedir.

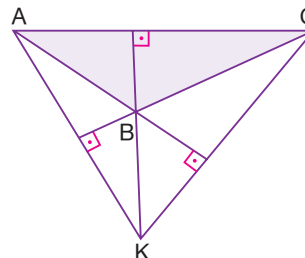


A : $\triangle ABC$ nin diklik merkezi

H : $\triangle AHC$ nin diklik merkezi

H : $\triangle AHB$ nin diklik merkezi

➤ Geniş açılı üçgenin diklik merkezi üçgenin dış bölgesine düşer.

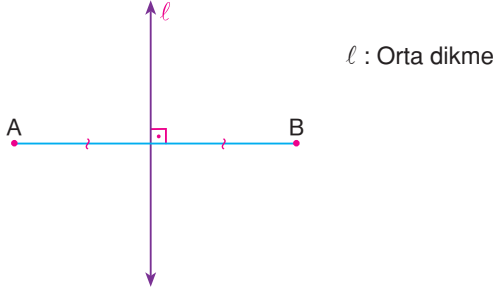


K : $\triangle ABC$ nin diklik merkezi

Çevrel Çemberin Merkezi :

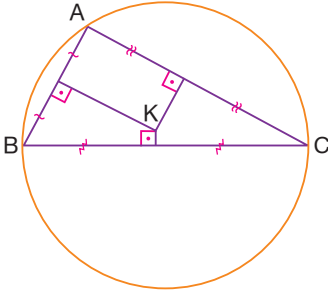
Kenar Orta Dikme :

Düzlemde farklı iki noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesine bu iki noktanın oluşturduğu doğru parçasının **kenar orta dikmesi** ya da kısaca **orta dikmesi** denir.



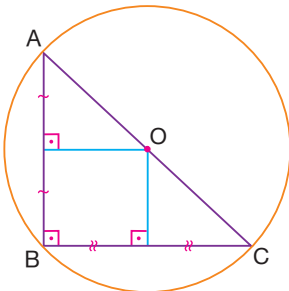
Bir üçgende kenarların orta dikmelerinin kesim noktası üçgenin çevrel çemberinin merkezidir.

- Dar açılı üçgenin çevrel çemberi üçgenin içindedir.



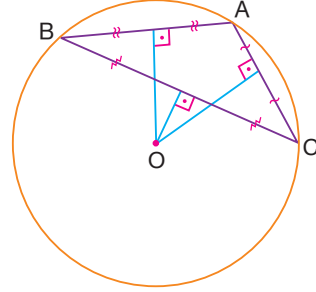
K : Çevrel çemberin merkezi

- Dik üçgenin çevrel çemberinin merkezi hipotenüsün orta noktasıdır.



O : $\triangle ABC$ nin çevrel çemberin merkezi

- Geniş açılı bir üçgenin çevrel çemberinin merkezi üçgenin dış bölgesindedir.

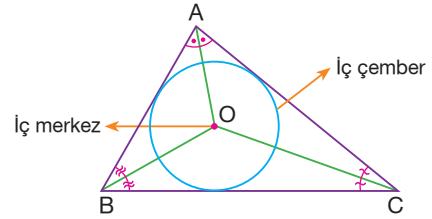


O : $\triangle ABC$ nin çevrel çemberin merkezi

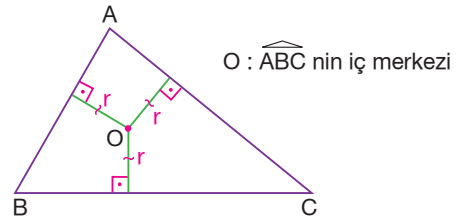
İç Teğet Çemberin Merkezi (İç merkez) :

Bir üçgende üç iç açıortay bir noktada kesişir.

Bu noktaya üçgenin iç teğet çemberinin merkezi ya da **iç merkez** denir.

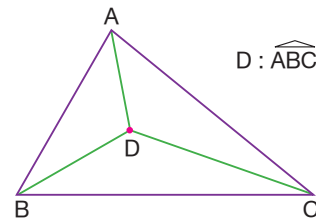


- Bir üçgenin tüm kenarına eşit uzaklıkta bulunan nokta üçgenin iç merkezidir.



O : $\triangle ABC$ nin iç merkezi

- İç merkezi köşelere birleştiren doğru parçaları üçgensel bölgenin alanını üçgenin kenarları ile orantılı böler.



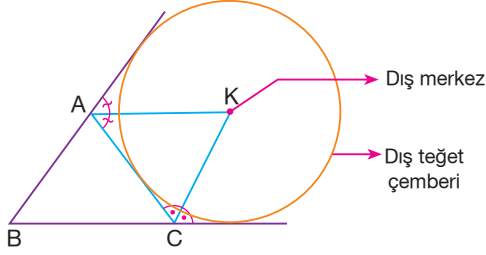
D : $\triangle ABC$ nin iç merkezi

$$A(\triangle ABD) : A(\triangle ADC) : A(\triangle BDC) = |AB| : |AC| : |BC|$$



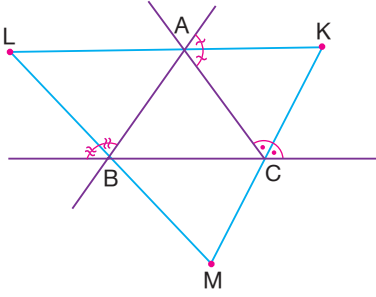
Dış Teğet Çemberin Merkezi (Dış merkez) :

Bir üçgenin herhangi iki dış açının açıortayının kesim noktasına üçgenin bir **dış (teğet çemberin) merkezi** denir.



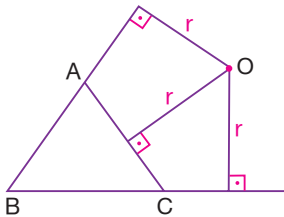
K noktası $\triangle ABC$ 'nin bir dış merkezdir.

➤ Bir üçgenin üç tane dış merkezi vardır.



K, L, M noktaları $\triangle ABC$ 'nin dış merkezleridir.

➤ Dış merkez bir üçgenin iki kenarının uzantısına ve diğer kenara eşit uzaklıktadır.

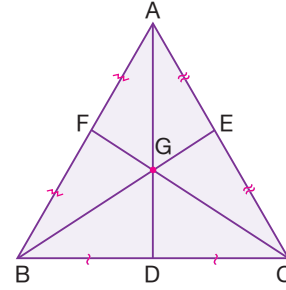


O noktası $\triangle ABC$ 'nin dış merkezidir.

Ağırlık Merkezi :

Bir Üçgensel Bölgenin Ağırlık Merkezi :

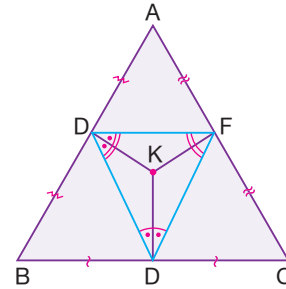
Bir üçgensel bölgenin ağırlık merkezi kenarortayların kesim noktasıdır.



G noktası $\triangle ABC$ 'nin ağırlık merkezidir.

Bir Üçgenin Ağırlık Merkezi :

Bir üçgenin ağırlık merkezi, üçgenin kenar orta noktalarının birleştirilmesi ile elde edilen üçgenin iç merkezidir.



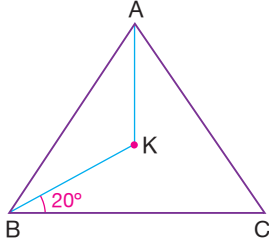
K noktası $\triangle DEF$ 'nin ağırlık merkezidir.



NOT :

Bir üçgen ile üçgensel bölge farklı kavramlar olup eşkenar üçgen dışında ağırlık merkezleri farklı noktalardır.

ÖRNEK - 1

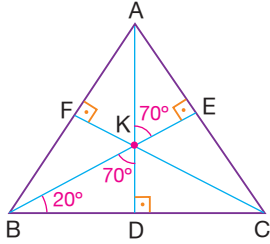


ABC üçgen
K diklik merkezi
 $m(\widehat{KBC}) = 20^\circ$

Buna göre, KAC açısının ölçüsünü bulalım.

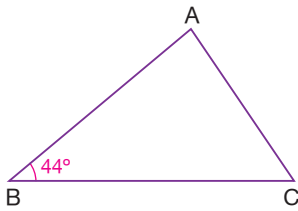
ÇÖZÜM

K diklik merkezi ise, $[BE] \perp [AC]$, $[AD] \perp [BC]$ ve $[CF] \perp [AB]$ olur.



Gerekli açılar yazılırsa $m(\widehat{KAC}) = 20^\circ$ bulunur.

ÖRNEK - 2



ABC üçgen
 $m(\widehat{ABC}) = 44^\circ$

ABC üçgeninin diklik merkezi A köşesi olduğuna göre, ACB açının ölçüsünü bulalım.

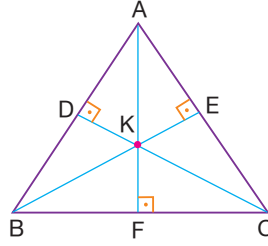
ÇÖZÜM

ABC üçgeninin diklik merkezi A köşesi olduğundan, $[CA] \perp [AB]$ olup üçgenin iç açıları toplamından,

$$90^\circ + 44^\circ + m(\widehat{C}) = 180^\circ \text{ olup}$$

$$m(\widehat{C}) = 46^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

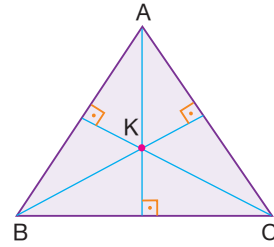


ABC üçgen
 $[AF] \perp [BC]$
 $[CD] \perp [AB]$
 $[BE] \perp [AC]$

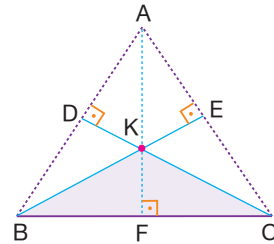
Yukarıdaki A, B, C, D, E, F, K noktalarından kaç tanesinin diklik merkezi olabileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

- K noktası $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir.



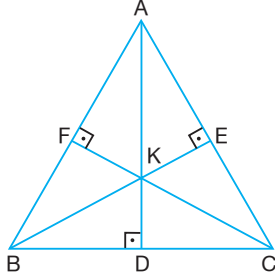
- A noktası $\triangle BKC$ nin diklik merkezidir.



- B noktası $\triangle AKC$ nin diklik merkezidir.
- C noktası $\triangle ABK$ nin diklik merkezidir.
- D noktası $\triangle BDK$ nin diklik merkezidir.
- E noktası $\triangle KEC$ nin diklik merkezidir.
- F noktası $\triangle BKF$ nin diklik merkezidir.

O halde verilen noktaların tamamı diklik merkezi olabilir.

1.

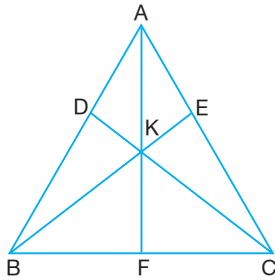


ABC çeşitkenar üçgen
 $[AD] \perp [BC]$
 $[BE] \perp [AC]$
 $[CF] \perp [AB]$

K noktası için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi
 B) $\widehat{ABC}$ nin çevrel çemberinin merkezi
 C) $\widehat{ABC}$ nin iç teğet çemberinin merkezi
 D) $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi
 E) $\widehat{ABC}$ nin diklik merkezi

2.

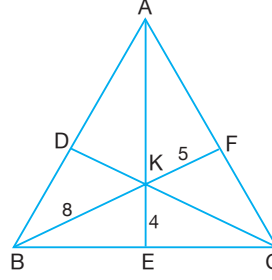


ABC üçgen
 $[AF] \cap [CD] \cap [BE] = \{K\}$

K noktası $\widehat{ABC}$ nin diklik merkezi olduğuna göre, C noktası $\widehat{ABK}$ nin nesidir?

- A) Dış teğet çemberinin merkezi
 B) Çevrel çemberinin merkezi
 C) Diklik merkezi
 D) Ağırlık merkezi
 E) İç teğet çemberinin merkezi

3.

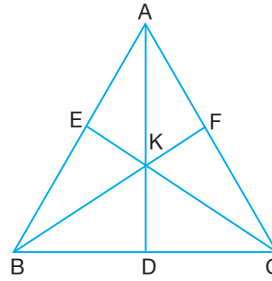


ABC üçgen
 K noktası ABC üçgeninin diklik merkezidir.
 $|BK| = 8$ birim
 $|KF| = 5$ birim
 $|KE| = 4$ birim

Buna göre, $|AK|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

4.



ABC üçgen
 $[CE] \cap [AD] \cap [BF] = \{K\}$
 K diklik merkezi
 $\widehat{C(ABC)} = 16$ birim

Buna göre, $|AD| + |BF| + |CE|$ toplamının en büyük tamsayı değeri kaçtır?

- A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

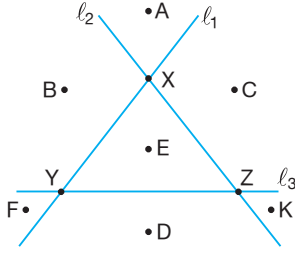
5.

- I. Bir üçgenin diklik merkezi, çevrel çemberinin merkezi, iç teğet çemberinin merkezi aynı doğru üzerinde olabilir.
 II. Geniş açılı bir üçgenin çevrel çemberinin merkezi üçgenin bir köşesidir.
 III. Dar açılı bir üçgenin diklik merkezi üçgenin iç bölgesindedir.

Yukarıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
 D) I ve II E) I, II ve III

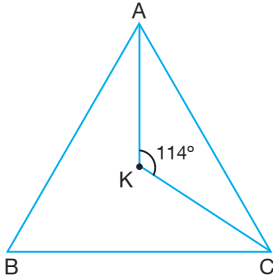
6.



l_1, l_2, l_3 doğrularının oluşturduğu $\triangle XYZ$ nin diklik merkezi A, B, C, D, E, F, K noktalarından kaç tanesi olabilir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

7.

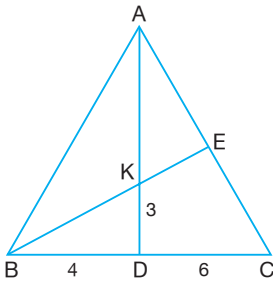


ABC üçgen K noktası $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir.
 $m(\angle AKC) = 114^\circ$

Buna göre, $\angle BCK$ açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 28

8.

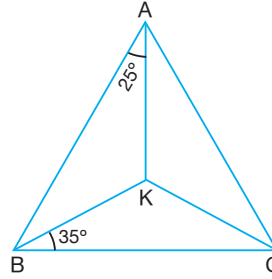


ABC üçgen K noktası $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir.
 $|BD| = 4$ birim
 $|DC| = 6$ birim
 $|KD| = 3$ birim

Buna göre, $|AK|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

9.

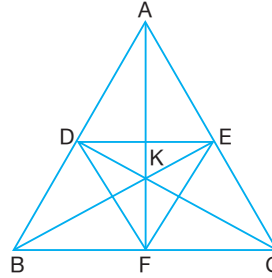


ABC üçgen K noktası $\triangle ABC$ nin çevrel çemberinin merkezidir.
 $m(\angle BAK) = 25^\circ$
 $m(\angle KBC) = 35^\circ$

Buna göre, $\angle AKC$ açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 100 B) 105 C) 110 D) 115 E) 120

10.

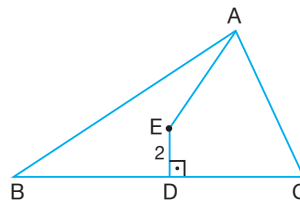


ABC eşkenar üçgen K noktası $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir.

Buna göre, K noktası $\triangle DEF$ nin nesidir?

- A) Çevrel çemberinin merkezi
B) İç teğet çemberinin merkezi
C) Diklik merkezi
D) Ağırlık merkezi
E) Dış teğet çemberinin merkezi

11.

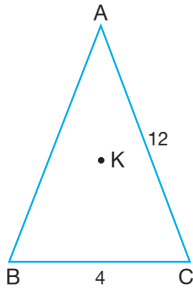


ABC üçgen E noktası $\triangle ABC$ nin çevrel çemberinin merkezidir.
 $|BC| = 8\sqrt{2}$ birim
 $|ED| = 2$ birim

Buna göre, $|AE|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 6 B) $6\sqrt{2}$ C) 8 D) $8\sqrt{2}$ E) 10

1.



K noktası $\triangle ABC$ nin çevrel çemberinin merkezidir.

AB tamsayı

$$|AC| = 12 \text{ birim}$$

$$|BC| = 4 \text{ birim}$$

Buna göre, $|AB|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

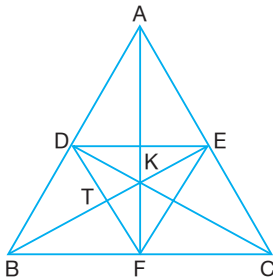
2.

Bir ABC üçgeninin diklik merkezinin üçgenin kenarlarına göre simetrikleri üçgenin üzerindedir.

Yukarıdaki boşluğa aşağıdakilerden hangisi gelmelidir?

- A) Çevrel çemberi
B) İç teğet çemberi
C) Dış teğet çemberi
D) Ağırlık merkezi
E) Diklik merkezi

3.



ABC üçgen

K noktası $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir.

$$|DE| = 6 \text{ birim}$$

$$|EF| = 8 \text{ birim}$$

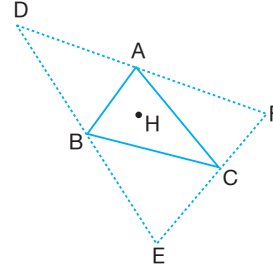
$$|TE| = 6 \text{ birim}$$

Buna göre, köşeleri $\triangle ABC$ nin kenarları üzerinde ve çevre uzunluğu en küçük olan üçgenin çevre uzunluğu kaç birimdir?

- A) 21 B) 20 C) 19 D) 18 E) 17

4.

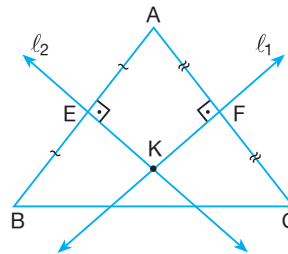
Çeşitkenar bir ABC üçgeninin A köşesinden [BC] kenarına, B köşesinden [AC] kenarına ve C köşesinden [AB] kenarına paralel doğrular çizilerek şekildeki gibi bir DEF üçgeni elde ediliyor.



H noktası ABC üçgeninin yüksekliklerinin kesim noktası olduğuna göre, DEF üçgeninin nesidir?

- A) Kenarortaylarının kesim noktasıdır.
B) İki dış açıortay ve bir iç açıortayının kesim noktasıdır.
C) Yüksekliklerinin kesim noktasıdır.
D) İç teğet çemberinin merkezidir.
E) Çevrel çemberinin merkezidir.

5.



ABC üçgen

$$\ell_1 \perp [AC]$$

$$\ell_2 \perp [AB]$$

$$\ell_1 \cap \ell_2 = \{K\}$$

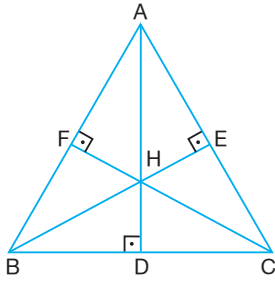
$$|AF| = |FC|$$

$$|AE| = |EB|$$

Buna göre, K noktası $\triangle ABC$ nin nesidir?

- A) İç teğet çemberin merkezi
B) Ağırlık merkezi
C) Diklik merkezi
D) Çevrel çemberin merkezi
E) Dış teğet çemberin merkezi

6.

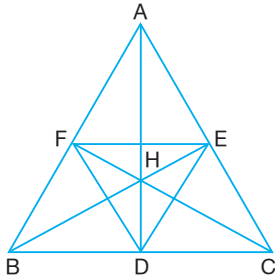


ABC üçgen
 $[AD] \perp [BC]$
 $[BE] \perp [AC]$
 $[CF] \perp [AB]$

Yukarıdaki tüm üçgenler göz önüne alındığında A, B, C, D, E, F, H noktalarından kaç tanesi diklik merkezi olabilir?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

7.

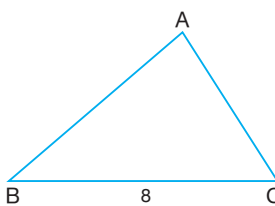


ABC üçgen
 H noktası $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir.

Buna göre, $m(\widehat{FEB}) + m(\widehat{FDA}) + m(\widehat{CFE})$ toplamı kaç derecedir?

- A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 120

8.

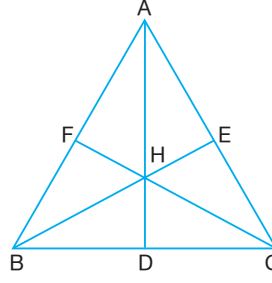


A noktası $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir.

Buna göre, ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) $6\sqrt{2}$

9.



H noktası $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir.
 $[AD] \cap [BE] \cap [CF] = \{H\}$

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

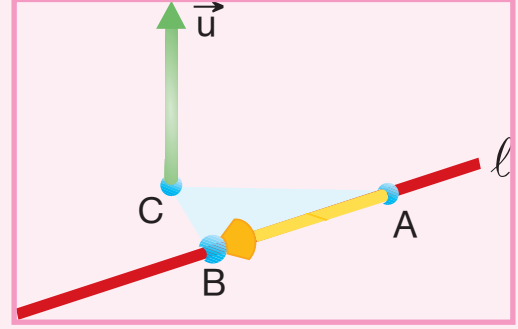
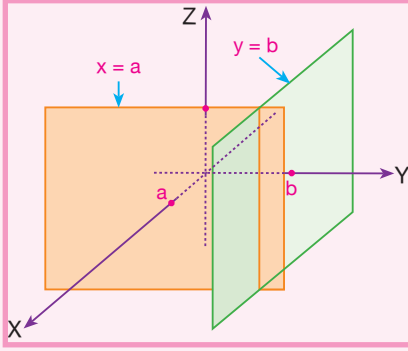
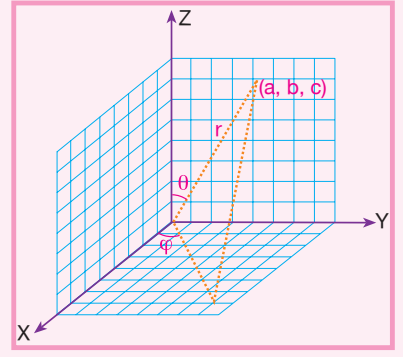
- A) $|AH| = 2|HD|$
 B) $|FH| = |HD|$
 C) $|AH| \cdot |HD| = |BH| \cdot |HE|$
 D) $|AH| > |HC|$
 E) $|FH|^2 = |DH| \cdot |HE|$

10. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) Bir üçgenin diklik merkezi aynı zamanda iç teğet çemberin merkezi olabilir.
 B) Eşkenar üçgeninin tüm merkezleri aynı noktadır.
 C) İkizkenar üçgenin diklik merkezi, iç teğet çemberinin merkezi, çevrel çemberin merkezi aynı doğru üzerindedir.
 D) Bir üçgenin çevrel çemberinin merkezi kenarlardan birinin orta noktası olabilir.
 E) Bir üçgenin çevrel çemberinin merkezi bir köşe olabilir.

11. Bir çeşitkenar üçgenin tüm köşelerine eşit uzaklıkta bulunan nokta aşağıdakilerden hangisidir?

- A) Diklik merkezi
 B) Çevrel çemberin merkezi
 C) Ağırlık merkezi
 D) İç teğet çemberin merkezi
 E) Dış teğet çemberin merkezi



UZAYDA VEKTÖRLER ve DOĞRU - DÜZLEM

ÜNİTE - 12

- Uzay
- Uzayda Dik Koordinat Sistemi
- Uzayda Vektörler
- Uzayda İki Vektörün Skaler (İç) Çarpımı
- Uzayda İki Vektörün Vektörel (Dış) Çarpımı
- Uzayda Doğru Düzlem Denklemleri

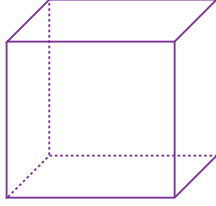
“...evren her an gözlemlerimize açıktır; ama onun dilini ve bu dilin yazıldığı harfleri öğrenmeden ve kavramadan anlaşılamaz. Evren matematik diliyle yazılmıştır; harfleri üçgenler, daireler ve diğer geometrik biçimlerdir. Bunlar olmadan tek sözcüğü bile anlaşılamaz; bunlarsız ancak karanlık bir labirentte dolanılır.”

GALİLEO



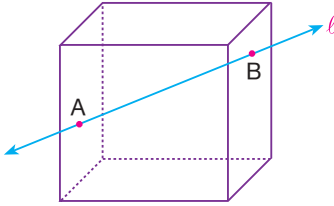
Uzay

Hepsi birden aynı düzlemde olmayan tüm noktaların kümesine **uzay** denir.

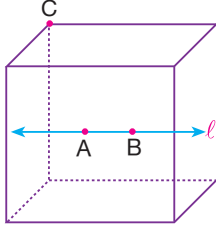


Uzayın paralel yüz modeli

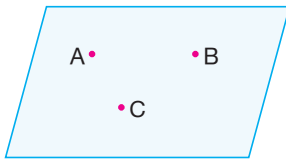
- Uzayda farklı iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.



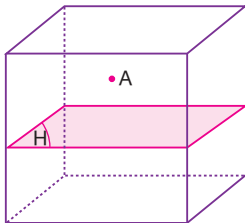
- Uzayda herhangi bir doğru üzerinde en az iki nokta ve dışında en az bir nokta vardır.



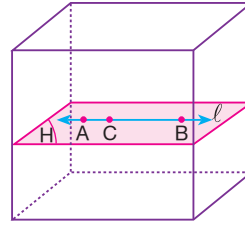
- Uzayda doğrusal (doğrudaş) olmayan farklı üç noktada bir düzlem belirtir.



- Uzayda bir düzlemin dışında en az bir nokta vardır.

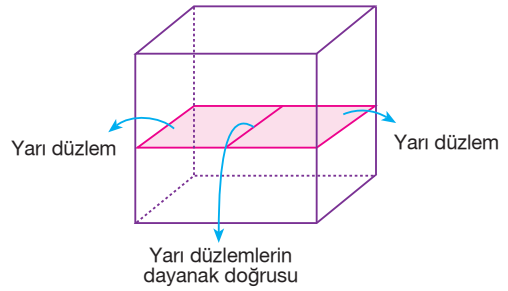


- Uzayda farklı iki nokta bir düzlemde ise; bu iki noktadan geçen doğrunun tüm noktaları da bu düzlem üzerindedir.

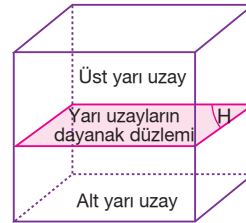


$A \in (H)$
 $B \in (H)$
 $C \in \ell$ ise
 $C \in (H)$ dir.

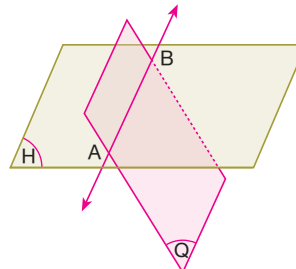
- Uzayda bir ℓ doğrusu bir H düzleminin alt kümesi ise ℓ doğrusu H düzleminin ℓ doğrusu dışındaki noktalarını iki bölgeye (iki yarı düzleme) ayırır.



- Uzayda bir H düzlemi, kendisi dışındaki uzayın noktalarını iki farklı bölgeye ayırır.
- Bu bölgelere H düzleminin belirttiği **açık yarı uzaylar** denir.
- Bu açık yarı uzaylardan biri ile H düzleminin birleşimine H düzleminin belirttiği **kapalı yarı uzay** denir.
- Bu durumda H düzlemine de bu yarı uzayların **dayanak düzlemi** denir.



- Uzayda farklı iki düzlemin bir ortak noktası varsa, bu noktadan geçen bir ortak doğru vardır.

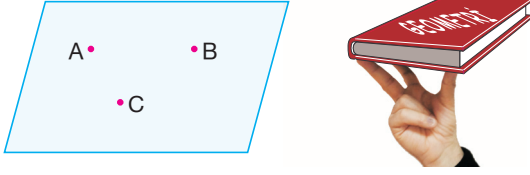


$$(H) \cap (Q) = AB$$

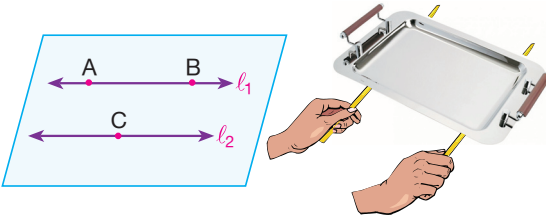


Düzlem Belirtme Aksiyomları

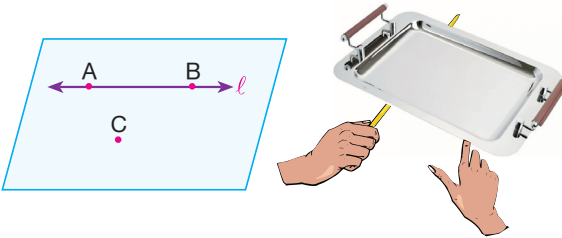
- 1 Doğrusal olmayan üç nokta bir düzlem belirtir.



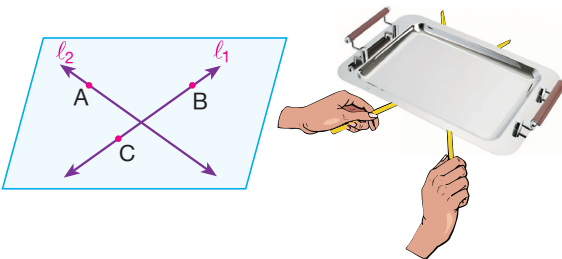
- 2 Paralel iki doğru bir düzlem belirtir.



- 3 Bir doğru ve dışındaki bir nokta bir düzlem belirtir.



- 4 Kesişen iki doğru bir düzlem belirtir.

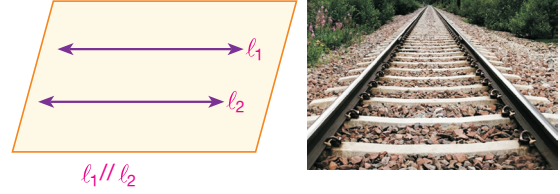


"Yukarıdaki son üç madde aslında ilk maddenin sonucudur."

İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

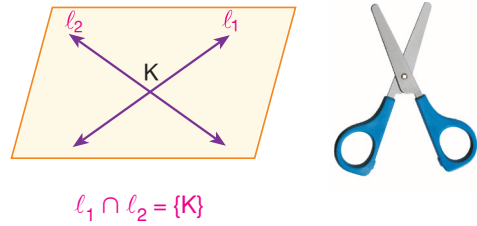
- 1 Paralel olma durumu ;

Aynı düzlemde olup kesişmeyen doğrudur.



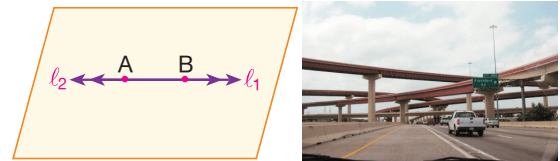
- 2 Kesişme durumu ;

İki doğrunun yalnız bir ortak noktası varsa bu doğrulara kesişen doğrular denir.



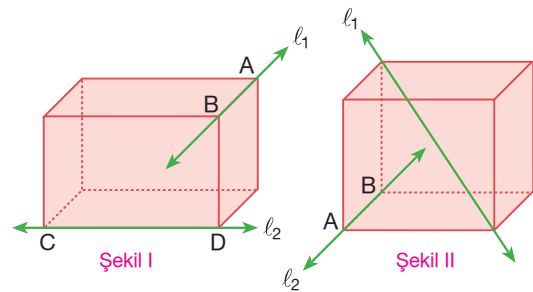
- 3 Çakışık olma durumu ;

En az ikişer noktası ortak olan doğrulara çakışık doğrular denir.



- 4 Aykırı olma durumu ;

Farklı düzlemlerde olup kesişmeyen ve paralel olmayan doğrulara aykırı doğrular denir.



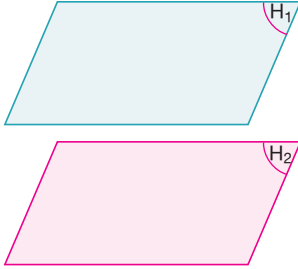
Yukarıdaki Şekil I ve Şekil II deki l_1 ve l_2 aykırı doğrulardır.



İki Düzlemin Birbirine Göre Durumu

1 Paralel düzlemler :

Ortak noktası olmayan düzlemlerdir.

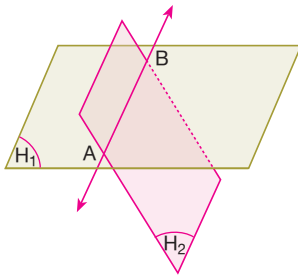


$$(H_1) \parallel (H_2)$$

$$(H_1) \cap (H_2) = \emptyset$$

2 Kesişen düzlemler :

Ortak noktaları bir doğru üzerinde olan düzlemlerdir.

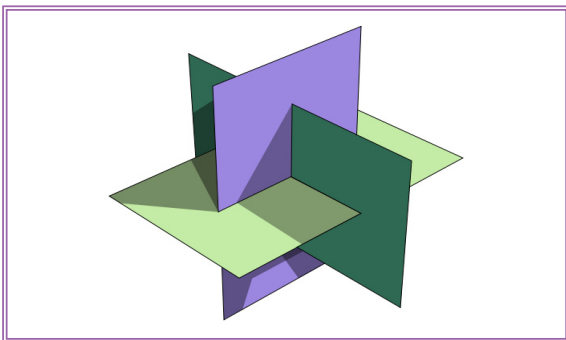
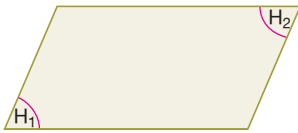


$$(H_1) \cap (H_2) = AB$$

H_1 ve H_2 düzlemleri AB doğrusu boyunca kesişmiştir.

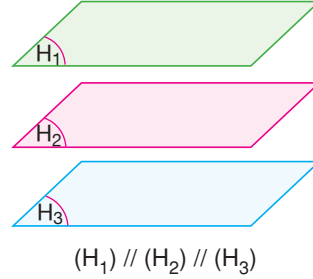
3 Çakışık düzlemler :

Tüm noktaları aynı olan düzlemlerdir.



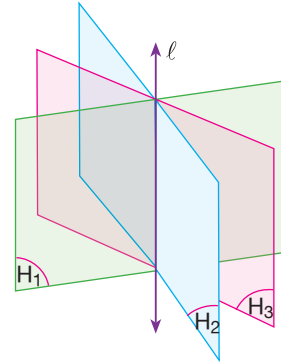
Üç Düzlemin Birbirine Göre Durumları

1 Üç düzlem birbirine paralel olabilir.

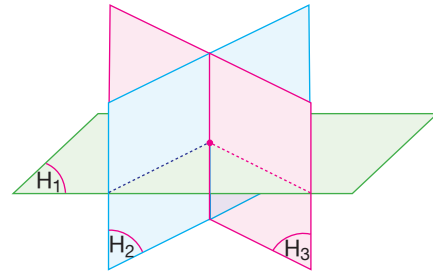


$$(H_1) \parallel (H_2) \parallel (H_3)$$

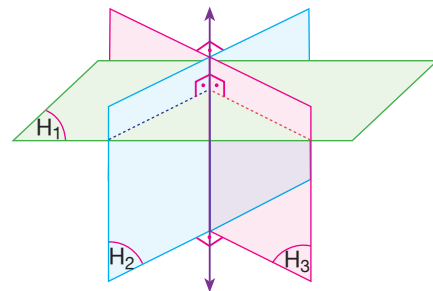
2 Üç düzlem bir doğru boyunca kesişebilir.



3 Üç düzlem bir noktada kesişebilir.



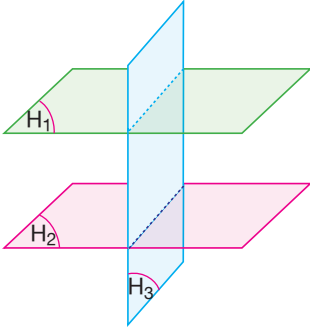
4 Üç düzlem ikişer ikişer birbirine dik olabilir.



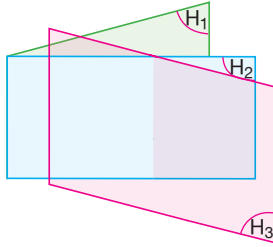
$$(H_1) \perp (H_2), (H_1) \perp (H_3), (H_2) \perp (H_3)$$



- 5 Üç düzlemden ikisi paralel olup üçüncüsü diğer ikisini kesebilir.



- 6 Üç düzlem ikişer ikişer şekildeki gibi kesişebilir.



Uzayda Doğrultu

10. Sınıftan Hatırlayalım :

Bir doğru parçasının doğrultusu (taşıyıcısı) üzerinde bulunduğu doğrunun doğrultusu ile aynıdır.



Yukarıdaki [AB] doğru parçasının doğrultusu AB doğrusunun doğrultusu ile aynıdır.



NOT :

Bir doğru parçasının başlangıç ve bitiş noktaları aynı ise buna **nokta** denir.

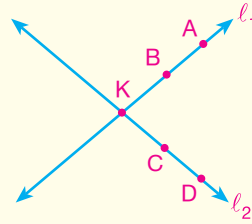
Noktanın uzunluğu olmadığı için doğrultusu da yoktur.



NOT :

Aynı düzlemde bulunan iki doğrunun doğrultuları farklı ise kesişirler. Fakat, iki doğru parçasının doğrultuları farklı ise kesişmeyebilirler.

Örneğin :

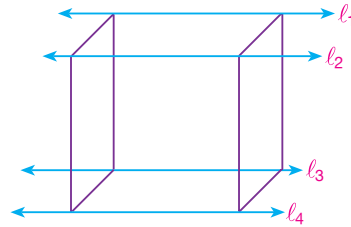


$$l_1 \cap l_2 = \{ K \}$$

$$[AB] \cap [CD] = \{ \}$$

Uzayda ise;

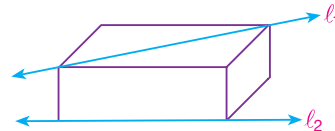
- Paralel doğrular bir denklik sınıfı oluşturur.



Yukarıdaki paralel yüz uzay modelinde l_1, l_2, l_3 ve l_4 doğruları herhangi biri ile temsil edilebilir.

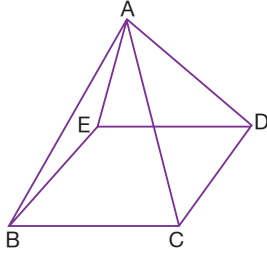
- Uzayda doğruların paralellik bağıntısının her bir denklik sınıfı bir doğrultudur.

- Uzayda aykırı doğrular, farklı doğrultulardadır.





ÖRNEK – 1



Yukarıdaki kare piramitte,

- a) Aynı düzlemde olan doğru parçalarını
- b) Aykırı doğru parçalarını
- c) Kesişen doğru parçalarını
- d) Paralel doğru parçalarını

belirleyelim.

ÇÖZÜM

- a) Aynı düzlemde olan doğru parçaları;

[AB], [AC] ve [BC] aynı düzlemde.
 [AC], [AD] ve [CD] aynı düzlemde.
 [AE], [AD] ve [ED] aynı düzlemde.
 [AB], [AE] ve [BE] aynı düzlemde.
 [BC], [CD], [DE] ve [EB] aynı düzlemde.
 [AB] ve [AD] aynı düzlemde.
 [AE] ve [AC] aynı düzlemde.

- b) Aykırı doğru parçaları;

[AE] ve [BC] aykırıdır.
 [AD] ve [BE] aykırıdır.
 [AC] ve [BE] aykırıdır.
 [AE] ve [DC] aykırıdır.

- c) Kesişen doğru parçaları;

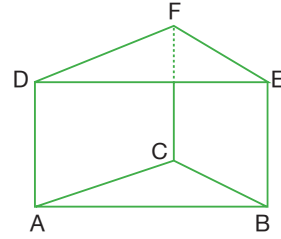
[AE] ve [DE] kesişen doğru parçalarıdır.
 [AB] ve [AC] kesişen doğru parçalarıdır.
 [AE] ve [AC] kesişen doğru parçalarıdır.
 [BE] ve [ED] kesişen doğru parçalarıdır.
 [BC] ve [CD] kesişen doğru parçalarıdır.

- d) Paralel doğru parçaları;

[BE] ve [CD] paralel doğru parçalarıdır.
 [BC] ve [ED] paralel doğru parçalarıdır.



ÖRNEK – 2



Yukarıdaki üçgen prizmada,

- a) Aynı düzlemde olan doğru parçalarını
- b) Aynı düzlemde olmayan doğru parçalarını
- c) Aykırı doğru parçalarını
- d) Paralel doğru parçalarını
- e) Kesişen doğru parçalarını

belirleyelim.

ÇÖZÜM

- a) Aynı düzlemde olan doğru parçaları;

[FD], [FE] ve [DE] aynı düzlemde.
 [AC], [CB] ve [AB] aynı düzlemde.
 [FC], [FE], [EB] ve [BC] aynı düzlemde.
 [FD], [FC], [CA] ve [AD] aynı düzlemde.
 [DE], [EB], [BA] ve [AD] aynı düzlemde.



b) Aynı düzlemde olmayan doğru parçaları;

[DF] ve [BE] aynı düzlemde değildir.
[FE] ve [AD] aynı düzlemde değildir.
[AC] ve [BE] aynı düzlemde değildir.
[AB] ve [FC] aynı düzlemde değildir.
[BC] ve [AD] aynı düzlemde değildir.
[DE] ve [CF] aynı düzlemde değildir.

c) Aykırı doğru parçaları;

[CF] ve [DE] aykırıdır.
[BE] ve [AC] aykırıdır.
[AD] ve [FE] aykırıdır.
[AC] ve [FE] aykırıdır.
[BC] ve [DF] aykırıdır.

d) Paralel doğru parçaları;

[DF] ve [AC] paralel doğru parçalarıdır.
[FE] ve [BC] paralel doğru parçalarıdır.
[AB] ve [DE] paralel doğru parçalarıdır.
[FC] ve [AD] paralel doğru parçalarıdır.
[FC] ve [BE] paralel doğru parçalarıdır.

e) Kesişen doğru parçaları;

[DF] ve [FE] kesişen doğru parçalarıdır.
[DF] ve [FC] kesişen doğru parçalarıdır.
[CF] ve [CB] kesişen doğru parçalarıdır.
[CF] ve [CA] kesişen doğru parçalarıdır.
[AD] ve [AB] kesişen doğru parçalarıdır.
[AD] ve [AC] kesişen doğru parçalarıdır.
[BC] ve [BE] kesişen doğru parçalarıdır.
[BC] ve [BA] kesişen doğru parçalarıdır.

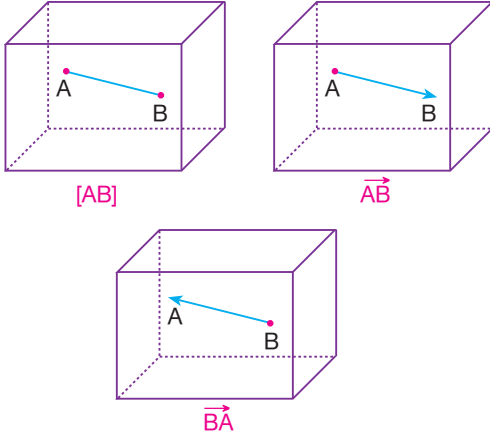
Uzay Aksiyomları :

- Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.
- Doğrusal olmayan 3 farklı noktadan bir tek düzlem geçer.
- Bir doğru ve bu doğru üzerinde bulunmayan bir nokta düzlem belirtir.
- Kesişen farklı iki doğru bir düzlem belirtir.
- Paralel iki doğru bir düzlem belirtir.
- Farklı iki düzlem kesişirse arakesitleri bir doğrudur.
- Bir doğru üzerinde bulunmadığı bir düzlemi keserse arakesiti bir noktadır.
- Bir doğrunun farklı iki noktası bir düzlem üzerinde ise, bu doğrunun bütün noktaları da bu düzlem üzerindedir.
- Paralel iki düzlemden biri içindeki her doğru diğer düzleme paraleldir.
- Paralel iki düzlemden birini kesen bir düzlem diğerini de keser.
- Kesişen iki düzlemin ikisine de paralel olan bir doğru bu düzlemlerin arakesit doğrusuna da paraleldir.
- Aynı doğruya paralel olan iki doğru birbirine paraleldir.
- Bir düzlemin kesişen iki doğrusuna kesişme noktasında dik olan doğru bu düzleme diktir.
- Aynı doğruya dik olan iki düzlem birbirine paraleldir.
- Aynı düzleme dik olan iki doğru birbirine paraleldir.
- Bir noktadan geçen ve bir doğruya dik olan yalnız bir düzlem vardır.
- Paralel iki düzlemden birine dik olan doğru diğer düzlemde diktir.



Uzayda Yönlü Doğru Parçaları

Uzunluğu, doğrultusu ve yönü olan doğru parçasına **yönlü doğru parçası** denir.



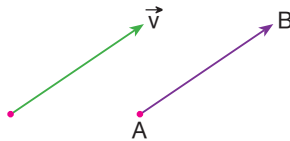
- Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan yönlü doğru parçaları üzerindeki yön ve doğrultu keyfidir.
- Işın ve yönlü doğru parçası farklı kavramlardır.



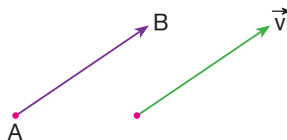
- Yönlü doğru parçaları üzerinde $\sim$ bağıntısı,

" $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ nin doğrultuları, yönleri aynı ve uzunlukları eşittir." biçiminde tanımlanır. $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

- Bir A noktası ve bir $\vec{v}$ verildiğinde $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ olacak şekilde bir tek B noktası vardır.



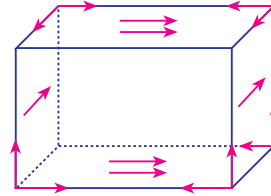
- A ve B noktası verildiğinde $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ olacak şekilde bir tek $\vec{v}$ vardır.



- Uzunluğu 1 birim olan vektöre **birim vektör** denir.
- Başlangıç ve bitimi aynı olan yönlü doğru parçalarının denklik sınıfına **sıfır vektör** denir. $\vec{0}$ ya da $\overrightarrow{AA}$ ile gösterilir.

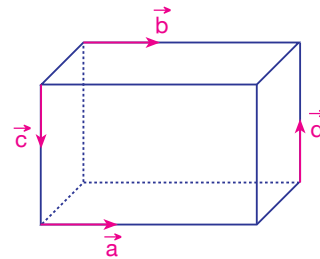
Vektörler ile çalışırken denklik sınıflarının temsilci elemanlarını kullanırız.

- Doğrultuları ve uzunlukları aynı, yönleri farklı olan $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ için $\vec{u} = -\vec{v}$ dir.
- Uzaydaki tüm vektörler kümesi $\vec{v}$ ile gösterilir.
- Uzayda, vektörlerde toplama ve skalarla çarpma işlemleri ve özellikleri düzlemdekine benzerdir.



Uzayda Vektörlerin Lineer Bağımlı – Bağımsız Olma Durumu

- Uzayda doğrultuları aynı olan iki vektör lineer bağımlıdır yani, biri diğerinin bir reel katı olarak yazılabilir.



Yukarıdaki uzay modelinde,

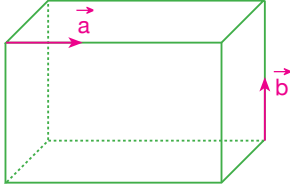
- ✓ $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ lineer bağımlıdır.
- ✓ $\vec{c}$ ve $\vec{d}$ lineer bağımlıdır.

Yani $\vec{b}$ nü bir pozitif reel sayı ile çarparak $\vec{a}$ nü elde edebiliriz.



aynı şekilde $\vec{c}$ nü bir negatif reel sayı çarparak $\vec{d}$ nü elde edebiliriz.

- Uzayda doğrultuları farklı olan iki vektör lineer bağımsızdır. Yani biri diğerinin bir reel katı olarak yazılamaz.



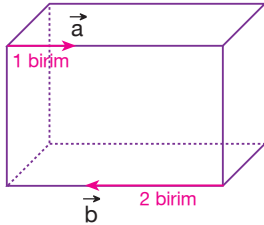
$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ lineer bağımsızdır.

- Uzayda üçten fazla vektör her zaman lineer bağımlıdır.
- Uzayda $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ verildiğinde,

$$\vec{w} = k \cdot \vec{u} + p \cdot \vec{v}$$

olacak şekilde $k, p \in \mathbb{R}$ bulunabiliyorsa bu üç vektöre lineer bağımlı, bulunamıyorsa **lineer bağımsız vektörler** denir.

Örneğin;



Yukarıdaki uzay modelinde,

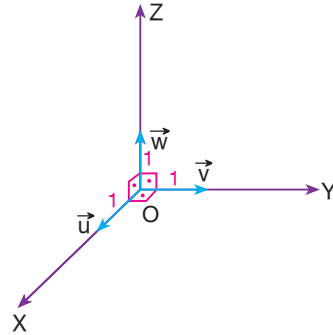
$\vec{a}$ ile $\vec{b}$ nün doğrultuları aynı, yönleri terstir.

$$\vec{b} = -2 \cdot \vec{a} \text{ olup}$$

$\vec{a}$ ile $\vec{b}$ lineer bağımlıdır diyebiliriz.

Uzayda Dik Koordinat Sistemi

Uzayda bir O noktası ve $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ dik birim vektörleri ile oluşturulan sisteme **dik koordinat sistemi** denir.



$$\begin{aligned}\vec{u} &= (1, 0, 0) = \vec{e}_1 \\ \vec{v} &= (0, 1, 0) = \vec{e}_2 \\ \vec{w} &= (0, 0, 1) = \vec{e}_3\end{aligned}$$

$\{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ ya da XYZ dik koordinat sistemi şeklinde gösterilir.

- Uzayda lineer bağımsız vektörler ikişer ikişer birbirine dik ise bu sisteme dik koordinat sistemi denir.
- Uzayda bir noktanın yer vektörünün bileşenleri ile bu noktanın koordinatları aynıdır.

Örneğin;

$$A(1, 2, 5) \Rightarrow \vec{OA} = \vec{A} = (1, 2, 5) \text{ yazılabilir.}$$



NOT :

Uzayda bütün yer vektörlerinin kümesi $\mathbb{R}^3$ ile gösterilir.

Demek ki $A(a, b, c)$ sıralı üçlüsü aynı zamanda başlangıcı orijin ve bitimi $A(a, b, c)$ olan bir vektörü göstermektedir.

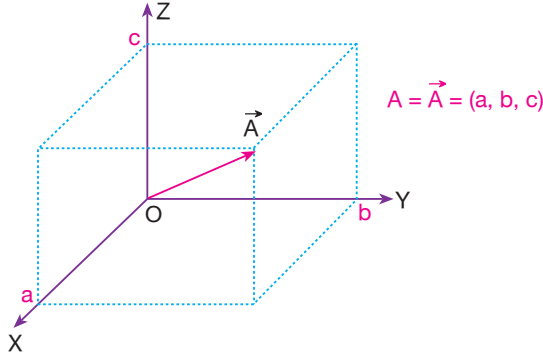
O halde, **A noktası** $= \vec{A} = (a, b, c)$ yazılabilir.



ÖRNEK - 1

$A(a, b, c)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde göstererek $\vec{OA} = \vec{A}$ nı gösterelim.

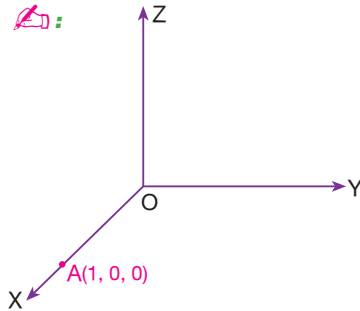
ÇÖZÜM  :



ÖRNEK - 2

$A(1, 0, 0)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde gösterelim.

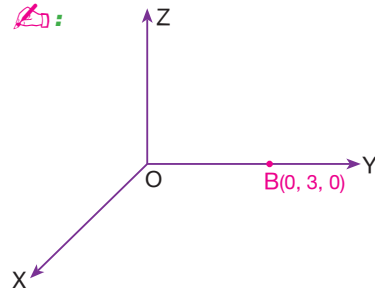
ÇÖZÜM  :



ÖRNEK - 3

$B(0, 3, 0)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde gösterelim.

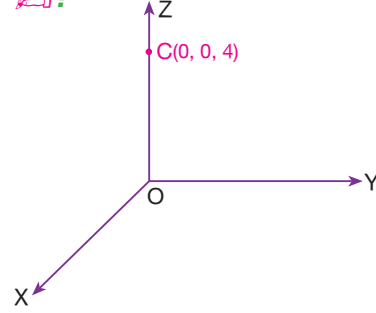
ÇÖZÜM  :



ÖRNEK - 4

$C(0, 0, 4)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde gösterelim.

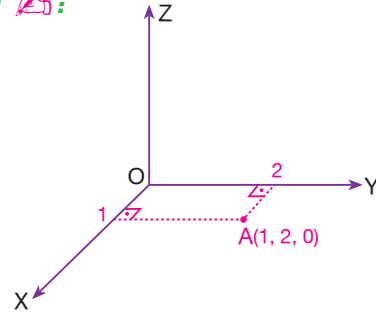
ÇÖZÜM  :



ÖRNEK - 5

$A(1, 2, 0)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde gösterelim.

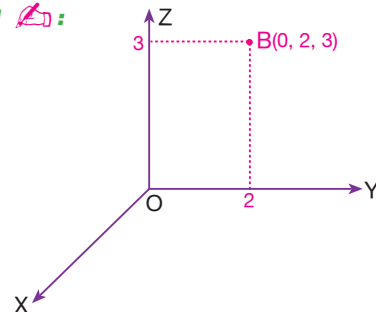
ÇÖZÜM  :



ÖRNEK - 6

$B(0, 2, 3)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde gösterelim.

ÇÖZÜM  :

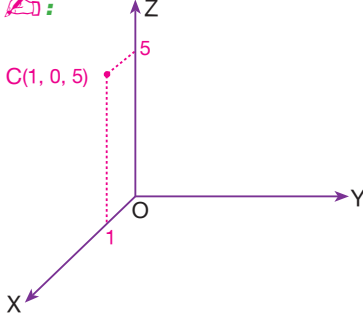




ÖRNEK - 7

$C(1, 0, 5)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde gösterelim.

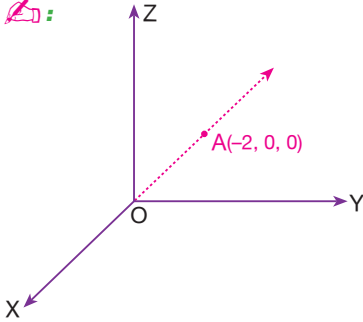
ÇÖZÜM  :



ÖRNEK - 8

$A(-2, 0, 0)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde gösterelim.

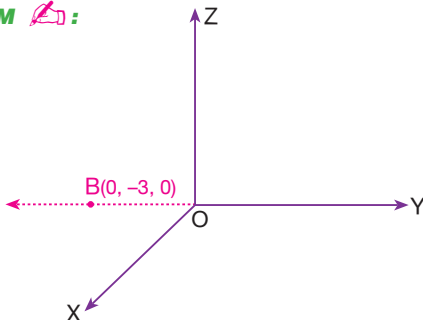
ÇÖZÜM  :



ÖRNEK - 9

$B(0, -3, 0)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde gösterelim.

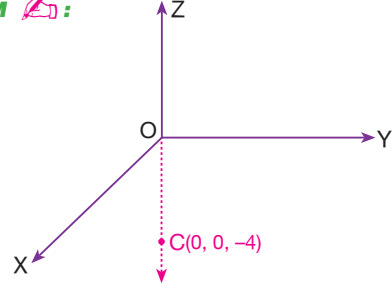
ÇÖZÜM  :



ÖRNEK - 10

$C(0, 0, -4)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde gösterelim.

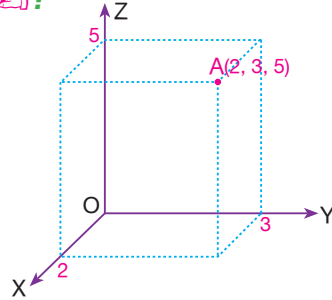
ÇÖZÜM  :



ÖRNEK - 11

$A(2, 3, 5)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde gösterelim.

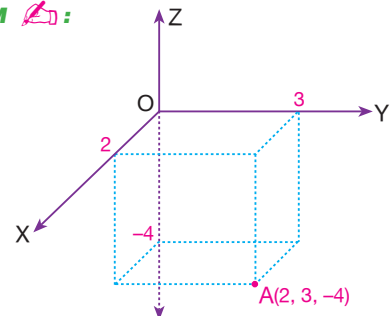
ÇÖZÜM  :



ÖRNEK - 12

$A(2, 3, -4)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde gösterelim.

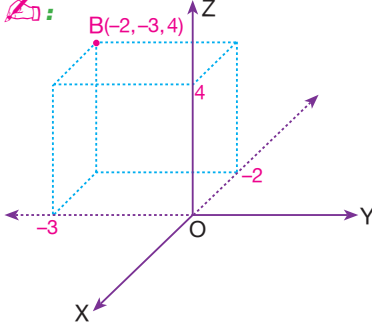
ÇÖZÜM  :



ÖRNEK - 13

$A(-2, -3, 4)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde gösterelim.

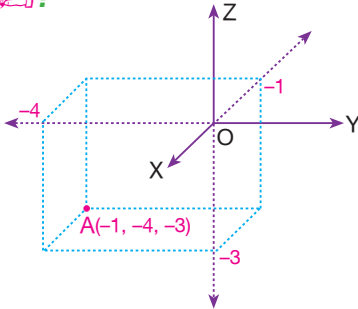
ÇÖZÜM :



ÖRNEK - 14

$A(-1, -4, -3)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde gösterelim.

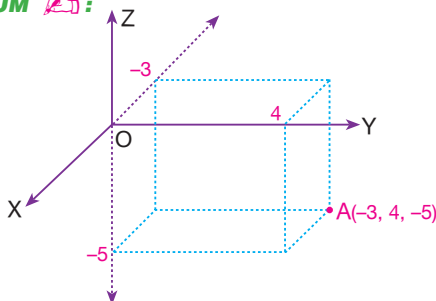
ÇÖZÜM :



ÖRNEK - 15

$A(-3, 4, -5)$ noktasını XYZ dik koordinat sisteminde gösterelim.

ÇÖZÜM :

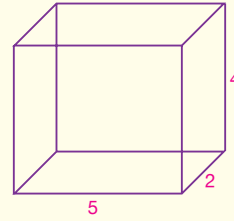


NOT :

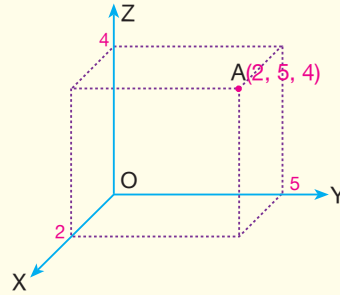
Koordinatlarının üçünün birden sıfır olmadığı noktayı belirlerken önce dikdörtgenler prizmasını çizip sonra koordinat eksenlerini çizmek daha kolay bir yoldur.

Örneğin;

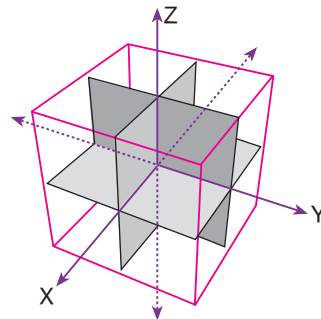
Önce kenar uzunlukları 2 birim, 5 birim, 4 birim olan dikdörtgenler prizmasını çizelim.



Şimdi de koordinat eksenlerini çizelim.



- Uzayın analitik modeli incelendiğinde uzayda sekiz farklı bölge olduğu görülür.



Uzayda İki Vektörün Öklid İç Çarpımı (Skaler Çarpım)

XYZ dik koordinat sisteminde,

$\vec{A} = (a, b, c)$ ve $\vec{B} = (d, e, f)$ vektörleri için,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f$$

ifadesine uzayda **Öklid iç çarpımı** denir.

$\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ ve $\forall k \in \mathbb{R}$ için,

1. $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle$ (Simetri özelliği)

2. $\langle k \cdot \vec{A} + \vec{B}, \vec{C} \rangle = k \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle$
(1. yere göre lineerlik)

$\langle \vec{A}, \vec{B} + k\vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + k \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle$
(2. yere göre lineerlik)

3. $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle > 0, \vec{A} \neq 0$

$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{A} = 0$ (Pozitif tanımlılık özelliği)

➤ Uzayda iki vektörün iç çarpımı bir reel (skaler) sayıdır.

➤ Öklid iç çarpımı ile birlikte $\mathbb{R}^3$ e Öklid uzayı denir.

ÖRNEK - 1

Uzayda, $\vec{A} = (1, -2, 3)$ ve $\vec{B} = (3, 4, -5)$ veriliyor.

$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ Öklid iç çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM :

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + 3(-5)$$

$$= 3 - 8 - 15 = -20 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

Uzayda, $\vec{A} = (3, -1, 4)$ ve $\vec{B} = (k, k+1, 2)$ veriliyor.

$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 15$ olduğuna göre, k değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 15 \text{ ise iç çarpım tanımından,}$$

$$3 \cdot k - 1(k+1) + 4 \cdot 2 = 15 \text{ yazılabilir.}$$

$$3k - k - 1 + 8 = 15$$

$$2k = 8 \Rightarrow k = 4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

Uzayda, $\vec{A} = \left(\frac{3}{2}, -2, 4\right)$ ve $\vec{B} = (6, 1, -2)$ veriliyor.

$\langle 2\vec{A}, \vec{B} \rangle$ iç çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM :

$$\langle 2\vec{A}, \vec{B} \rangle = 2 \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$$

$$2 \left(\frac{3}{2} \cdot 6 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \right)$$

$$2(9 - 2 - 8) = -2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 4

Uzayda $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 6$ olduğuna göre, $\langle 3\vec{A}, 4\vec{B} \rangle$ iç çarpımını bulalım.

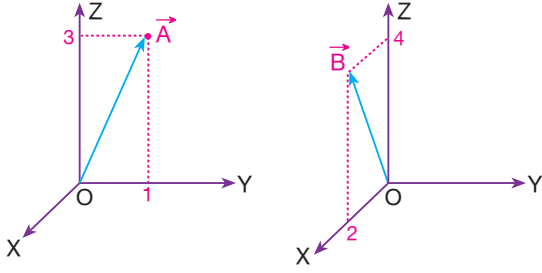
ÇÖZÜM :

$$\langle 3\vec{A}, 4\vec{B} \rangle = 3 \cdot 4 \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$$

$$= 12 \cdot 6 = 72 \text{ bulunur.}$$



ÖRNEK - 5



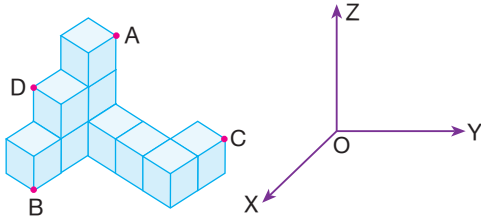
Uzayda yukarıda verilen $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ için $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ iç çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM :

$\vec{A} = (0, 1, 3)$ ve $\vec{B} = (2, 0, 4)$ olup

$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$ bulunur.

ÖRNEK - 6



Yukarıdaki birim küplerden yapılmış yapıda $\vec{AB}$ ve $\vec{DC}$ nin konum vektörlerini bulalım.

ÇÖZÜM :

A dan B ye x ekseninde pozitif yönde 3 birim, y ekseninde 0 birim, z ekseninde negatif yönde 3 birim öteleme yapılmıştır.

O halde, $\vec{AB} = (3, 0, -3)$ bulunur.

D den C ye x ekseninde negatif yönde 3 birim, y ekseninde pozitif yönde 5 birim, z ekseninde negatif yönde 1 birim öteleme yapılmıştır.

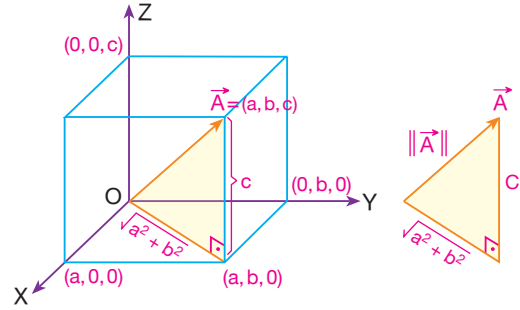
O halde, $\vec{DC} = (-3, 5, -1)$

Uzayda Bir Vektörün Uzunluğu

Uzayda $\vec{A} = (a, b, c)$ vektörünün uzunluğu

$\|\vec{A}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ şeklinde gösterilir.

İrdeleme :



Taralı dik üçgende Pisagor teoremi ile,

$$\|\vec{A}\|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2 \text{ ise}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ bulunur.}$$

Uzayda iç çarpım yardımı ile bir vektörün uzunluğu hesaplanabilir.

$\vec{A} = (a, b, c)$ verilsin.

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = a^2 + b^2 + c^2 \text{ olup}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ bulunur.}$$

O halde, $\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle}$ yazılabilir.

ÖRNEK - 1

Uzayda $\vec{A} = (3, 4, 12)$ vektörünün uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

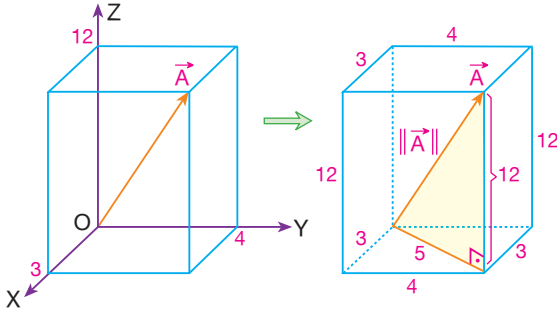
$$1. \text{ Yol: } \|\vec{A}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13 \text{ br bulunur.}$$

$$2. \text{ Yol: } \|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} \text{ olup}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 12 \cdot 12}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{169} \Rightarrow \|\vec{A}\| = 13 \text{ birim bulunur.}$$

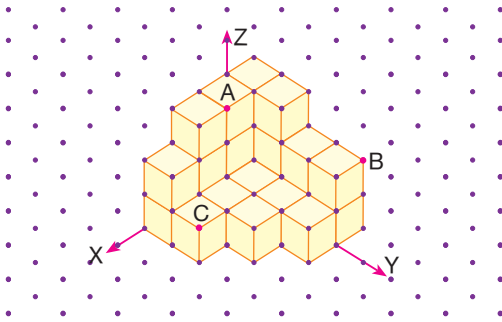
3. Yol : $\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle}$ olup



Taralı dik üçgende Pisagor teoremi ile,

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ birim bulunur.}$$

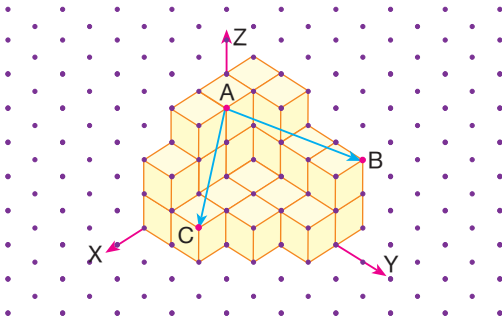
ÖRNEK - 2



Analitik uzayda izometrik çizimi yapılan ve birim yapı-
lardan oluşmuş yapıda A, B, C noktaları işaretlenmiştir.

Buna göre, $\langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle$ iç çarpımını hesaplayalım.

ÇÖZÜM :



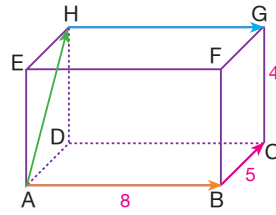
$$\vec{AC} \text{ nün konum vektörü } \vec{AC} = (2, 1, -2)$$

$$\vec{AB} \text{ nün konum vektörü } \vec{AB} = (-2, 3, -1) \text{ olup}$$

$$\langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle = 2(-2) + 1(3) + (-2) \cdot (-1)$$

$$= -4 + 3 + 2 = 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3



$$|\vec{AB}| = 8 \text{ birim}$$

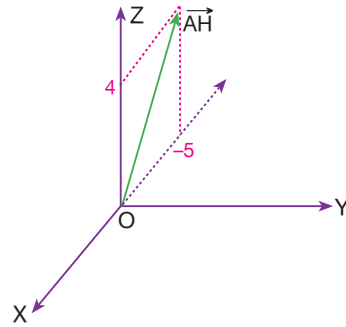
$$|\vec{BC}| = 5 \text{ birim}$$

$$|\vec{CG}| = 4 \text{ birim}$$

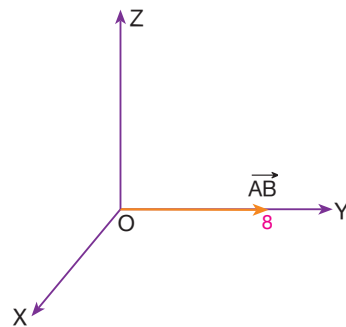
Yukarıdaki dikdörtgenler prizmasında $\langle \vec{AH}, \vec{HG} \rangle$ iç çarpımını hesaplayalım.

ÇÖZÜM :

$$\vec{AH} \text{ nün konum vektörü } \vec{AH} = (-5, 0, 4)$$

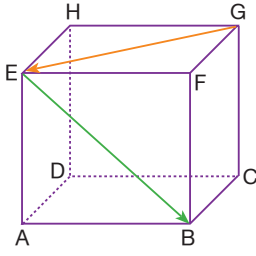


$$\vec{HG} \text{ nün konum vektörü } \vec{HG} = (0, 8, 0)$$



$$\langle \vec{AH}, \vec{HG} \rangle = -5 \cdot 0 + 0 \cdot 8 + 4 \cdot 0 = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 4

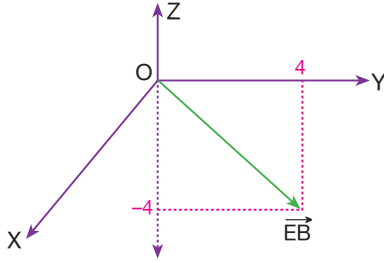


Yandaki şekilde bir kenar uzunluğu 4 birim olan küp verilmiştir.

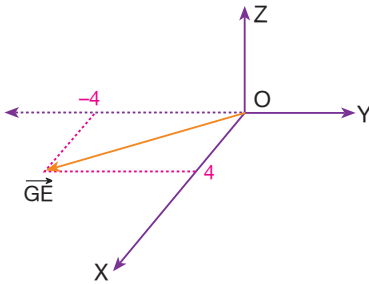
Buna göre, $\langle \vec{GE}, \vec{EB} \rangle$ skaler (iç) çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM

$\vec{EB}$ nün konum vektörü $\vec{EB} = (0, 4, -4)$

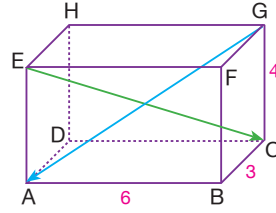


$\vec{GE}$ nün konum vektörü $\vec{GE} = (4, -4, 0)$ olup



$\langle \vec{GE}, \vec{EB} \rangle = 0 \cdot 4 + 4(-4) + (-4) \cdot 0 = -16$ bulunur.

ÖRNEK - 5

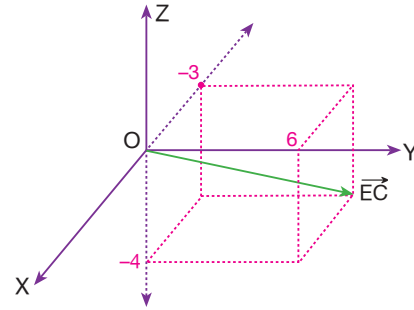


$|\vec{AB}| = 6$ birim
 $|\vec{BC}| = 3$ birim
 $|\vec{CG}| = 4$ birim

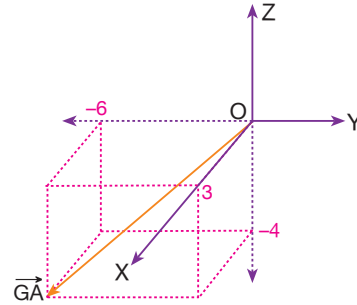
Buna göre, $\langle \vec{EC}, \vec{GA} \rangle$ Öklid (iç) çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM

$\vec{EC}$ nün konum vektörü $\vec{EC} = (-3, 6, -4)$



$\vec{GA}$ nün konum vektörü $\vec{GA} = (3, -6, -4)$



$\langle \vec{EC}, \vec{GA} \rangle = (-3) \cdot 3 + 6(-6) + (-4) \cdot (-4)$

$= -9 - 36 + 16 = -29$ bulunur.



Uzayda İki Nokta Arası Uzaklık

Uzayda A(a, b, c) ve B(d, e, f) noktaları arasındaki uzaklık,

$$|AB| = d(A, B) = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2} \text{ ile}$$

YA DA

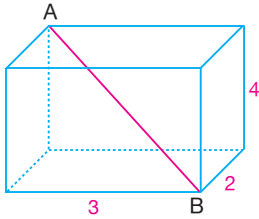
$$d(A, B) = \sqrt{\langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle} \text{ ile hesaplanabilir.}$$

✓ Pratik Bilgi

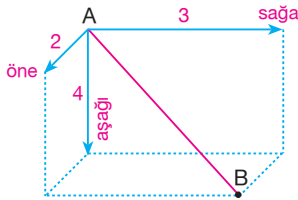
Uzayda A ve B noktaları arasındaki uzaklığı bulmak için A noktasından B noktasına giderken yapılan ötelemelerin bileşkesinden faydalanabiliriz.

👉 Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Örneğin :



Yukarıdaki dikdörtgenler prizmasında A noktasından B noktasına giderken,



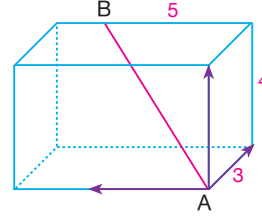
3 birim sağa, 4 birim aşağıya, 2 birim öne doğru gelinmiştir.

O halde, B noktası uzayın sağ ön ve alt bölgesindedir.

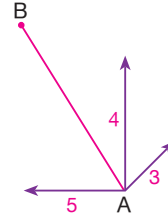
Böylece, $\vec{AB} = (2, 3, -4)$ olup

$$\|\vec{AB}\| = |AB| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{29} \text{ birim bulunur.}$$

Örneğin :



Yukarıdaki dikdörtgenler prizmasında A noktasından B noktasına giderken,



5 birim sola, 4 birim yukarıya, 3 birim arkaya gidilmiştir.

O halde, B noktası uzayın sol arka üst bölgesindedir.

Böylece $\vec{AB} = (-3, -5, 4)$ olup

$$\|\vec{AB}\| = |AB| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + 4^2} = 5\sqrt{2} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 1

Uzayda A(6, 3, 1) ve B(3, -1, -11) noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayalım.

ÇÖZÜM 📎 :

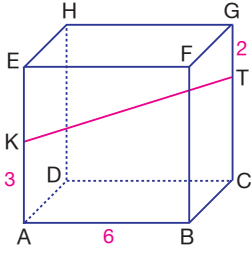
1. Yol :

$$|AB| = d(A, B) = \sqrt{(6-3)^2 + (3-(-1))^2 + (1-(-11))^2} \\ = \sqrt{9 + 16 + 144} \Rightarrow \sqrt{169} = 13 \text{ birim bulunur.}$$

2. Yol :

$$\vec{AB} = B - A = (3-6, -1-3, -11-1) \\ = (-3, -4, -12) \text{ olup} \\ |AB| = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle} \\ = \sqrt{(-3) \cdot (-3) + (-4) \cdot (-4) + (-12) \cdot (-12)} \\ = 13 \text{ birim bulunur.}$$

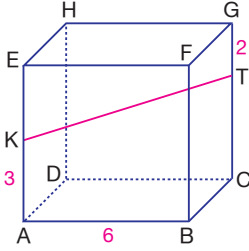
ÖRNEK - 2



Şekildeki küpte
 $|AB| = 6$ birim
 $|AK| = 3$ birim
 $|GT| = 2$ birim

Yukarıda verilenlere göre, $|KT|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

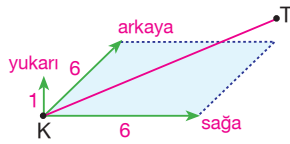


K noktasından T noktasına giderken,

6 birim sağa

1 birim yukarıya

6 birim arkaya öteleme yapılmıştır.



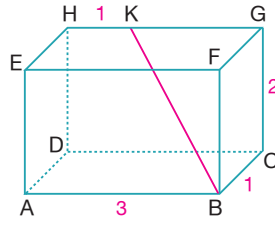
O halde,

K noktası uzayın sağ arka üst bölgesindedir.

Böylece, $\vec{AB} = (-6, 6, 1)$ olup

$\|\vec{KT}\| = |KT| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{73}$ br bulunur.

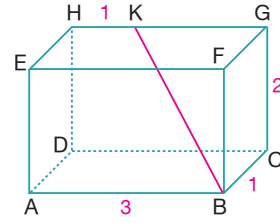
ÖRNEK - 3



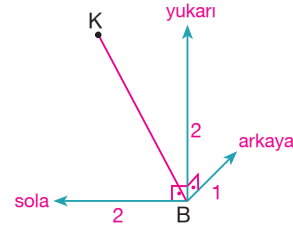
Şekildeki dik dikiörtgenler prizmasında
 $|AB| = 3$ birim
 $|BC| = 1$ birim
 $|HK| = 1$ birim
 $|CG| = 2$ birim

Yukarıda verilenlere göre, $|BK|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :



B noktasından K noktasına giderken,



2 birim sola

2 birim yukarıya

1 birim arkaya öteleme yapılmıştır.

O halde, K noktası uzayın sol arka üst bölgesindedir.

Böylece, $\vec{BK} = (-1, 2, 2)$ olup

$\|\vec{BK}\| = |BK| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$ birim

bulunur.



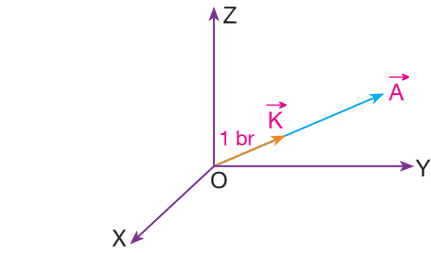
Uzayda Bir Vektörü Birimleştirmek

Uzayda her $\vec{A} \neq 0$ vektörü $\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ biçiminde birimleştirilebilir.

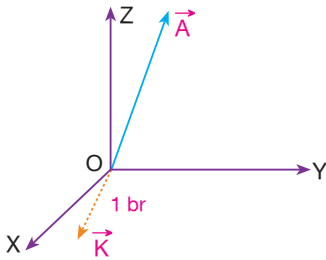
$\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ ifadesine $\vec{A}$ yönündeki birim vektör denir.

$-\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ ifadesine $\vec{A}$ ile zıt yönde birim vektör denir.

✓ Pratik Bilgi



$\vec{K} : \vec{A}$ yönündeki birim vektör.



$\vec{K} : \vec{A}$ ile zıt yönlü birim vektör.

ÖRNEK - 1

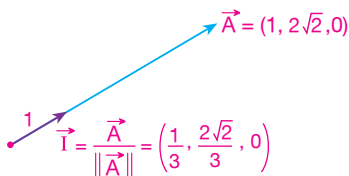
$\vec{A} = (1, 2\sqrt{2}, 0)$ vektörü yönündeki birim vektörü bulalım.

ÇÖZÜM

$$\vec{A} = (1, 2\sqrt{2}, 0) \Rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{1 + 8 + 0} = 3 \text{ br olup}$$

$\vec{A}$ yönündeki birim vektör

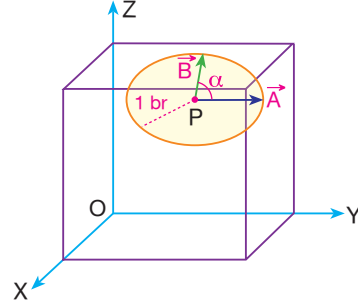
$$\vec{I} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 0 \right) \text{ bulunur.}$$



Uzayda İki Vektör Arasındaki Aç

Uzayda iki vektör arasındaki açı, bu vektörlerin başlangıç noktalarının bir P noktasına taşınması ile oluşan açı olarak tanımlanır.

Merkezi P olan birim çemberin, bu açının kenarları arasında kalan yayının uzunluğuna iki vektör arasındaki **açının ölçüsü** denir.



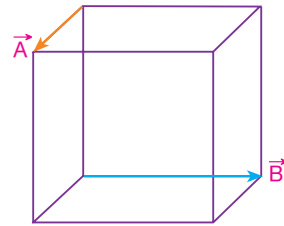
$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü α ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nin iç çarpımı,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \alpha, 0 \leq \alpha < \pi$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle > 0, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle < 0$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 0$$

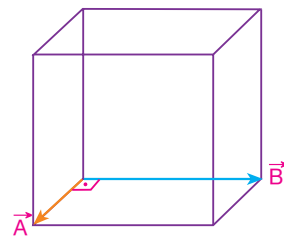
ÖRNEK - 1



Yukarıdaki dikdörtgenler prizmasında $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ arasındaki açıyı bulalım.

ÇÖZÜM

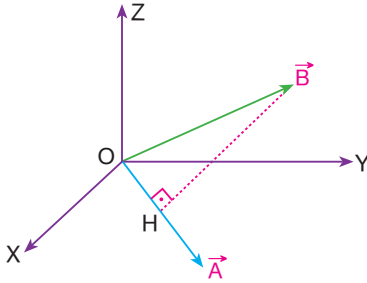
$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nün başlangıç noktalarını aynı noktaya taşıyalım.



Böylece bu vektörler arasındaki açı 90° bulunur.



Uzayda Bir Vektörün Başka Bir Vektör Üzerine Dik İzdüşümü



$\vec{B}$ nün $\vec{A}$ üzerindeki,

- a) Dik izdüşüm vektörünün uzunluğu,

$$\|\vec{OH}\| = \frac{\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle}{\|\vec{A}\|}$$

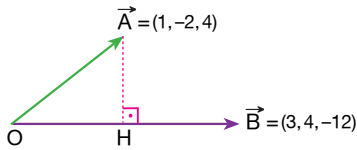
- b) Dik izdüşüm vektörü,

$$\vec{OH} = \frac{\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle}{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} \cdot \vec{A} \text{ şeklindedir.}$$

ÖRNEK - 1

Uzayda $\vec{A} = (1, -2, 4)$ ve $\vec{B} = (3, 4, -12)$ üzerindeki izdüşüm uzunluğunu ve izdüşüm vektörünü bulalım.

ÇÖZÜM :



İzdüşüm uzunluğu,

$$|\vec{OH}| = \frac{\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle}{\|\vec{B}\|} = \frac{|3 - 8 - 48|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2}} = \frac{53}{13} \text{ birim}$$

İzdüşüm vektörü

$$\vec{OH} = \frac{\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle}{\langle \vec{B}, \vec{B} \rangle} \cdot \vec{B} = \frac{53}{9 + 16 + 144} \cdot (3, 4, -12) \text{ olup}$$

$$= \left(\frac{159}{169}, \frac{212}{169}, -\frac{636}{169} \right) \text{ bulunur.}$$

Uzayda İki Vektörün Vektörel (Dış) Çarpımı

Bazen uzayda iki vektör verildiğinde bu iki vektöre dik olan vektöre ihtiyaç duyarız.

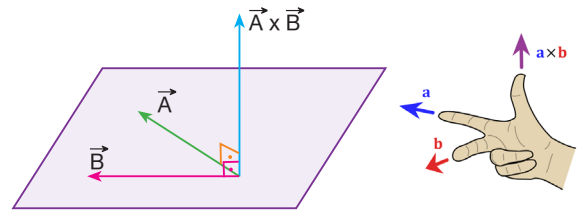
Uzayda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nin vektörel çarpımı $\vec{A} \times \vec{B}$ şeklinde gösterilir.

$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere,

$$\vec{A} \times \vec{B} = (y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2, z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2, x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2)$$

- Sağ el kuralı ile saat yönünün tersi pozitif yön olarak kabul edilir.

- İki vektörün vektörel çarpımı bu iki vektöre de diktir.



NOT :

$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ olsun.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

1. satıra göre determinantı açarsak,

$$(y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1) \vec{e}_1 - (x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1) \vec{e}_2 + (x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2) \vec{e}_3 \\ = (y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1, x_2 \cdot z_1 - x_1 \cdot z_2, x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2) \text{ şeklinde yazılabilir.}$$



ÖRNEK - 1

Uzayda $\vec{A} = (1, 2, 0)$ ve $\vec{B} = (-3, 2, 4)$ veriliyor.

$\vec{A} \times \vec{B}$ vektörel (dış) çarpımını hesaplayalım.

ÇÖZÜM :

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (8 - 0)\vec{e}_1 - (4 - 0)\vec{e}_2 + (2 - (-6))\vec{e}_3 \\ &= 8\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3 \\ &= (8, -4, 8) \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

O halde, $\vec{A} \times \vec{B} = (8, -4, 8)$ vektörü $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerine diktir.

 Karşılaştırma :

- ✓ Uzayda iki vektörün iç çarpımı bir reel sayıdır.
- ✓ Uzayda iki vektörün vektörel (dış) çarpımı bir vektördür.

Vektörel Çarpımın Özellikleri

Her $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ve $k \in \mathbb{R}$ için,

1. $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{A}$ ve $\vec{B}$ lineer bağımlı ya da $\vec{A}$ veya $\vec{B}$ sıfırdır.
2. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
3. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$
4. $(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$
5. $(k \cdot \vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k \cdot \vec{B}) = k \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

ÖRNEK - 2

$\vec{A} = (2, -1, 3)$ ve $\vec{B} \neq \vec{0}$ olmak üzere,

$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ olacak şekilde $\vec{B}$ nü bulalım.

ÇÖZÜM :

$\vec{B} = (a, b, c)$ diyelim.

$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ ise

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -1 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$\vec{e}_1(-c - 3b) - \vec{e}_2(2c - 3a) + \vec{e}_3(2b - (-a)) = (0, 0, 0)$$

$$-c - 3b = 0, \quad 2c - 3a = 0, \quad 2b + a = 0$$

$$c = -3b, \quad 2c = 3a, \quad a = -2b$$

$b = k$ dersek

$a = -2k$ ve $c = -3k$ olup

$\vec{B} = (-2k, k, -3k)$ bulunur ki bu vektörde,

$\vec{A}$ ile lineer bağımlıdır.

✓ Pratik Bilgi

Bir determinantta bir satır diğer satırın bir reel katı ya da bir sütun diğer sütunun bir reel katı ise determinanın değeri sıfırdır.

$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ ise ya $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ lineer bağımlı ya da $\vec{A} = \vec{0}$ veya $\vec{B} = \vec{0}$ dir.

ÖRNEK - 3

Uzayda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ için,

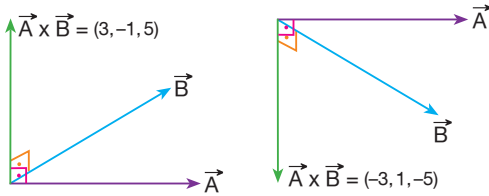
$$\vec{A} \times \vec{B} = (3, -1, 5)$$

olduğuna göre, $\vec{B} \times \vec{A}$ vektörünü bulalım.

ÇÖZÜM :

$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ olduğundan,

$\vec{B} \times \vec{A} = (-3, 1, -5)$ bulunur.



ÖRNEK - 4

Uzayda,

$$\vec{A} = (-3, 2, 7)$$

$$\vec{B} = (3, -2, -7)$$

olduğuna göre, $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörel çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM :

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ lineer bağımlı olduğundan,

$\vec{A} \times \vec{B} = 0$ dır.

ÖRNEK - 5

Uzayda,

$$\vec{A} = (4, 7, -2)$$

$$\vec{B} = (-1, 5, 3)$$

$$\vec{C} = (6, 24, 2)$$

vektörlerine $(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C}$ dış çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM :

$$\vec{A} + \vec{B} = (4, 7, -2) + (-1, 5, 3)$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (3, 12, 1) \text{ olup}$$

$\vec{A} + \vec{B}$ ile $\vec{C}$ lineer bağımlıdır.

O halde, $(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = 0$ bulunur.

ÖRNEK - 6

Uzayda,

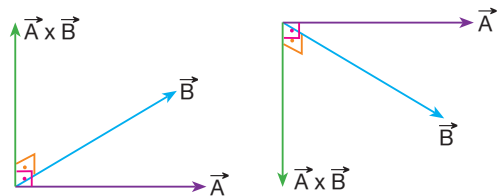
$$\vec{A} = (-2, 0, 5)$$

$$\vec{B} = (1, 2, 4)$$

vektörlerine dik olan vektörleri bulalım.

ÇÖZÜM :

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ne dik olan vektör $\vec{A} \times \vec{B}$ ya da $\vec{B} \times \vec{A}$ dır.

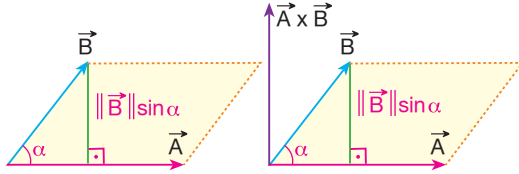


O halde,

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-10, 13, -4) \\ \vec{B} \times \vec{A} &= -\vec{A} \times \vec{B} = (10, -13, 4) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$



Uzayda Lineer Bağımsız $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ Üzerine Kurulu Olan Paralelkenarsal Bölgenin Alanı



$$T.A = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin\alpha \text{ ya da } T.A = \|\vec{A} \times \vec{B}\|$$

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin\alpha$$



NOT :

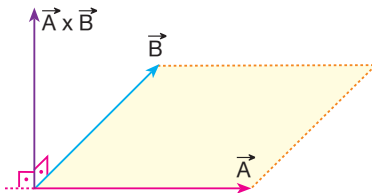
Uzayda iki vektörün vektörel çarpımının uzunluğu bu iki vektörün boyları ile arada kalan açının sinüs değerinin çarpımına eşittir.

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin\alpha$$

ÖRNEK - 1

Uzayda $\vec{A} = (1, 2, -3)$ ve $\vec{B} = (-1, 1, 4)$ vektörleri üzerine kurulu paralelkenarsal bölgenin alanını hesaplayalım.

ÇÖZÜM



Taralı paralelkenarsal bölgenin alanı $\|\vec{A} \times \vec{B}\|$ olup

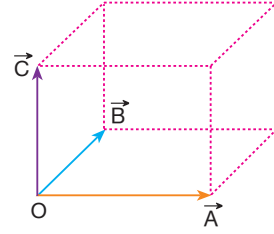
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (1(8+3), -1(4-3), 1(1+2)) = (11, -1, 3)$$

O halde, paralelkenarsal bölgenin alanı,

$$\sqrt{121+1+9} = \sqrt{131} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

Uzayda Lineer Bağımsız $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ Üzerine Kurulu Paralelyüzlünün Hacim Hesabı



Yukarıdaki gibi $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ üzerine kurulu paralelyüzlünün hacmi,

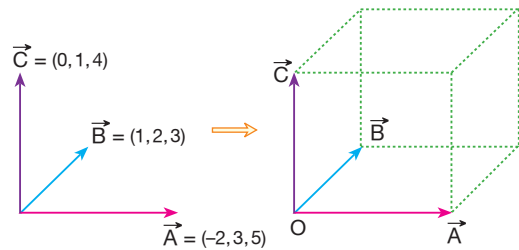
$$|\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})| \text{ ya da } |\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle|$$

ifadelerinden biri ile hesaplanabilir.

ÖRNEK - 1

Uzayda $\vec{A} = (-2, 3, 5)$, $\vec{B} = (1, 2, 3)$ ve $\vec{C} = (0, 1, 4)$ vektörleri üzerine kurulu paralelyüzlünün hacmini hesaplayalım.

ÇÖZÜM



$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -2(8-3) - 3(4-0) + 5(1-0)$$

$$= -10 - 12 - 5 = -27$$

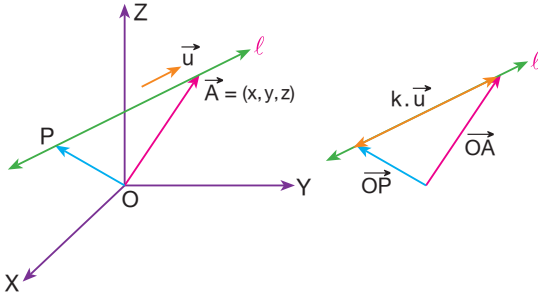
O halde paralelyüzlünün hacmi,

$$|\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})| = |-27| = 27 \text{ br}^3 \text{ bulunur.}$$

UZAYDA DOĞRU VE DÜZLEM DENKLEMLERİ

Uzayda Doğru :

Uzayda bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $\vec{u} = (p, q, r)$ olan doğrunun vektörel denklemi,



ℓ doğrusunun vektörel denklemi,

$$\vec{OA} = \vec{OP} + k \cdot \vec{u}$$

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (kp, kq, kr)$ eşitliğinden,

$$\left. \begin{array}{l} x = x_0 + kp \\ y = y_0 + kq \\ z = z_0 + kr \end{array} \right\} \text{parametrik denklemi elde edilir.}$$

$x - x_0 = kp, y - y_0 = kq, z - z_0 = kr$

k lerin eşitlenmesi ile,

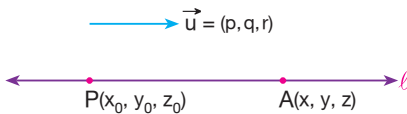
$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} = k$$

kapalı denklemi elde edilir.

2. Yol :

Uzayda bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $\vec{u} = (p, q, r)$ olan doğrunun denklemleri aşağıdaki gibi de bulunabilir.

Doğru üzerinde bir nokta $A(x, y, z)$ olsun.



$\vec{PA} \parallel \vec{u}$ olup $\vec{PA}$ ile $\vec{u}$ lineer bağımlıdır.

O halde, $\vec{PA} = k \cdot \vec{u}$ yazılabilir.

Böylece, $\vec{PA} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$k \cdot \vec{u} = (kp, kq, kr)$ denklemleri ile,

$\vec{PA} = k \cdot \vec{u}$ olup $x - x_0 = kp, y - y_0 = kq, z - z_0 = kr$

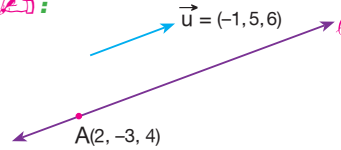
k lerin eşitlenmesi ile,

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} = k \text{ elde edilir.}$$

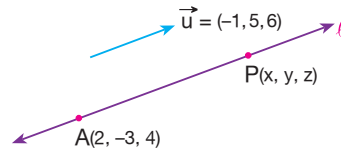
ÖRNEK - 1

Uzayda $A(2, -3, 4)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (-1, 5, 6)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel, parametrik ve kapalı denklemlerini bulalım.

ÇÖZÜM



taslak çizimi yukarıdaki gibi olan doğru üzerinde değişken bir $P(x, y, z)$ noktası alalım.



$\vec{AP} \parallel \vec{u}$ olup

$\vec{AP} = k \cdot \vec{u}$ vektörel denklemi yazılabilir.

$(x - 2, y + 3, z - 4) = (-k, 5k, 6k)$ eşitliğinden

$x - 2 = -k, y + 3 = 5k, z - 4 = 6k$

$$\left. \begin{array}{l} x = -k + 2 \\ y = 5k - 3 \\ z = 6k + 4 \end{array} \right\} \text{Parametrik denklem}$$

Parametrik denklemde k lerin eşitlenmesi ile

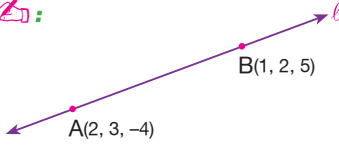
$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 3}{5} = \frac{z - 4}{6}$$

kapalı denklemi elde edilir.

ÖRNEK - 2

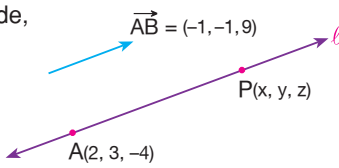
Uzayda $A(2, 3, -4)$ ve $B(1, 2, 5)$ noktalarından geçen doğrunun vektörel, parametrik ve kapalı denklemlerini bulalım.

ÇÖZÜM  :



$\vec{AB} = (-1, -1, 9)$ vektörü l doğrusunun bir doğrultmanı (doğrultman vektörü) olarak alınabilir.

O halde,



$\vec{AP} \parallel \vec{AB}$ olup $\vec{AP} = k \cdot \vec{AB}$ eşitliğinden,

$$\begin{cases} x - 2 = -k \\ y - 3 = -k \\ z + 4 = 9k \end{cases} \text{ Parametrik denklem}$$

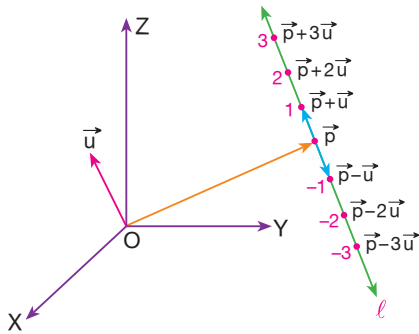
Parametrik denklemde k lerin eşitlenmesi ile

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{9} \text{ kapalı denklemi bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

Uzayda herhangi bir doğru üzerindeki noktaların konumlarını yer vektörleri ve parametre değerlerine göre gösterelim.

ÇÖZÜM  :

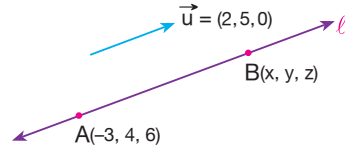


$\vec{u}$: l doğrusunun doğrultman vektörüdür.

ÖRNEK - 4

Uzayda $A(-3, 4, 6)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (2, 5, 0)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM  :



$\vec{AB} \parallel \vec{u}$ olup

Vektörel denklemi $\vec{AB} = k \cdot \vec{u}$ yazılabilir.

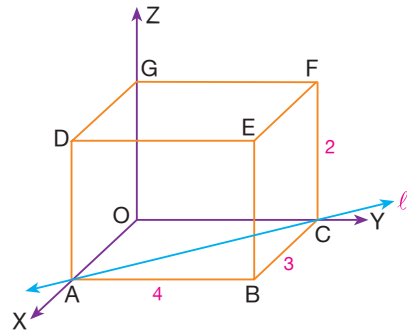
$$(x + 3, y - 4, z - 6) = (2k, 5k, 0)$$

$$\begin{cases} x + 3 = 2k \\ y - 4 = 5k \\ z - 6 = 0 \end{cases} \text{ Parametrik denklem}$$

Parametrik denklemde k lerin eşitlenmesi ile

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{5}, z = 6 \text{ kapalı denklemi bulunur.}$$

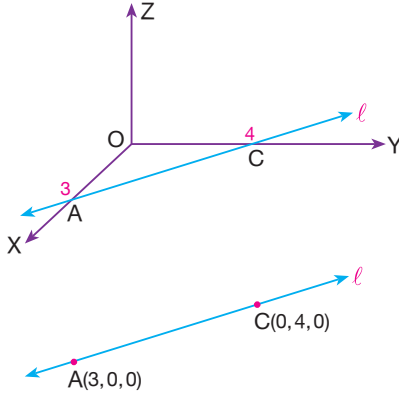
ÖRNEK - 5



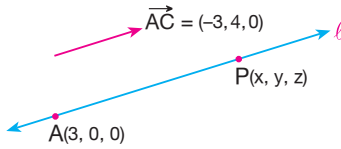
Yukarıda ayrıtları 2 birim, 3 birim, 4 birim olan dikdörtgenler prizması şeklindeki kutunun bir köşesini dik koordinat sisteminin başlangıcı kabul edersek AC doğrusunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

$A(3, 0, 0)$ ve $C(0, 4, 0)$ olup



$\vec{AC} = (-3, 4, 0)$ vektörü l doğrusunun doğrultu vektörü olup



$\vec{AP} \parallel \vec{AC}$ olup $\vec{AP} = k \cdot \vec{AC}$ eşitliğinden,

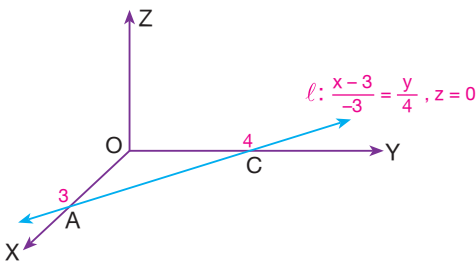
$$(x - 3, y, z) = (-3k, 4k, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 3 = -3k \\ y = 4k \\ z = 0 \end{array} \right\} \text{Parametrik denklem}$$

Parametrik denklemde k lerin eşitlenmesi ile

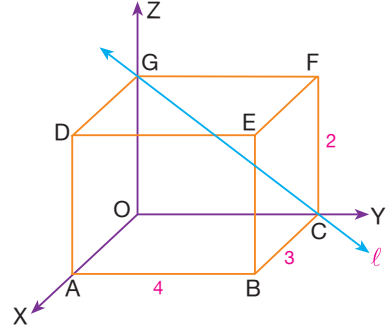
$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{4}, z = 0 \text{ kapalı denklemi bulunur.}$$

O halde,



Dikkat edilirse X ve Y eksenlerini kesen doğru denkleminde $z = 0$ olur.

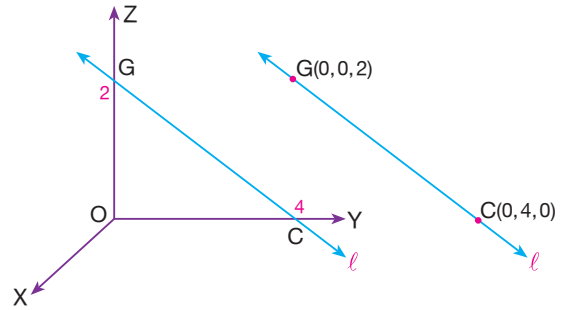
ÖRNEK - 6



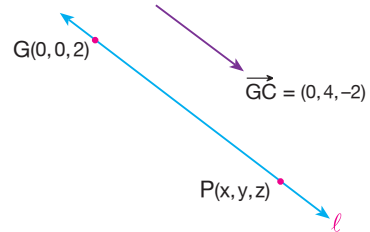
Yukarıda ayrıtları 2 birim, 3 birim, 4 birim olan dikdörtgenler prizması şeklindeki kutunun bir köşesini dik koordinat sisteminin başlangıcı kabul edersek GC doğrusunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

$G(0, 0, 2)$ ve $C(0, 4, 0)$ olup



$\vec{GC} = (0, 4, -2)$ vektörü l doğrusunun doğrultu vektörü olup



$\vec{GP} \parallel \vec{GC}$ olup

$\vec{GP} = k \cdot \vec{GC}$ eşitliğinden,

$$(x, y, z - 2) = (0, 4k, -2k)$$

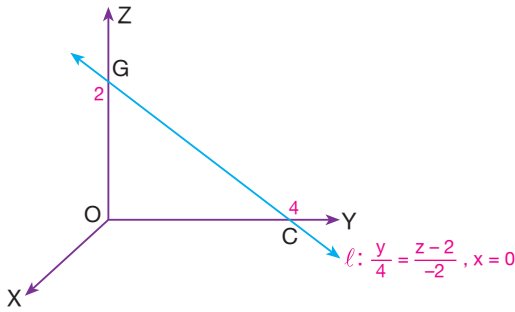


$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 4k \\ z - 2 = -2k \end{array} \right\} \text{Parametrik denklem}$$

Parametrik denklemde k lerin eşitlenmesi ile

$$\frac{y}{4} = \frac{z-2}{-2}, x = 0 \text{ kapalı denklemi bulunur.}$$

O halde,

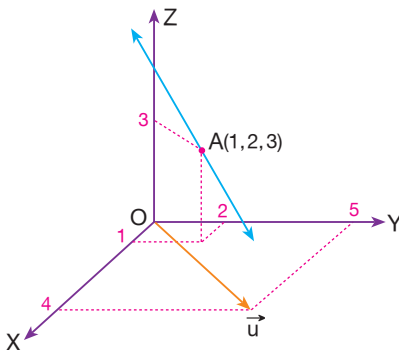


Dikkat edilirse Y ve Z eksenini kesen doğru denklemlerinde $x = 0$ oluyor.

ÖRNEK - 7

Uzayda $A(1, 2, 3)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (4, 5, 0)$ ne paralel olan doğruyu dik koordinat sisteminde gösterelim.

ÇÖZÜM



Uzayda İki Doğrunun Birbirine Göre Konumu

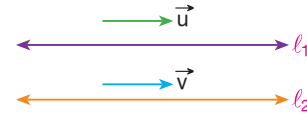
Uzayda doğrultman vektörleri,

$$\vec{u} = (p, q, r) \text{ ve } \vec{v} = (p', q', r') \text{ olan}$$

$$l_1: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} \text{ ve}$$

$$l_2: \frac{x-x'_0}{p'} = \frac{y-y'_0}{q'} = \frac{z-z'_0}{r'} \text{ doğruları verilsin.}$$

- $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ lineer bağımlı ise doğrular paralel ya da çakışır.

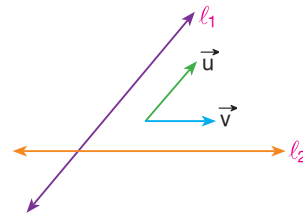


YA DA



Bu durumda $\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}$ yazılabilir.

- $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ lineer bağımsız ise doğrular kesişir.





ÖRNEK - 1

$$\ell_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{-2}$$

$$\ell_2 : \frac{x}{a} = \frac{y+1}{2} = \frac{1-z}{-2}$$

doğrularının birbirine dik durumlu olması için m nin değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

$$\ell_1 \text{ doğrusunun doğrultmanı } \vec{v}_1 = (3, 4, -2)$$

$$\ell_2 \text{ doğrusunun doğrultmanı } \vec{v}_2 = (a, 2, -2)$$

$$\ell_1 \perp \ell_2 \Rightarrow \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$3a + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) = 0$$

$$3a + 8 + 4 = 0 \Rightarrow a = -4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

$$\ell_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

$$\ell_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{m}$$

doğruları arasındaki açı 60° olduğuna göre, m nin alabileceği değerler toplamını bulalım.

ÇÖZÜM :

Verilen doğruların doğrultman vektörleri,

$$\vec{v}_1 = (2, -1, 1) \text{ ve } \vec{v}_2 = (3, 1, m) \text{ dir.}$$

İki doğru arasındaki açı ile doğrultmanları arasındaki açı aynı olduğundan,

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \cos \alpha$$

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot m = 5 + m$$

$$5 + m = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + m^2} \cdot \cos 60^\circ$$

$$5 + m = \sqrt{6} \cdot \sqrt{10 + m^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$10 + 2m = \sqrt{60 + 6m^2}$$

$$100 + 40m + 4m^2 = 60 + 6m^2$$

$$2m^2 - 40m - 40 = 0$$

$$m^2 - 20m - 20 = 0 \Rightarrow m_1 + m_2 = 20 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1}$$

doğrusunun $6x + ay - 3z + 7 = 0$ düzlemine paralel olması için a nın değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

Doğrunun doğrultmanlarından biri, $\vec{v} = (2, -3, -1)$ ve düzlemin normalerinden biri de $\vec{N} = (6, a, -3)$ dir.

Doğru düzleme paralel ise $\vec{v} \perp \vec{N}$ olur.

$$\text{O halde, } \langle \vec{v}, \vec{N} \rangle = 0$$

$$2 \cdot 6 + (-3) \cdot a + (-1) \cdot (-3) = 0$$

$$12 - 3a + 3 = 0$$

$$3a = 15 \Rightarrow a = 5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 4

$A(3, -1, 2)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (2, 1, -3)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

Düzlemin içinde bir nokta $P(x, y, z)$ olsun.

$$\vec{AP} \perp \vec{N} \text{ olur.}$$

$$\vec{AP} = P - A = (x - 3, y + 1, z - 2)$$

$$\langle \vec{AP}, \vec{N} \rangle = 0 \text{ olup}$$

$$2 \cdot (x - 3) + 1 \cdot (y + 1) + (-3) \cdot (z - 2) = 0$$

$$2x - 6 + y + 1 - 3z + 6 = 0$$

$$2x + y - 3z + 1 = 0 \text{ bulunur.}$$



ÖRNEK - 5

$P(4, -2, 3)$ noktasından geçen ve $\vec{v} = (3, -2, -1)$ ne paralel olan doğrunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

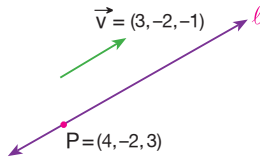
Doğru üzerinde bir $T(x, y, z)$ noktası alalım.

$\vec{v}$ doğruya paralel olduğundan,

$\overrightarrow{PT} // \vec{v}$ olur.

$$\overrightarrow{PT} = T - P = (x - 4, y + 2, z - 3)$$

$$\overrightarrow{PT} // \vec{v} \Rightarrow \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{-1} \text{ bulunur.}$$

$$\ell: \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{-1}$$


ÖRNEK - 6

$A(4, -3, 2)$ noktasından geçen, $\vec{v} = (a, -1, -3)$ nü doğrultman vektörü kabul eden ve Ox eksenine dik olan doğrunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

Doğrunun Ox eksenine dik olabilmesi için doğrultman vektörünün birinci bileşeni yani $a = 0$ olmalıdır.

O halde doğru denklemi,

$$x - 4 = 0, \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{-3} \text{ olur.}$$

ÖRNEK - 7

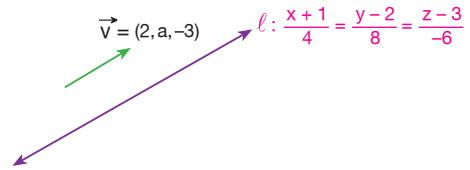
$\vec{v} = (2, a, -3)$ nün,

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{-6}$$

doğrusuna paralel olması için a nın değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

Bir vektörün bir doğruya paralel olması demek o doğrunun doğrultman vektörüne paralel olması demektir.

$$\vec{v} = (2, a, -3) \quad \ell: \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{-6}$$


Doğrunun doğrultmanı $\vec{u} = (4, 8, -6)$ olduğundan,

$$\vec{v} // \vec{u} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{a}{8} = \frac{-3}{-6} \text{ eşitliğinden}$$

$a = 4$ bulunur.

ÖRNEK - 8

Uzayda $A(2, 1, 2)$ ve $B(3, 0, -1)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 2, 0 - 1, -1 - 2) = (1, -1, -3) \text{ olur.}$$

Bu durumda A noktasından geçen ve

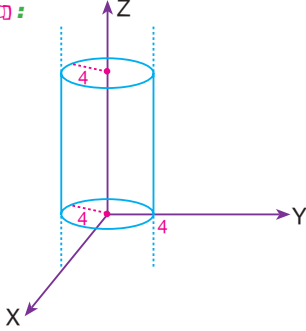
$\overrightarrow{AB}$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemi,

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 9

Uzayda Z eksenine 4 birim uzaklıktaki noktaların koordinatlarını (geometrik yerini) bulalım.

ÇÖZÜM :

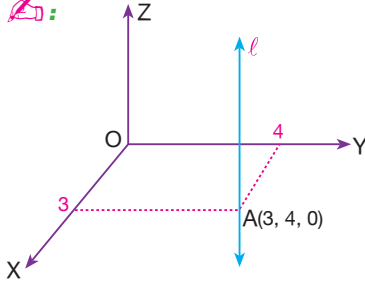


Z eksenine 4 birim uzaklıktaki noktalar kümesi yarıçapı 4 birim olan bir silindirik yüzeydir.

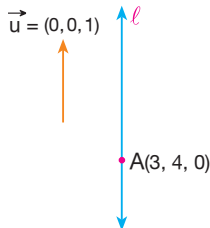
ÖRNEK - 10

$A(3, 4, 0)$ noktasından geçen ve Z eksenine paralel olan doğrunun grafini çizip denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :



ℓ doğrusu Z eksenine paralel olduğundan doğrultman vektörü $\vec{u} = (0, 0, 1)$ alınabilir.

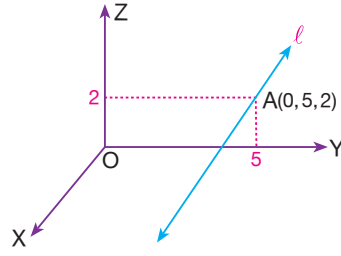


O halde, ℓ doğrusunun denklemi,

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y-4}{0} = \frac{z}{1} = k \text{ ya da}$$

$x = 3, y = 4, z = k$ bulunur.

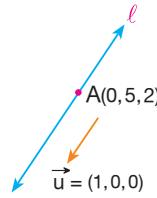
ÖRNEK - 11



Yukarıda $A(0, 5, 2)$ noktasından geçen ve x eksenine paralel olan ℓ doğrusunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

ℓ doğrusu x eksenine paralel olduğundan doğrultman vektörü $\vec{u} = (1, 0, 0)$ alınabilir.

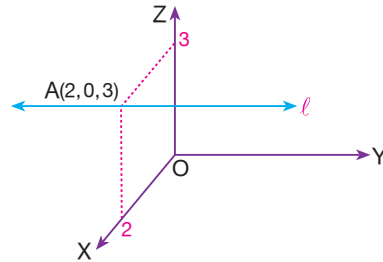


O halde, ℓ doğrusunun denklemi,

$$\frac{x}{1} = \frac{y-5}{0} = \frac{z-2}{0} = k \text{ ya da}$$

$x = k, y = 5, z = 2$ bulunur.

ÖRNEK - 12



Yukarıda $A(2, 0, 3)$ noktasından geçen ve y eksenine paralel olan ℓ doğrusunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

ℓ doğrusu y eksenine paralel olduğundan bir doğrultman vektörü $\vec{u} = (0, 1, 0)$ alınabilir.



O halde, ℓ doğrusunun denklemi,

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{0} = k \text{ ya da}$$

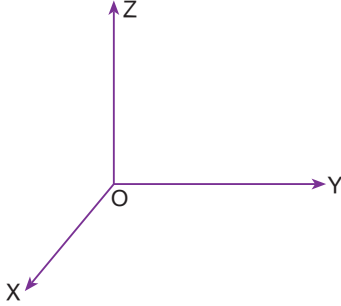
$x = 2, y = k, z = 3$ bulunur.



UZAYDA BİR DÜZLEMİN PARAMETRİK VE KAPALI DENKLEMİ

1. adım :

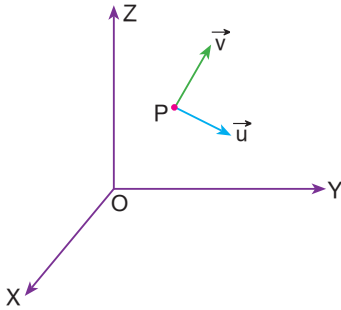
Uzayda koordinat sistemi seçilir.



2. adım :

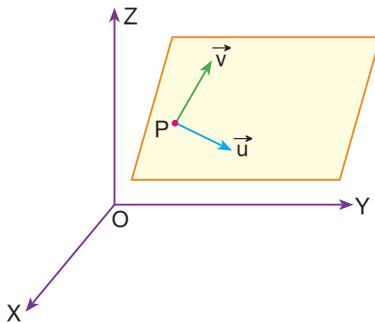
Uzayda bir P noktası belirlenir.

P noktasına lineer bağımsız iki $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ taşınır.



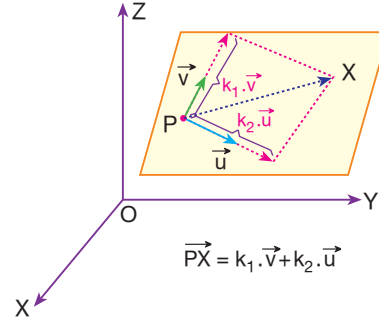
3. adım :

P, $\vec{u}$, $\vec{v}$ nün belirlediği düzlem modeli çizilir.



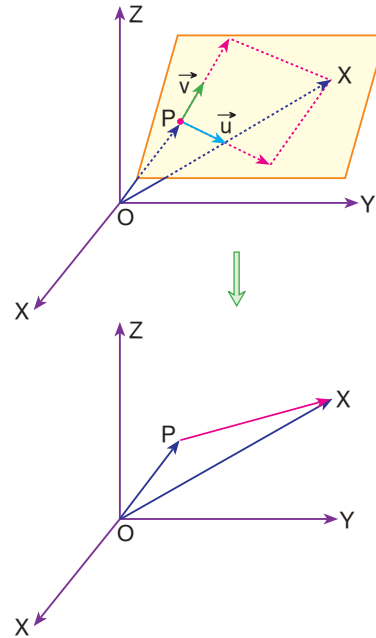
4. adım :

Bu düzlem modeli üzerinde keyfi bir x noktası seçilir ve $\vec{PX}$ nün $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ cinsinden eşiti yazılır.



5. adım :

$\vec{OP}$, $\vec{OX}$ ve $\vec{PX}$ arasındaki bağıntı yazılır.



$$\vec{OP} + \vec{PX} = \vec{OX} \text{ olup}$$

düzlemin parametrik denklemi,

$$\vec{OX} = \vec{OP} + k_1 \cdot \vec{v} + k_2 \cdot \vec{u} \text{ dir.}$$

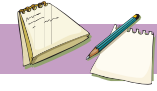
6. adım :

$\vec{u}$ ile $\vec{v}$ nün vektörel çarpımının $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ ne dik olduğunu hatırlayalım.

$$\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \quad \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$$

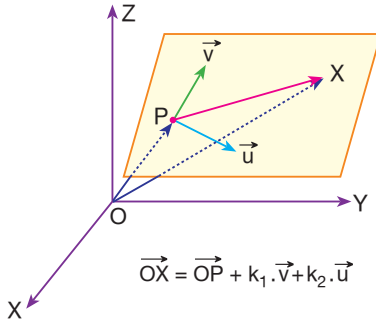
O halde, $\overrightarrow{PX}$ de $\vec{u} \times \vec{v}$ ne diktir. ($\overrightarrow{PX} \perp \vec{u} \times \vec{v}$)

Böylece, $\langle \overrightarrow{PX}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$ düzlemin kapalı vektörel denklemdir.



ÖZET

Uzayda bir P noktasından geçen ve lineer bağımsız $\vec{u}, \vec{v}$ ne paralel olan düzlemin parametrik denklemi, X düzlem üzerinde değişken bir nokta olmak üzere,



- ✓ k_1, k_2 birer reel sayı
- ✓ $\vec{u}, \vec{v}$ düzlemin birer doğrultu vektörleri
- ✓ Bir düzlemin doğrultu vektörlerine dik olan vektöre düzlemin normal vektörü denir ve $\vec{N}$ ile gösterilir.

$$\vec{N} \perp \vec{u}, \vec{N} \perp \vec{v} \text{ yani } \vec{N} // \vec{u} \times \vec{v}$$

$$(\vec{N} = \vec{u} \times \vec{v} \text{ alınabilir.})$$

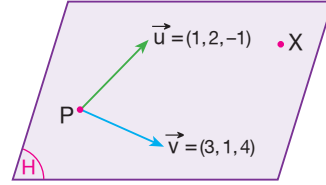
- ✓ Uzayda P noktasından geçen ve normali $\vec{N}$ olan düzlemin kapalı denklemi $\langle \overrightarrow{PX}, \vec{N} \rangle = 0$ şeklindedir.
- ✓ Düzlemin $\vec{X} = P + k_1 \cdot \vec{u} + k_2 \cdot \vec{v}$ parametrik denkleminde $\vec{N} = \vec{u} \times \vec{v}$ olmak üzere $\langle \overrightarrow{PX}, \vec{N} \rangle = 0$ kapalı denklemi elde edilebilir.

ÖRNEK - 1

Doğrultu vektörleri $\vec{u} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{v} = (3, 1, 4)$ olan düzlemin parametrik ve kapalı denklemlerini bulalım.

ÇÖZÜM

X, düzlem üzerinde değişken bir nokta olsun.



(0, 0, 0), H düzleminin parametrik denklemi,

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} \text{ ya da } X = P + k_1 \cdot \vec{u} + k_2 \cdot \vec{v}$$

$$X = P + k_1 (1, 2, -1) + k_2 (3, 1, 4)$$

şeklinde yazılabilir.

$\vec{N} = \vec{u} \times \vec{v}$ olmak üzere,

$\langle \overrightarrow{PX}, \vec{N} \rangle = 0$ eşitliğinden kapalı denklemi bulalım.

$$\vec{N} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 9\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3 = (9, -7, -5) \text{ olup}$$

$\vec{N} = (9, -7, -5)$ düzlemin normalidir.

O halde,

$\langle \overrightarrow{PX}, \vec{N} \rangle = 0$ olacağından,

$\overrightarrow{PX} = (x, y, z)$ ve $\vec{N} = (9, -7, -5)$ ile

$$H : 9x - 7y - 5z = 0$$

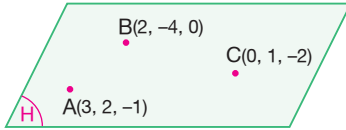
düzlemin kapalı denklemi elde edilir.

ÖRNEK - 2

Uzayda $A(3, 2, -1)$, $B(2, -4, 0)$ ve $C(0, 1, -2)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

1. Yol :



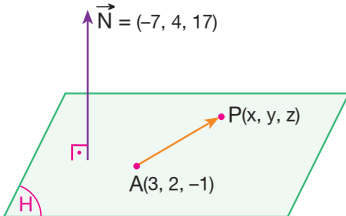
$\vec{u} = \vec{AC}$ ve $\vec{v} = \vec{AB}$ nü bulalım.

$\vec{u} = C - A = (-3, -1, -1)$ ve $\vec{v} = B - A = (-1, -6, 1)$

Düzlemin normalini (normal vektörünü) bulalım.

$$\vec{N} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -7\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 17\vec{e}_3$$

O halde,



Düzlem üzerinde değişken bir $P(x, y, z)$ noktası ile

$\vec{N} \perp \vec{AP}$ olacağından, $\langle \vec{N}, \vec{AP} \rangle = 0$ olmalıdır.

$\vec{N} = (-7, 4, 17)$ ve

$\vec{AP} = P - A = (x - 3, y - 2, z + 1)$ vektörlerinden,

H düzleminin denklemini,

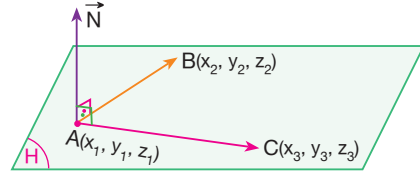
$\langle \vec{N}, \vec{AP} \rangle = 0$ eşitliği ile,

$$-7(x - 3) + 4(y - 2) + 17(z + 1) = 0$$

$$H : 7x - 4y - 17z - 30 = 0 \text{ bulunur.}$$

2. Yol :

Uzayda A, B, C noktalarından geçen düzlem denklemini bulmak için $\vec{AB}$ ve $\vec{AC}$ vektörlerine dik olan bir $\vec{N}$ vektörü aranır. Böylece $\vec{AB} \perp \vec{N}$ ve $\vec{AC} \perp \vec{N}$ olacağından skaler çarpım ile çok miktarda $\vec{N}$ vektörleri elde edilmiş olur ki bunlardan herhangi birini seçerek düzlem denklemini kolayca yazılabilir.



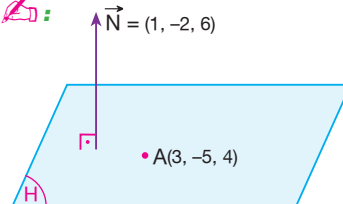
$\vec{N} \perp \vec{AB}$ ve $\vec{N} \perp \vec{AC}$ dolayısı ile $\vec{N} \perp (H)$

$$H : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

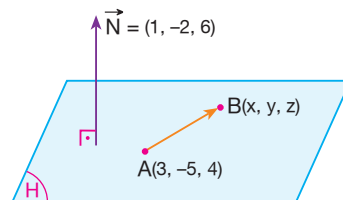
ÖRNEK - 3

Uzayda $A(3, -5, 4)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (1, -2, 6)$ ne dik olan düzlemin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :



H düzlemi üzerinde değişken bir $B(x, y, z)$ noktası alalım.



$\vec{AB} \perp \vec{N}$ olduğundan, $\langle \vec{AB}, \vec{N} \rangle = 0$ olmalıdır.

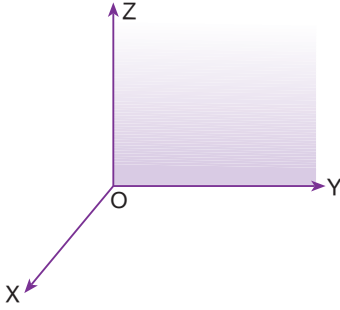
$\vec{AB} = B - A = (x - 3, y + 5, z - 4)$ ve $\vec{N} = (1, -2, 6)$

$\langle \vec{AB}, \vec{N} \rangle = 0$ eşitliği ile

$$H : 1(x - 3) - 2(y + 5) + 6(z - 4) = 0$$

$$x - 2y + 6z - 37 = 0 \text{ kapalı denklemi elde edilir.}$$

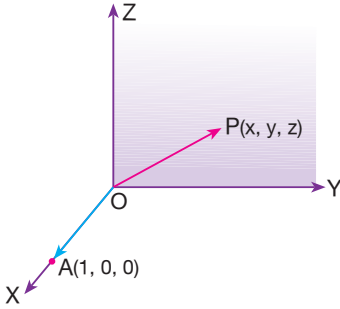
ÖRNEK - 4



YOZ düzleminin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM  :

X ekseninde $A(1, 0, 0)$ ve YOZ düzleminde değişken bir $P(x, y, z)$ noktası alalım.



X ekseninde ZOY düzleminde dik olduğundan, $\vec{OA} = \vec{A} = (1, 0, 0)$ nı ZOY düzleminin bir normali olarak alabiliriz.

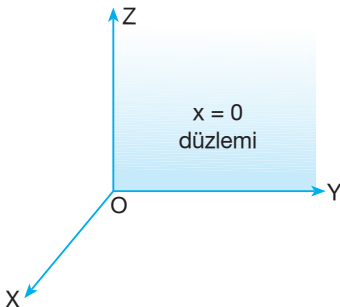
O halde, $\vec{OP} \perp \vec{OA}$ olup

$\langle \vec{OP}, \vec{OA} \rangle = 0$ eşitliğinden,

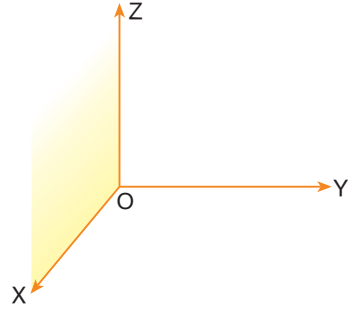
ZOY düzleminin denklemleri,

$$x + 0y + 0z = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ bulunur.}$$

SONUÇ :



ÖRNEK - 5

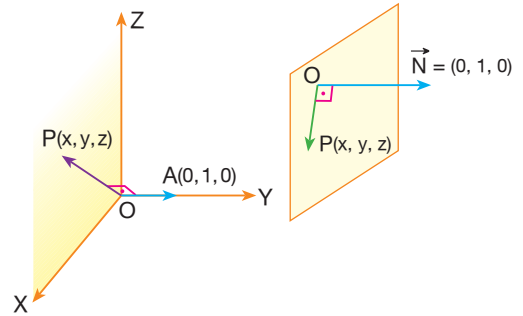


XOZ düzleminin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM  :

Y eksenindeki bir $A(0, 1, 0)$ noktası için $\vec{OA}$, XOZ düzleminin bir normali olarak düşünülebilir.

XOZ düzleminde rastgele seçilen bir $P(x, y, z)$ noktası için,



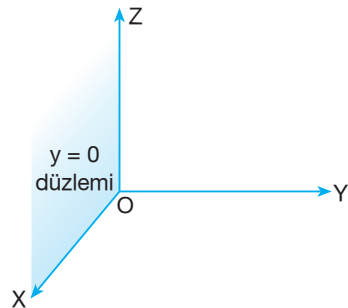
$\vec{OP} \perp \vec{OA}$ olup $\langle \vec{OP}, \vec{OA} \rangle = 0$ eşitliği ile

XOZ düzleminin denklemleri $\vec{OP} = (x, y, z)$,

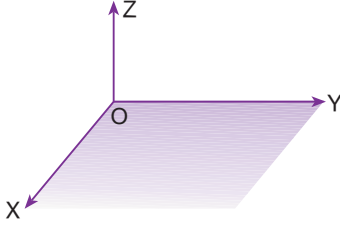
$\vec{A} = (0, 1, 0)$ ile $0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 0$ eşitliğinden,

$y = 0$ bulunur.

SONUÇ :



ÖRNEK - 6

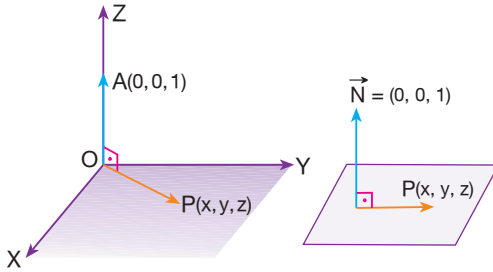


XOY düzleminin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

Z ekseninde bir $A(0, 0, 1)$ noktası için $\vec{OA}$, XOY düzleminin bir normali olarak düşünülebilir.

XOY düzleminde rastgele seçilen bir $P(x, y, z)$ noktası için,



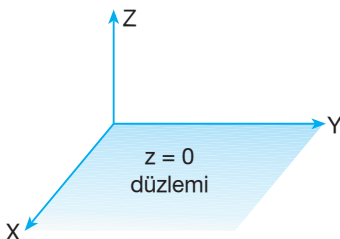
$\vec{OA} \perp \vec{OP}$ olup $\langle \vec{OA}, \vec{OP} \rangle = 0$ eşitliği ile,

XOY düzleminin denklemleri, $\vec{OP} = \vec{P} = (x, y, z)$,

$\vec{OA} = \vec{A} = (0, 0, 1)$ ile $0 \cdot x + 0 \cdot y + z = 0$ eşitliğinden,

$z = 0$ bulunur.

SONUÇ :



ÖRNEK - 7

Uzayda $3x + 4y + 5z - 60 = 0$ verilen denklemin grafiğini çizelim.

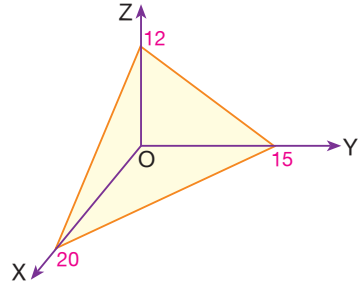
ÇÖZÜM :

$x = 0, y = 0$ için $z = 12$

$x = 0, z = 0$ için $y = 15$

$y = 0, z = 0$ için $x = 20$ olup

20, 15, 12 düzlemin eksenlerinden ayrılan parçadır.

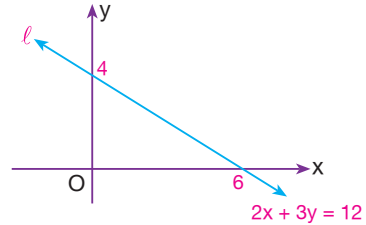


ÖRNEK - 8

$2x + 3y = 12$ denklemini düzlemde ve uzayda yorumlayalım.

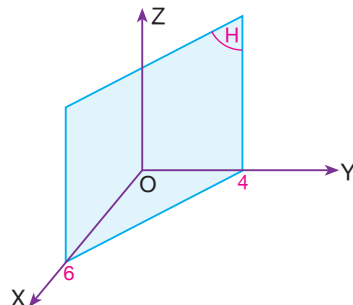
ÇÖZÜM :

Düzlemde : $2x + 3y = 12$ denklemi $(0, 4)$ ve $(6, 0)$ noktalarından geçen doğruyu belirtir.



Uzayda ise :

x eksenini $(6, 0, 0)$ ve y eksenini $(0, 4, 0)$ noktalarından kesen ve z eksenine paralel olan bir düzlemi belirtir.



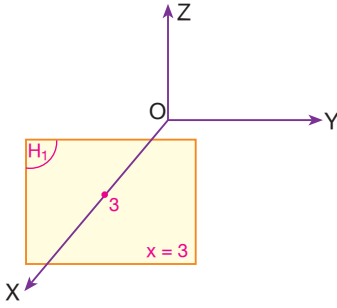
ÖRNEK - 9

$H_1 : x = 3$, $H_2 : y = -2$, $H_3 : z = 5$ denklemleri ile verilen düzlemlerin grafiğini uzayda gösterelim.

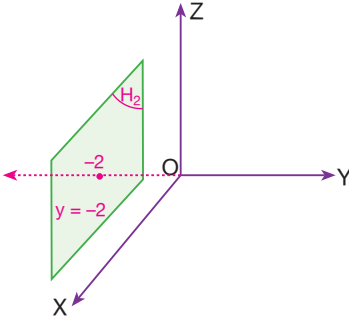
ÇÖZÜM :

Uzayda :

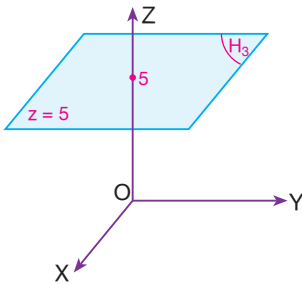
$x = 3$ denklemi x eksenini $(3, 0, 0)$ noktasında kesen ve YOZ düzlemine paralel bir düzlem belirtir.



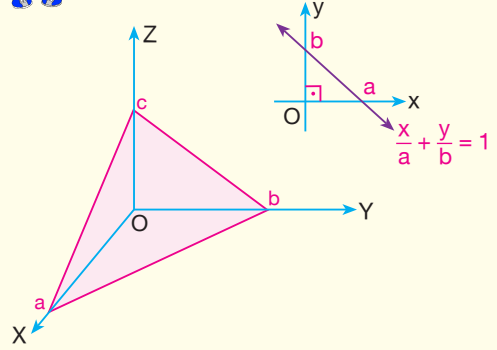
$y = -2$ düzlemi y eksenini $(0, -2, 0)$ noktasında kesen ve XOZ düzlemine paralel bir düzlem belirtir.



$z = 5$ düzlemi z eksenini $(0, 0, 5)$ noktasında kesen ve XOY düzlemine paralel bir düzlem belirtir.



NOT :



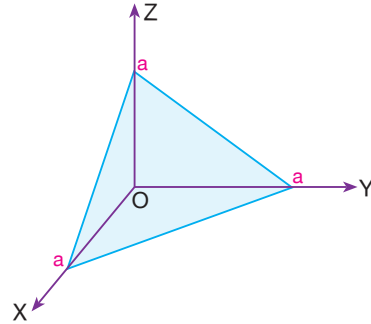
Uzayda yukarıdaki düzlemin denklemi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 10

Uzayda koordinat eksenlerinde eşit parçalar ayıran ve $A(1, 2, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :



Düzlemin denklemi, $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$ olup

Denklem düzenlenirse $\frac{x+y+z}{a} = 1$ olup

$x + y + z = a$ yazılabilir.

$A(1, 2, 3)$ noktası bu denklemi sağlar.

$1 + 2 + 3 = a \Rightarrow a = 6$ olup

düzlemin denklemi $x + y + z = 6$ bulunur.

ÖRNEK - 11

$3x + 2y + z = 12$ düzleminin koordinat eksenlerini kestiği noktalar A, B, C olsun.

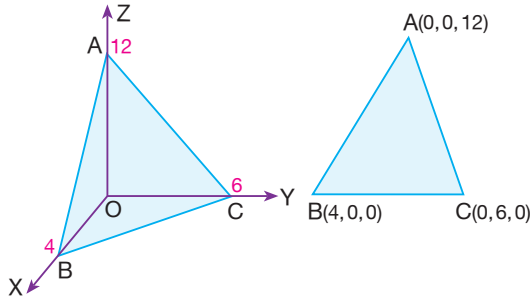
Buna göre, ABC üçgensel bölgesinin alanını bulalım.

ÇÖZÜM :

$$x = 0, y = 0 \Rightarrow z = 12 \text{ olup } A(0, 0, 12)$$

$$y = 0, z = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ olup } B(4, 0, 0)$$

$$x = 0, z = 0 \Rightarrow y = 6 \text{ olup } C(0, 6, 0) \text{ yazılabilir.}$$



$$\vec{BA} = A - B = (-4, 0, 12)$$

$$\vec{BC} = C - B = (-4, 6, 0) \text{ olup}$$

$\vec{BA}$ ve $\vec{BC}$ üzerine kurulan paralelkenarsal bölgenin alanının yarısı ABC üçgensel bölgesinin alanına eşittir.

O halde,

$$\widehat{A(ABC)} = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{BA} \times \vec{BC}\| \text{ yazılabilir.}$$

$$\vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -4 & 0 & 12 \\ -4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -72\vec{e}_1 + 48\vec{e}_2 - 24\vec{e}_3$$

$$\widehat{A(ABC)} = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{BA} \times \vec{BC}\| = 12\sqrt{14} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 12

$$x - 2y + z - 3 = 0 \text{ ve } x + y - 2z + 4 = 0$$

düzlemlerinin arakesit doğrusunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

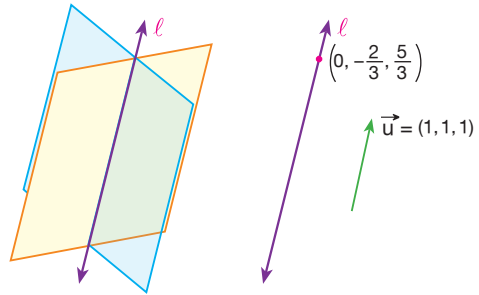
$$x = k \text{ diyelim.}$$

O halde denklemler düzenlenip taraf tarafa çözümlerse,

$$\begin{array}{r} 2 / -2y + z = 3 - k \\ + \quad y - 2z = -4 - k \\ \hline y = \frac{2-3k}{-3}, z = \frac{3k+5}{3} \text{ olup} \end{array}$$

k ler eşitlenirse arakesit doğrusunun denklemini

$$x = \frac{3y+2}{3} = \frac{3z-5}{3} = k \text{ bulunur.}$$



NOT :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Düzlemi gözönüne alındığında,

- ✓ $Ax + By + Cz + D > 0$ ifadesine **açık üst yarı uzay** denir.
- ✓ $Ax + By + Cz + D \geq 0$ ifadesine **kapalı üst yarı uzay** denir.
- ✓ $Ax + By + Cz + D < 0$ ifadesine **açık alt yarı uzay** denir.
- ✓ $Ax + By + Cz + D \leq 0$ ifadesine **kapalı alt yarı uzay** denir.

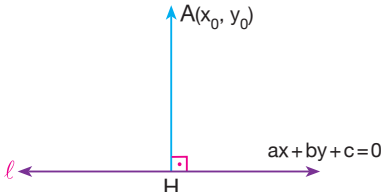


Uzayda Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı

10. sınıftan hatırlayalım.

Düzlemde;

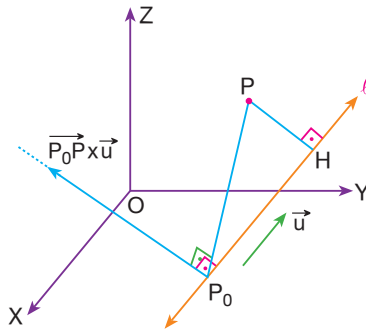
$A(x_0, y_0)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığı,



$$|AH| = d(A, B) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Uzayda ise;

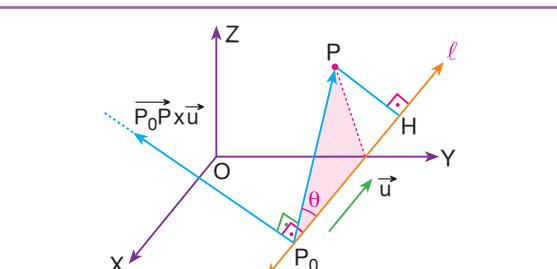
Bir P noktasının, doğrultmanı $\vec{u}$ olan bir ℓ doğrusuna uzaklığı, P_0 doğru üzerinde bir nokta olmak üzere,



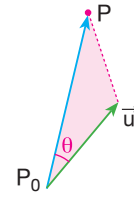
$$|PH| = \frac{\|\vec{P_0P} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

İspat :

1. Yol :



$$A(\widehat{PP_0u}) = \frac{1}{2} \|\vec{P_0P} \times \vec{u}\| \dots \textcircled{1}$$



$$A(\widehat{PP_0u}) = \frac{1}{2} \|\vec{P_0P}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \sin\theta \dots \textcircled{2}$$

①. ve ②. eşitlikler birbirine eşitlenirse,

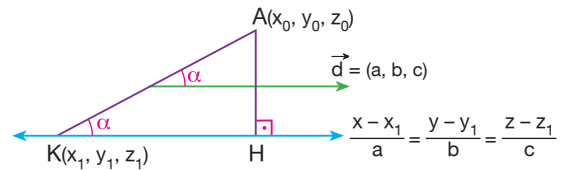
$$\|\vec{P_0P} \times \vec{u}\| = \|\vec{P_0P}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \sin\theta$$

$$PP_0H \text{ dik üçgeninde } \sin\theta = \frac{|PH|}{\|\vec{P_0P}\|} \text{ olup}$$

$$\|\vec{P_0P} \times \vec{u}\| = \|\vec{P_0P}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \frac{|PH|}{\|\vec{P_0P}\|}$$

$$|PH| = \frac{\|\vec{P_0P} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ bulunur.}$$

2. Yol :



$$\vec{d} = (a, b, c)$$

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Yukardaki şekil dikkatlice incelenirse $\vec{KA}$ vektörü ile $\vec{d}$ (doğrultman) vektörü arasındaki açının kosinüsü $\vec{KA}$ ile $\vec{d}$ vektörlerinin skalar çarpımı ile kolayca bulunup buradan dik üçgen yardımı ile sinüs değerine geçiş yapılabilir.

$$\text{Böylece } \sin\alpha = \frac{|AH|}{|AK|} \text{ eşitliğinden } |AH| \text{ bulunabilir.}$$



ÖRNEK - 1

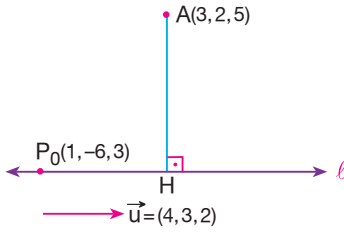
A(3, 2, 5) noktasının,

$$\ell: \frac{x-1}{4} = \frac{y+6}{3} = \frac{z-3}{2}$$

doğrusuna uzaklığını bulalım.

ÇÖZÜM

ℓ doğrusu üzerinde $P_0(1, -6, 3)$ noktası seçelim.



$$|AH| = d(A, \ell) = \frac{\|\vec{P_0A} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ olup}$$

$$\vec{P_0A} = A - P_0 = (2, 8, 2) \text{ ve } \vec{u} = (4, 3, 2)$$

$$\vec{P_0A} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 10\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 26\vec{e}_3 = (10, 4, -26) \text{ olduğundan,}$$

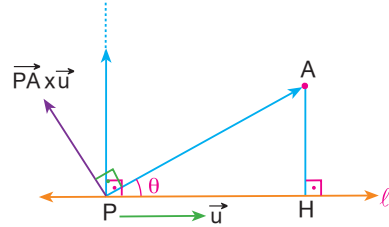
$$|AH| = d(A, \ell) = \frac{\sqrt{10^2 + 4^2 + (-26)^2}}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{25 + 4 + 169}}{\sqrt{16 + 9 + 4}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{198}}{\sqrt{29}} \text{ birim bulunur.}$$



ÖZET

Uzayda A noktasının üzerindeki bir noktası P ve doğrultmanı $\vec{u}$ olan ℓ doğrusuna uzaklığı



$$|AH| = d(A, \ell) = \frac{\|\vec{PA} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ ile hesaplanabilir.}$$

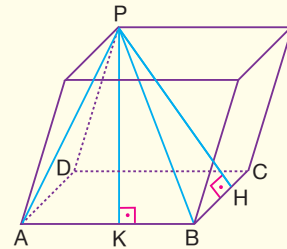
Yukarıdaki çıkarımlar hesaplanırken;

- ✓ $\vec{PA} \times \vec{u} \perp \vec{PA}$ ve $\vec{PA} \times \vec{u} \perp \vec{u}$
- ✓ $\|\vec{PA} \times \vec{u}\| = \|\vec{PA}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \sin\theta$
- ✓ $\|\vec{PA}\| \cdot \sin\theta = |AH|$
- ✓ $A(\widehat{APu}) = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{PA}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \sin\theta$
- ✓ $A(\widehat{APu}) = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{PA} \times \vec{u}\|$

ifadelerinden yararlandığımızı düşünelim.



NOT :



$$P \text{ noktasının } [BC] \text{ na uzaklığı } |PH| = \frac{\|\vec{BP} \times \vec{BC}\|}{\|\vec{BC}\|}$$

$$P \text{ noktasının } [AB] \text{ na uzaklığı } |PK| = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|}$$



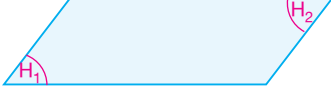
Uzayda İki Düzlemin Birbirine Göre Durumları

$$H_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$H_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Denklemleri ile verilen iki düzlemde,

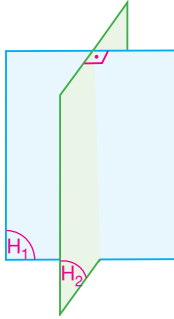
1. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ ise düzlemler çakışık.



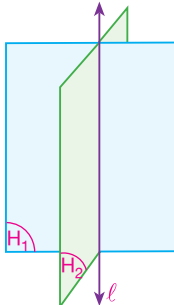
2. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ ise düzlemler paraleldir.



3. $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ve $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ olmak üzere, $\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 0$ ise düzlemler diktir.

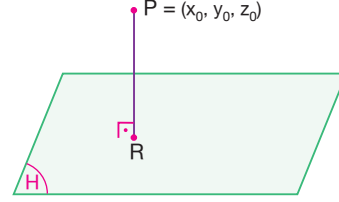


4. $\{\vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ lineer bağımsız ise H_1 ve H_2 düzlemleri kesişir. Bu iki düzlemin denklemini sağlayan herhangi bir nokta R iken düzlemlerin ara kesit doğrusunun denklemi, $X = R + k(\vec{N}_1 \times \vec{N}_2)$ şeklindedir.



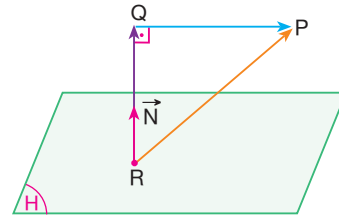
Uzayda Bir Noktanın Bir Düzleme Uzaklığı

$P(x_0, y_0, z_0)$ noktasının $Ax + By + Cz + D = 0$ denkleminin uzaklığı,



$$|PR| = d(P, H) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

YA DA



$$\vec{RQ} = \frac{\langle \vec{RP}, \vec{N} \rangle}{\|\vec{N}\|^2} \cdot \vec{N}$$

ifadesi $\vec{RP}$ nün $\vec{N}$ normali üzerinde dik izdüşüm vektörü olup bu vektörün uzunluğu,

$$\|\vec{RQ}\| = \frac{|\langle \vec{RP}, \vec{N} \rangle|}{\|\vec{N}\|}$$

uzunluğu P noktasının H düzlemine uzaklığını gösterir.

O halde,

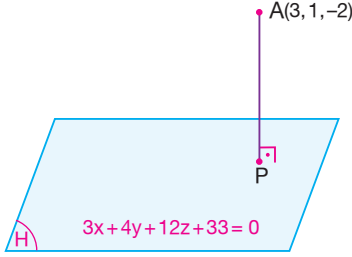
$$\frac{|\langle \vec{P}, \vec{N} \rangle|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ yazılabilir.}$$

ÖRNEK - 1

$A(3, 1, -2)$ noktasının $3x + 4y + 12z + 33 = 0$ düzlemine uzaklığını bulalım.

ÇÖZÜM

1. Yol :

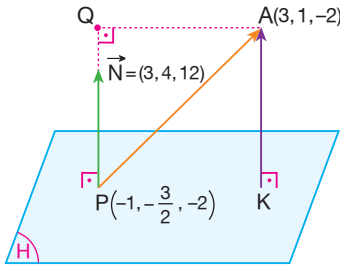


$$d(A, H) = |AP| = \frac{|3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 12(-2) + 33|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = \frac{22}{13} \text{ birim bulunur.}$$

2. Yol :

Düzlemin normali $\vec{N} = (3, 4, 12)$ ve düzlem

üzerindeki bir nokta $P(-1, -\frac{3}{2}, -2)$



$$\vec{PA} = A - P = (4, \frac{5}{2}, 0) \text{ olup}$$

$\vec{PA}$ nın $\vec{N}$ üzerindeki izdüşüm uzunluğu aradığımız $|AK|$ uzunluğuna eşittir.

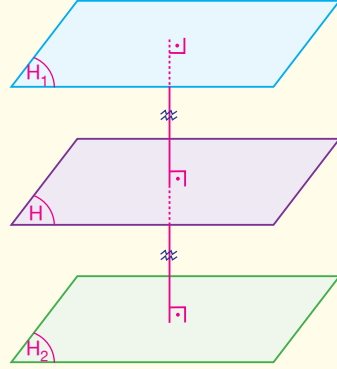
O halde,

$$|AK| = \frac{|\langle \vec{PA}, \vec{N} \rangle|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|12 + 10 + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = \frac{22}{13} \text{ birim bulunur.}$$



NOT :

Bir düzlemden eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri bu düzleme paralel iki düzlemdir.

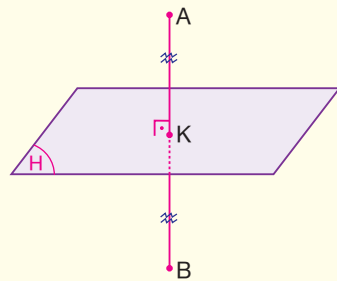


Yukarıda H_1 ve H_2 düzlemler H düzlemine eşit iki uzaklıkta bulunan iki düzlemdir.



NOT :

Uzayda iki noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının orta dikme düzlemidir.



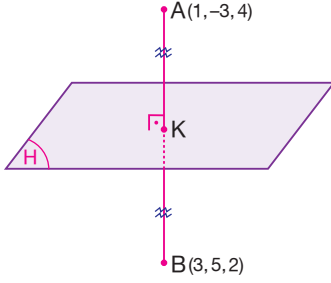
$H : [AB]$ nın orta dikme düzlemidir.

ÖRNEK - 2

Uzayda $A(1, -3, 4)$ ve $B(3, 5, 2)$ noktalarına eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerinin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

A ve B noktalarına eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri aşağıdaki gibi H düzlemidir.



O halde $\vec{BA}$, H düzleminin normali olarak alınabilir.

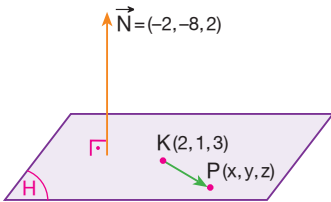
$$\vec{N} = \vec{BA} = A - B = (-2, -8, 2)$$

$[AB]$ nın orta noktası,

$$K\left(\frac{3+1}{2}, \frac{5-3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = K(2, 1, 3) \text{ olup}$$

Örneğimiz şu hale geldi :

"Normali $\vec{N} = (-2, -8, 2)$ ve bir noktası $K(2, 1, 3)$ olan düzlemin denklemini bulalım."



Böylece H düzleminin denklemi,

$$\langle \vec{KP}, \vec{N} \rangle = 0 \text{ olduğundan,}$$

$$-2(x-2) - 8(y-1) + 2(z-3) = 0$$

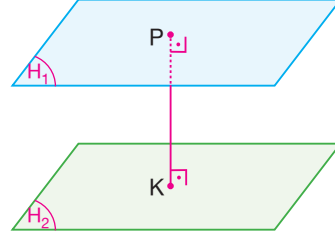
$$2x + 8y - 2z - 6 = 0 \text{ bulunur.}$$

Uzayda İki Düzlem Arasındaki Uzaklık

$$H_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

$$H_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

Paralel düzlemleri arasındaki uzaklık,



$$|PK| = d(H_1, H_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ ile bulunur.}$$



NOT :

10. sınıftan hatırlayalım. Kesişen ya da çakışık iki doğru arasındaki uzaklık sıfırdır.

Uzayda da kesişen ya da çakışık iki düzlem arasındaki uzaklık sıfırdır.

ÖRNEK - 1

$$H_1 : 3x - 4y + 12z - 1 = 0 \text{ ve}$$

$$H_2 : 3x - 4y + 12z + 51 = 0$$

düzlemleri arasındaki uzaklığı $(d(H_1, H_2))$ bulalım.

ÇÖZÜM :

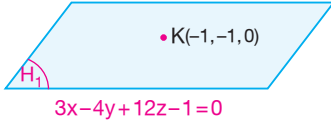
1. Yol :

$$d(H_1, H_2) = \frac{|-1 - 51|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = \frac{52}{13}$$

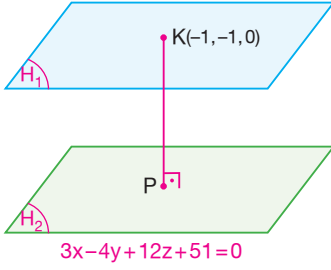
$$= 4 \text{ birim bulunur.}$$

2. Yol :

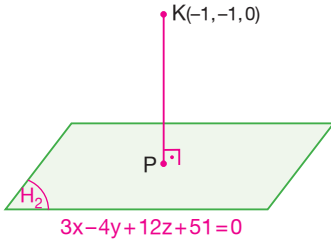
H_1 düzlemi üzerinde bir nokta alalım.



O halde,



Örneğimiz bir noktanın bir düzleme uzaklık problemine dönüştü,



$$|KP| = d(K, H_2) = \frac{|3(-1) - 4(-1) + 12 \cdot 0 + 51|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}}$$

= 4 birim bulunur.

ÖRNEK - 2

$$H_1 : 2x - 3y + 4z - 7 = 0 \text{ ve}$$

$$H_2 : 3x + 5y + z - 11 = 0$$

düzlemleri arasındaki uzaklığı bulalım.

ÇÖZÜM :

Düzlemler paralel olmadığından aralarındaki uzaklık sıfırdır.

O halde, $d(H_1, H_2) = 0$ dir.

ÖRNEK - 3

$$H_1 : 3x + y + 5z + 1 = 0 \text{ ve}$$

$$H_2 : 6x + 2y + 10z + 2 = 0$$

düzlemleri arasındaki uzaklığı bulalım.

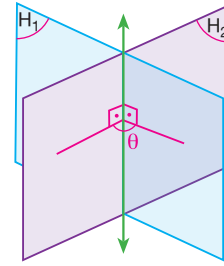
ÇÖZÜM :

Düzlem denklemlerine dikkatlice bakılırsa $H_2 = 2H_1$ olduğu dolayısıyla denklemlerin çıkışık iki düzlem belirttiği görülür.

O halde, $d(H_1, H_2) = 0$ bulunur.

Uzayda İki Düzlem Arasındaki Aç

Kesişen iki düzlemin ara kesit doğrusuna dik olan düzlemde oluşan iki açıdan dar olanına bu **iki düzlem arasındaki açı** denir.



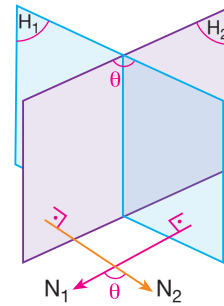
Kesişen iki düzlem arasında iki açı oluşur. bu açılardan biri dar, diğeri geniş açıdır. Dar olanına bu iki düzlem arasındaki açı denir.

Uzayda,

$$H_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$H_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

düzlemleri arasındaki açı bu düzlemlerin normal vektörleri arasındaki açıdır.



$$\text{O halde, } \cos \theta = \frac{|\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle|}{\|\vec{N}_1\| \cdot \|\vec{N}_2\|} \text{ şeklindedir.}$$



NOT :

- ✓ Normalleri dik olan iki düzlem birbirine diktir.
- ✓ Normalleri lineer bağımlı olan iki düzlem arasındaki açının ölçüsü 0° dir.

ÖRNEK - 1

Uzayda,

$$H_1 : 3x - 5y + 2z + 4 = 0 \text{ ve}$$

$$H_2 : ax + y - bz - 1 = 0$$

düzlemleri birbirine paralel olduğuna göre, a ve b değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$H_1 \text{ düzleminin normali } \vec{N}_1 = (3, -5, 2)$$

$$H_2 \text{ düzleminin normali } \vec{N}_2 = (a, 1, -b) \text{ dir.}$$

Düzlemler birbirine paralel olduğundan düzlemlerin normal vektörleri lineer bağımlıdır. (Paraleldir.)

$$\text{O halde, } \vec{N}_1 \text{ ile } \vec{N}_2 \text{ lineer bağımlı olup}$$

$$\vec{N}_1 = k \cdot \vec{N}_2 \text{ olup } (3, -5, 2) = k(a, 1, -b) \text{ ise}$$

$$\frac{3}{a} = \frac{-5}{1} = \frac{2}{-b} \text{ eşitliğinden,}$$

$$a = -\frac{3}{5} \text{ ve } b = \frac{2}{5} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

Uzayda,

$$H_1 : 2x - 3y + z - 5 = 0 \text{ ve } H_2 : x - y + nz + 1 = 0$$

düzlemleri birbirine dik olduğuna göre, n değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$H_1 \text{ düzleminin normali } \vec{N}_1 = (2, -3, 1)$$

$$H_2 \text{ düzleminin normali } \vec{N}_2 = (1, -1, n) \text{ olup}$$

$$(H_1) \perp (H_2) \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \text{ diyebiliriz.}$$

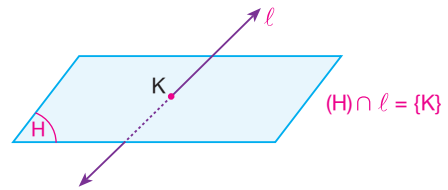
$$\text{O halde, } \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Rightarrow \langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 0 \text{ eşitliği ile}$$

$$2(1) - 3(-1) + 1 \cdot n = 0 \Rightarrow n = -5 \text{ bulunur.}$$

Uzayda Bir Doğru İle Bir Düzlemin Birbirine Göre Konumları

1. Durum :

Uzayda doğru düzleme çakışık veya paralel değilse düzlemi bir noktada keser.



K noktasının koordinatlarını bulmak için doğru-nun parametrik denklemleri düzlem denkleminde yerine yazılır ve parametre bulunur.

$$H : Ax + By + Cz + D = 0 \text{ düzlemi ile}$$

$$l : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} = k \text{ doğrusu verilsin.}$$

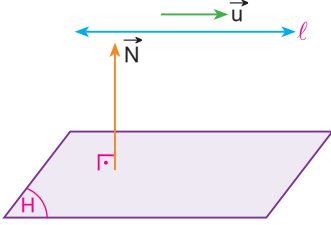
$$x = x_0 + pk, \quad y = y_0 + qk \text{ ve } z = z_0 + rk$$

Parametrik denklemleri düzlem denkleminde yerine yazılır ve k parametresi bulunur.



2. Durum :

Uzayda bir doğru bir düzleme paralel ise doğrunun doğrultman vektörü düzlemin normal vektörüne diktir.



$\ell // (H)$ ise $\vec{N} \perp \vec{u}$ olup

$\langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = 0$ yazabiliriz.

O halde, $Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemi ile

$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ doğrusu paralel ise

$\vec{N} = (A, B, C)$ ve $\vec{u} = (p, q, r)$ dik olup

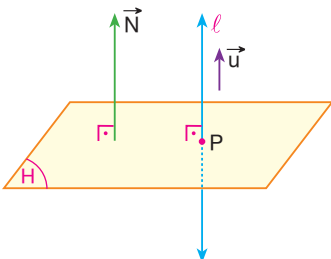
$\langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = 0$ eşitliği ile

$Ap + Bq + Cr = 0$ eşitliği elde edilir.

3. Durum :

Uzayda bir doğru bir düzleme dik ise doğrunun doğrultmanı düzlemin normaline paraleldir.

(Normal ile doğrultman lineer bağımlıdır.)



$$\ell \perp (H) \Rightarrow \vec{N} // \vec{u}$$

O halde, $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ doğrusu,

$Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemine dik ise

$\vec{u} = (p, q, r)$ ile $\vec{N} = (A, B, C)$ lineer bağımlıdır.

Böylece, $\frac{p}{A} = \frac{q}{B} = \frac{r}{C}$ yazılabilir.

ÖRNEK - 1

$$\ell : \frac{2x-3}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z}{-2} \text{ doğrusu}$$

$$H : 8x - my + nz - 9 = 0$$

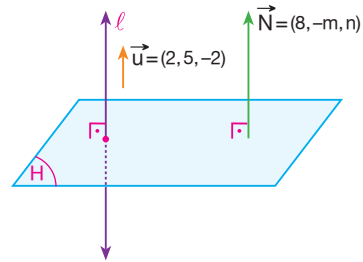
düzlemine dik olduğuna göre, m ve n sayılarını bulalım.

ÇÖZÜM :

Düzlemin normali, $\vec{N} = (8, -m, n)$ ve

doğrunun doğrultmanı $\vec{u} = (2, 5, -2)$ olup

doğru düzleme dik ise doğrultman düzleme paraleldir.



$\ell \perp (H) \Rightarrow \vec{u}$ ile $\vec{N}$ lineer bağımlıdır.

O halde, $\vec{u} = k \cdot \vec{N}$ eşitliği ile,

$$\frac{2}{8} = \frac{5}{-m} = \frac{-2}{n} \text{ orantısı ile,}$$

$m = -20$ ve $n = -8$ bulunur.

ÖRNEK - 2

$3x - 2y + z - 4 = 0$ düzlemi ile

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{3}$$

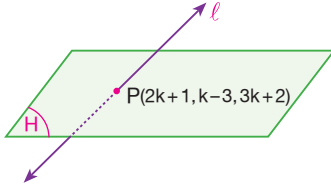
doğrusunun arakesit (kesişim) noktasının koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{3}$$

doğrusunun parametrik denklemleri,

$x = 2k + 1$, $y = k - 3$ ve $z = 3k + 2$ olup



P noktasının koordinatlarını düzlem denkleminde yazarak k parametresini bulalım.

$3(2k + 1) - 2(k - 3) + 3k + 2 - 4 = 0$ eşitliğinden,

$k = -1$ değeri elde edilir. Bu değer P noktasında yerine yazılarak,

$P(-1, -4, -1)$ bulunur.



ÖRNEK - 3

$$\ell : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{-1} \text{ doğrusunun}$$

$$H : x + 2y + 7z + 2 = 0$$

düzlemine uzaklığını bulalım.

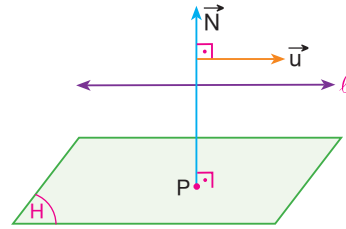
ÇÖZÜM :

ℓ doğrusunun doğrultmanı $\vec{u} = (3, 2, -1)$

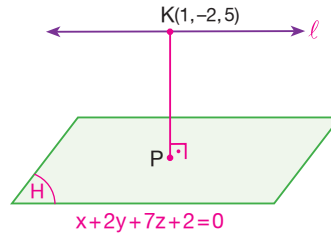
H : Düzleminin normali $\vec{N} = (1, 2, 7)$ dür.

$$\langle \vec{u}, \vec{N} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{N} \text{ dir.}$$

O halde, ℓ doğrusunun H düzlemine paralel olduğunu söyleyebiliriz.



ℓ doğrusu üzerinde bir $K(1, -2, 5)$ noktası seçelim.



Böylece, K noktasının H düzlemine uzaklığı

$$d(K, H) = \frac{|1 + 2(-2) + 7 \cdot 5 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 7^2}} = \frac{34}{3\sqrt{6}} \text{ br bulunur.}$$

ÖRNEK - 4

$$\ell : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{k} \text{ doğrusu}$$

$$H : 5x + y - 3z - 9 = 0$$

düzlemine paralel olduğuna göre, k değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

Bir doğru bir düzleme paralel ise doğrunun doğrultmanı düzlemin normaline diktir.

$$\ell // H \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{N} \text{ dir.}$$

$$\ell \text{ doğrusunun doğrultmanı, } \vec{u} = (2, -1, k)$$

$$H \text{ düzleminin normali, } \vec{N} = (5, 1, -3) \text{ olup}$$

$$\vec{u} \perp \vec{N} \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{N} \rangle = 0 \text{ eşitliği ile,}$$

$$2 \cdot 5 - 1 \cdot 1 + k(-3) = 0 \Rightarrow k = 3 \text{ bulunur.}$$

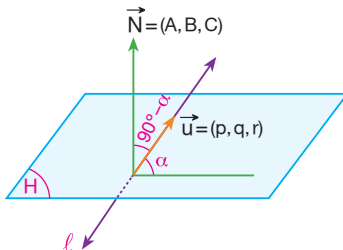
Uzayda Bir Doğru ile Bir Düzlem Arasındaki Aç

$Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemi ile

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} = k \text{ doğrusu verilsin.}$$

$$Ap + Bq + Cr \neq 0 \text{ ise } (\langle \vec{u}, \vec{N} \rangle \neq 0 \text{ ise})$$

doğru ile düzlem bir noktada kesişir.



Yukarıda α : doğru ile düzlem arasındaki açıdır.

$$\langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = \|\vec{N}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \text{ olduğundan,}$$

$$\sin \alpha = \frac{|Ap + Bq + Cr|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

eşitliği elde edilir.

ÖRNEK - 1

$x + y + 2z - 12 = 0$ düzlemi ile $x = y = z$ doğrusu arasında kalan açının sinüs değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

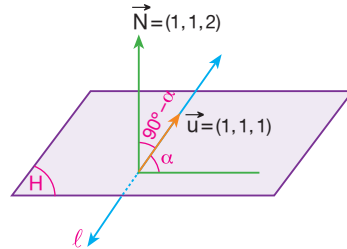
$x + y + 2z - 12 = 0$ düzleminin normali,

$$\vec{N} = (1, 1, 2) \text{ ve } \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$$

doğrusunun doğrultmanı, $\vec{u} = (1, 1, 1)$ olup

$$\langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = 1 + 1 + 2 = 4 \neq 0 \text{ olduğundan,}$$

doğru düzlemi keser.



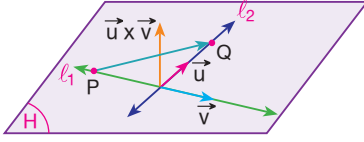
$$\langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = \|\vec{N}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$1 + 1 + 2 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin \alpha$$

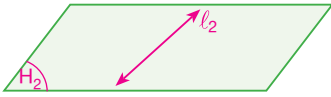
$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ bulunur.}$$



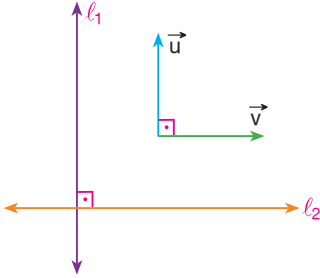
- ✓ l_1 doğrusu üzerinde bir P noktası ve l_2 doğrusu üzerinde bir Q noktası için $\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$ ise doğrular aynı düzlemedir.



$\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle \neq 0$ ise doğrular farklı düzlemedir, bu tür doğrulara aykırı doğrular denir.



- ✓ $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ ise doğrular diktir ya da dik konumlandır.



NOT :

Uzayda, $\vec{u}$, $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörlerinin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0 \text{ dir.}$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \text{ ise } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ lineer bağımlıdır.}$$

ÖRNEK - 2

$\vec{A} = (1, 2, -3)$, $\vec{B} = (-2, -4, 1)$ ve $\vec{C} = (5, -2, -1)$ nin lineer bağımlı olup olmadığını inceleyelim.

ÇÖZÜM

$\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ nin lineer bağımsız olması için,

gerek ve yeter şart $\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) \neq 0$ olmasıdır.

O halde,

$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

ifadesinin sonucuna bakılır.

Determinantı 1. satıra göre açarsak,

$$\begin{aligned} \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) &= 1 \cdot (4 + 2) - 2 \cdot (2 - 5) - 3 \cdot (4 + 20) \\ &= 6 + 6 - 72 \\ &= -60 \end{aligned}$$

Yani $\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) \neq 0$ olduğundan,

$\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ lineer bağımsızdır.

ÖRNEK - 3

$\vec{A} = (1, -2, 3)$, $\vec{B} = (0, 1, 4)$ ve $\vec{C} = (-2, 4, -6)$ nin lineer bağımlı olup olmadığını inceleyelim.

ÇÖZÜM

$\vec{C} = 2\vec{A}$ olup determinat özelliğinden,

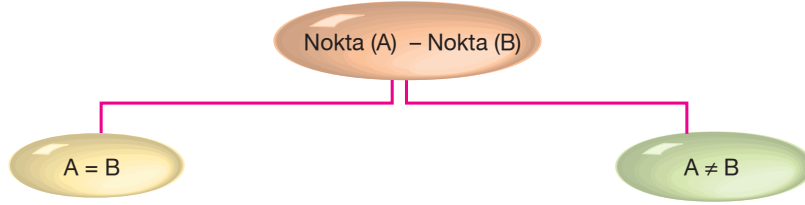
$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = 0 \text{ dir.}$$

O halde,

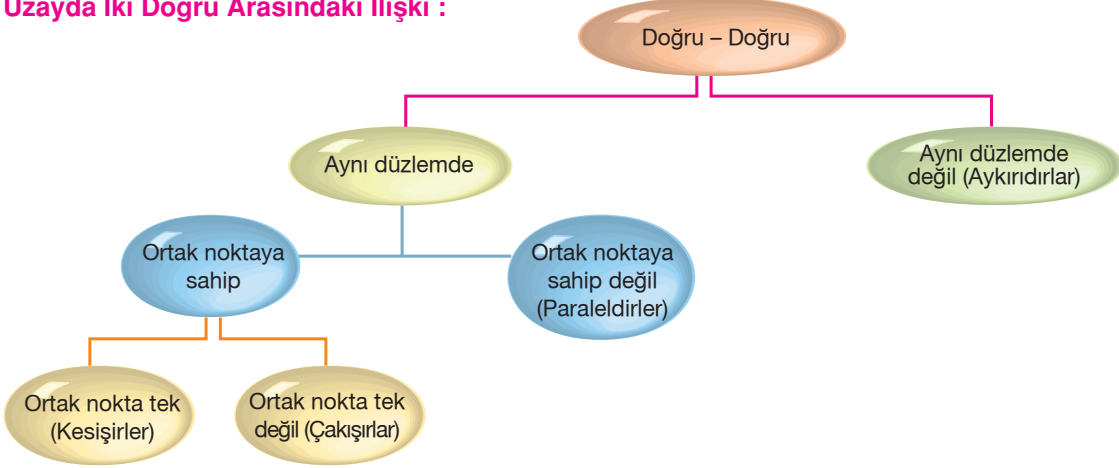
$\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ lineer bağımlıdır.



Uzayda İki Nokta Arasındaki İlişki :



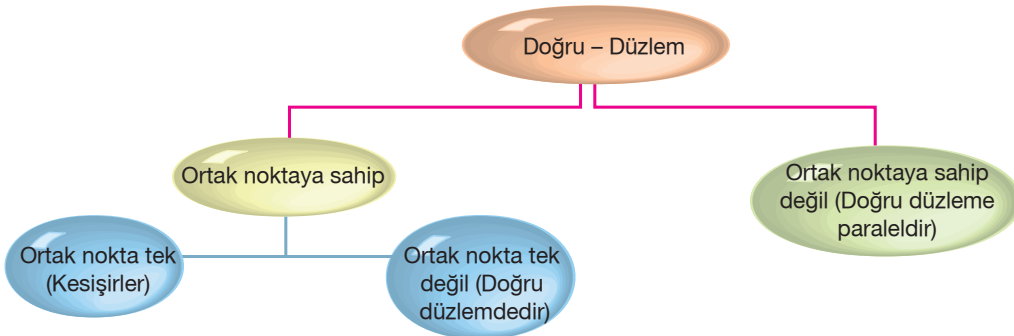
Uzayda İki Doğru Arasındaki İlişki :



Uzayda İki Düzlemin Arasındaki İlişki :



Uzayda Bir Doğru ve Bir Düzlem Arasındaki İlişki :



1. Uzayda $A(2, 4, 5)$ ve $B(-5, -2, 5)$ noktaları veriliyor.

Buna göre, $\overrightarrow{AB}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $(-7, 6, 2)$ B) $(-7, -6, 5)$
C) $(7, 6, 5)$ D) $(7, -6, -5)$
E) $(-7, -6, 0)$

2. $\overrightarrow{AB} = (2, 3, -5)$

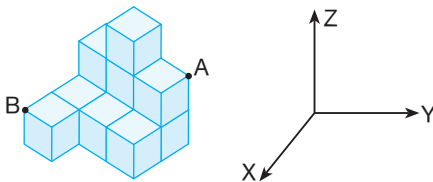
$$\overrightarrow{AC} = (1, 4, 7)$$

$$\overrightarrow{BC} = (p, q, r)$$

Buna göre, $p + q + r$ kaçtır?

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

3.



Yukarıda birim küplerden oluşmuş yapıda $\overrightarrow{AB}$ nün konum vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(3, -3, -1)$ B) $(-3, 1, 3)$ C) $(4, 2, -3)$
D) $(-1, 3, 2)$ E) $(-3, -1, -3)$

4. R^3 uzayında herhangi bir $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$,

$$\vec{b} = (x, y, z), \vec{c} = (m, m, m) \text{ vektörleri ile}$$

$$(x+y+z=1) \text{ ve } \vec{b} \perp (\vec{a} - \vec{c}) \text{ olacak şekilde veriliyor.}$$

Buna göre, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ skaler (iç) çarpımının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

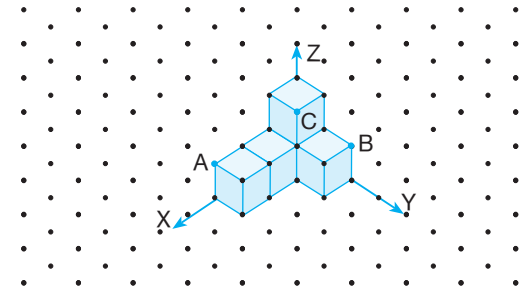
- A) m B) $m - 1$ C) $\frac{m}{2}$ D) 0 E) $2m - 1$

5. $\overrightarrow{AB} = (4, -2, 1)$ ve $\overrightarrow{AC} = (1, 5, 2)$ veriliyor.

Buna göre, $\overrightarrow{BC}$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-3, 7, 1)$ B) $(-1, 7, 1)$ C) $(1, -3, 3)$
D) $(1, 3, 3)$ E) $(7, 3, 3)$

6.



Yukarıda verilen A, B ve C noktalarının koordinatları toplamı kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

7. $\mathbb{R}^3$ te aşağıdakilerden hangisi kesinlikle yanlıştır?

- A) Düzlemin dışındaki bir noktadan düzleme dik olan yalnız bir tane doğru çizilebilir.
- B) Bir doğrunun bir düzleme dik izdüşümü nokta olabilir.
- C) İki düzlemin yalnız bir ortak noktası olabilir.
- D) Üç düzlem bir doğru boyunca kesişebilir.
- E) İki düzlem birbirine dik ise bu düzlemler üzerindeki doğrularda birbirine dik olabilir.

8. $\mathbb{R}^3$ te aşağıdakilerden hangisi kesinlikle yanlıştır?

- A) Bir doğrudan ve üzerinde olmayan bir noktadan yalnız bir düzlem geçer.
- B) Dik kesişen iki doğruyu içine alan sonsuz tane düzlem vardır.
- C) Kesişen iki doğrudan bir düzlem geçer.
- D) Paralel iki doğrudan bir düzlem geçer.
- E) İki farklı düzlem uzayı en fazla 4 bölgeye ayırır.

9. Bir düzlemdeki farklı üç doğru için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) Üç doğru bir noktada kesişebilir.
- B) Üç doğru paralel olabilir.
- C) Üç doğru dört noktada kesişebilir.
- D) Üç doğru ikişer ikişer farklı noktalarda kesişebilir.
- E) Üç doğru düzlemi 6 bölgeye ayırabilir.

10. $\mathbb{R}^3$ te aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

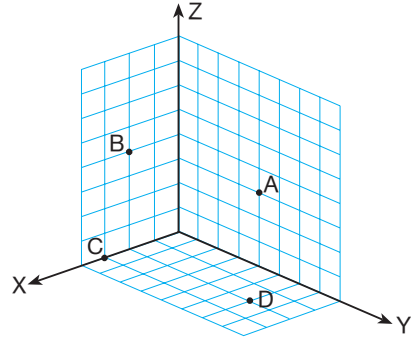
- A) Kesişen iki doğru bir düzlem belirtir.
- B) Farklı iki düzlem kesişirse arakesit bir doğrudur.
- C) Farklı iki noktadan yalnız bir tane doğru geçer.
- D) Bir düzlem üzerinde sonsuz sayıda doğru vardır.
- E) Aykırı doğrulara paralel bir düzlem yoktur.

11. Uzayda $\vec{A} = (-1, 2, -3)$ ve $\vec{B} = (1, 2, 0)$ veriliyor.

Buna göre, $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörel (dış) çarpımının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(6, -3, -4)$ B) $(6, 3, 4)$ C) $(-6, -3, 4)$
- D) $(-6, -3, -4)$ E) $(6, -3, 4)$

12.



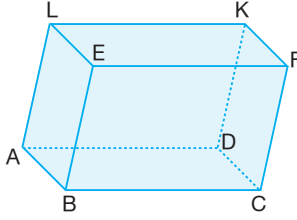
Yukarıdaki analitik uzayda A, B, C ve D noktaları veriliyor.

- I. $A(0, 4, 3)$
- II. $\vec{AB} = (2, -4, 1)$
- III. $D(2, 6, 0)$
- IV. $\vec{CB} = (-1, 0, 4)$
- V. $\vec{BD} = (0, 6, -4)$

Buna göre, yukarıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1.



ABCDEFKL paralelyüz prizmada $B(2, -3, 12)$ ve $K(-6, 6, 0)$ noktaları veriliyor.

Buna göre, paralelyüz prizmanın cisim köşegeninin uzunluğu kaç birimdir?

- A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

2.

$$\frac{x+4}{p} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{8} \text{ ve } \frac{x+3}{3} = \frac{2y+5}{p} = \frac{2-z}{-1}$$

doğruları birbirine dik olduğuna göre, p kaç eşittir?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

3. $5x - y + 4z = 2009$ düzlemi ile,

$$\frac{x+1}{m} = \frac{y-2}{n} = \frac{z-1}{2}$$

doğrusunun dik durumlu olması için $n + m$ kaç olmalıdır?

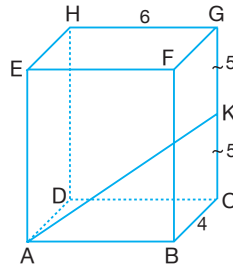
- A) -1 B) -2 C) 2 D) 3 E) 4

4.

$A(1, 2, -3)$, $B(-2, -4, 1)$, $C(5, -2, -1)$ noktalarından geçen düzlemin denklemi aşağıdaki-lerden hangisidir?

- A) $2x + 9y - 11z - 53 = 0$
B) $x + 5y + 11z - 22 = 0$
C) $2x + 11y + 18z + 30 = 0$
D) $x + 7y + 11z - 20 = 0$
E) $x + 7y + 11z + 75 = 0$

5.



Şekildeki dikdörtgenler prizmasında

$$|GK| = 5 \text{ birim}$$

$$|KC| = 5 \text{ birim}$$

$$|BC| = 4 \text{ birim}$$

$$|HG| = 6 \text{ birim}$$

Buna göre, $\langle \vec{AK}, \vec{CG} \rangle$ çarpımı kaç eşittir?

- A) 36 B) 49 C) 44 D) 50 E) 56

6.

Eksenleri kestiği noktalar; $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ noktaları olan düzlemin denklemi hangisidir?

- A) $x + 5y - 8z - 1 = 0$
B) $x + y + 11z - 2 = 0$
C) $2x + 4y + 8z + 30 = 0$
D) $6x + 3y + 2z - 6 = 0$
E) $x + 7y + z + 7 = 0$

7. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$ ve $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{4}$

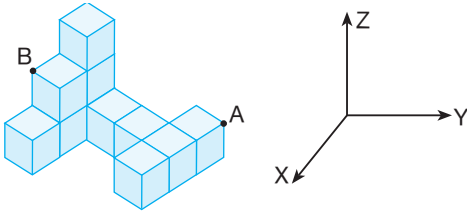
Doğrularından geçen düzlemin denklemi hangisidir?

- A) $12x + 4y - 5z - 13 = 0$
B) $12x - 5y - 11z - 13 = 0$
C) $17x + 2y - 10z - 5 = 0$
D) $2x + y - 2z - 6 = 0$
E) $19x - 2y + 5z - 9 = 0$

8. $\vec{A} = (3, 4, 2k - 1)$ vektörünün boyu 13 birim olduğuna göre, k nin alacağı değerler toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

9.



Yukarıda birim küplerden oluşmuş yapıda $A(-2, -3, 1)$ olduğuna göre, B noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(1, -7, 2)$ B) $(1, -6, 4)$ C) $(1, 2, 7)$
D) $(2, -6, 8)$ E) $(0, -8, 2)$

10. $\vec{A} = (1, 0, 3)$ nün $\vec{B} = (3, -4, 1)$ üzerindeki dik izdüşüm uzunluğu kaç birimdir?

- A) $\frac{9}{\sqrt{26}}$ B) $\frac{8}{\sqrt{26}}$ C) $\frac{7}{\sqrt{26}}$ D) $\frac{6}{\sqrt{26}}$ E) $\frac{5}{\sqrt{26}}$

11. Uzayda $A(x, y, z)$, $B(1, -2, 3)$, $C(4, 5, 2)$ veriliyor.

$\vec{AB} \perp \vec{C}$ olduğuna göre, x, y, z arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $4x + 5y + 3z - 11 = 0$
B) $4x - 5y + 3z - 21 = 0$
C) $4x + 5y - 3z - 21 = 0$
D) $4x + 5y + 3z - 20 = 0$
E) $4x + 5y + 2z = 0$

12. Uzayda $\vec{A} = (0, 1, -2)$ ve $\vec{B} = (2, 1, -3)$ leri üzerine kurulu paralelkenarsal bölgesinin alanı kaç br^2 dir?

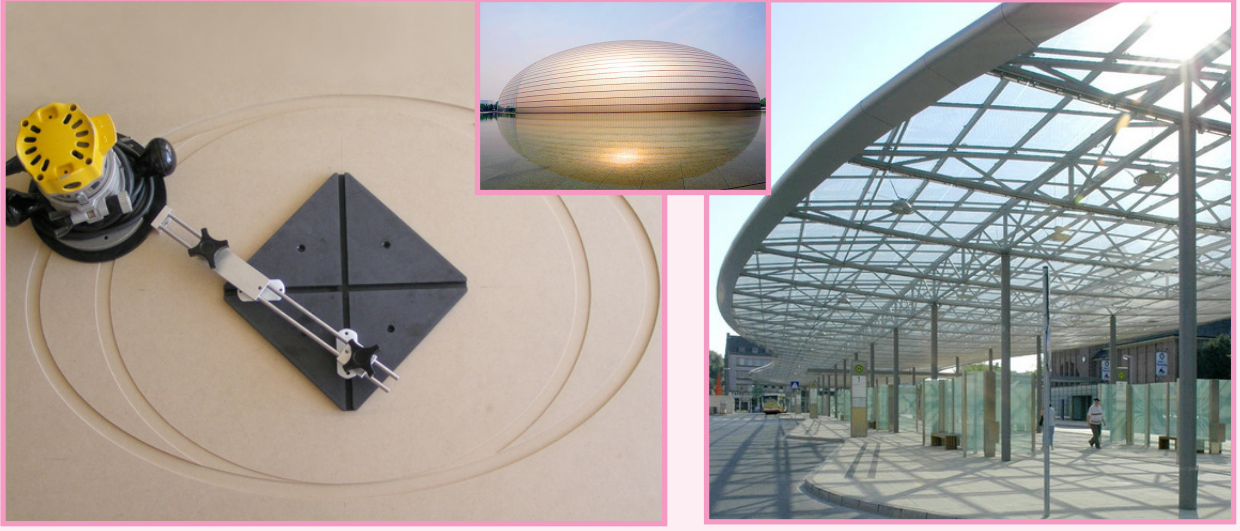
- A) $3\sqrt{2}$ B) $\sqrt{21}$ C) 5 D) $2\sqrt{7}$ E) $\sqrt{30}$

13. Uzayda $\vec{A} = (0, 1, -1)$, $\vec{B} = (1, 2, 3)$ ve $\vec{C} = (-1, -2, 0)$ leri üzerine kurulu paralelyüzlünün hacmi kaç br^3 tür?

- A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

14. Uzayda $A(1, 2, -1)$ ve $B(2, 3, 4)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{5}$
B) $2-x = 3-y = \frac{4-z}{5}$
C) $x-1 = y-2 = \frac{z+1}{-5}$
D) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{4}$
E) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{4}$



KONİKLER

ÜNİTE - 13

- Bir Koniğin Denklemi
- Koniğin Ekseni ve Tepe Noktaları
- Koniklerin Sınıflandırılması
- Elips
- Elipsin Eksen Uzunlukları
- Elipsin Dış Merkezliği ve Doğrultmanları
- Elipsin Parametrik Denklemi
- Merkezci Olmayan Elipsler
- Hiperbol
- Hiperbolün Eksen Uzunlukları
- Hiperbolün Dış Merkezliği ve Doğrultmanları
- Hiperbolün Asimptotları
- Parabol
- Parabolün Doğrultmanı ve Denklemi

Matematikçiler çoğu zaman birçoklarının gereksiz gördüğü işlerle uğraşırlar ve yüzyıllar sonra bu gereksiz sanılan işlerin aslında çok gerekli olduğu anlaşılır.

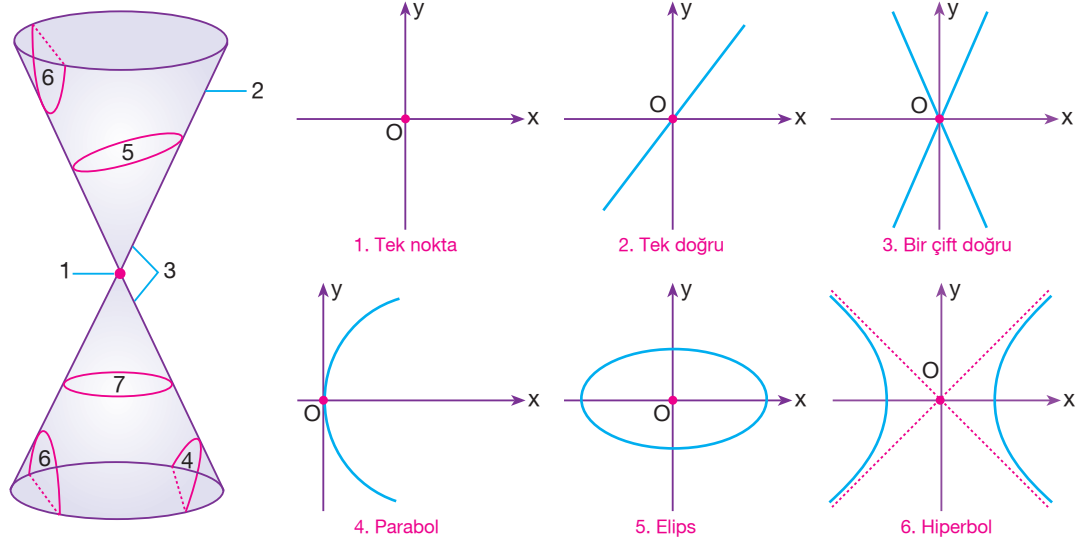
Matematikçiler bu "gereksiz" işlere sadece güzelliklerinden dolayı ilgi duyarlar. Nedeni pek bilinmez ama matematikçilere güzel görünen bir zaman sonra insanoğluna ve kızına hep gerekli ve yararlı, hatta vazgeçilmez olmuştur. Güzellikle yararlılık arasında tam dile getiremediğimiz bir bağ olmalı . . .

Eski Yunanlıların toplu olarak **konik** diye adlandırdıkları elips, parabol, hiperbol eğrileri birçokları tarafından gereksiz görülen ama daha sonra insanlığa çok yararlı olan çalışmalardandır.

Konikler ilk olarak Eflatun'un bir öğrencisi olan Perge'li Apollonyus tarafından M.Ö. 3. yüzyılda dikkate alınıp incelenmişlerdir. Perge bilindiği gibi Antalya yakınlarındadır. Yani Apollonyus bu coğrafyanın insanıdır.

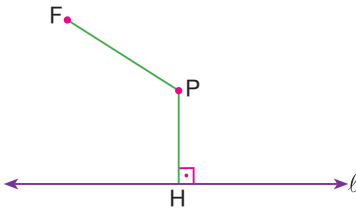
Apollonyus, tabanı bir çember olan bir dik koniyi aşağıdaki gibi düzlemlerle kesiştirmiş ve düzlemin eğimine göre değişen bir şekil elde edeceğini görüp ortada hiçbir neden yokken bu şekilleri inceleyip bu konuda insanlığın ilk eserini yazmıştır : **KONİKLER**.

(Matematik Dünyası Dergisi-www.matematikdunyasi.org)



Tanım : Düzlemde sabit bir noktaya olan uzaklığın, sabit bir doğruya olan uzaklığa oranı sabit olan noktaların geometrik yerine **konik** denir.

- ✓ Sabit doğruya koniğin **doğrultmanı** (ℓ) denir.
- ✓ Sabit noktaya koniğin **odağı** (F) denir.
- ✓ Sabit orana da koniğin **dış merkezliği** (e) denir.
- ✓ ℓ , F , e koniğin temel elemanlarıdır.



ℓ : Koniğin doğrultmanı

F : Koniğin odağı

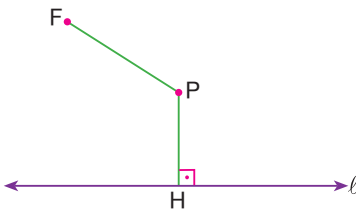
P : Koniğin üzerindeki herhangi bir nokta

$e = \frac{|PF|}{|PH|}$: Koniğin dış merkezliği

Bir Koniğin Denklemi

Konik üzerindeki herhangi bir nokta P olmak üzere P den geçen ve ℓ doğrultmanını dik kesen doğru ile ℓ nin kesim noktası H olmak üzere koniğin denklemi;

$$\frac{|PF|}{|PH|} = e \text{ ile bulunur.}$$



$$e = \frac{|PF|}{|PH|} = \frac{\text{iki nokta arası uzaklık}}{\text{noktanın doğruya uzaklığı}} = \frac{d(P, F)}{d(P, \ell)}$$

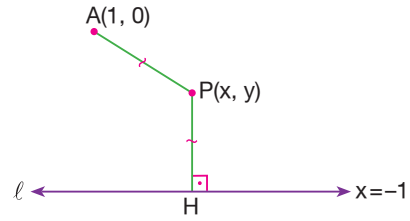
$$= \frac{\sqrt{\langle \vec{PF}, \vec{PF} \rangle}}{d(P, \ell)}$$

ÖRNEK - 1

Düzlemde $A(1, 0)$ noktasına uzaklığı $x = -1$ doğrusuna uzaklığına eşit olan noktalarla elde edilecek koniğin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

Konik üzerinde değişken bir nokta $P(x, y)$ olsun.



Konik tanımından,

$$\frac{|PA|}{|PH|} = \frac{d(P, A)}{d(P, \ell)} = \text{dış merkezlik} = 1$$

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{|x+1|} = 1$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x+1|$$

Her iki yanın karesini alalım.

$$x^2 + y^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$y^2 = 4x \text{ bulunur.}$$

SONUÇ :

$y^2 = 4x$ ifadesi,

- ✓ Odak noktası : $A(1, 0)$
- ✓ Doğrultmanı : $x = -1$ doğrusu
- ✓ Dış merkezliği : $e = 1$

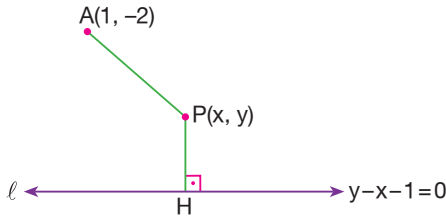
olan bir koniktir.

ÖRNEK - 2

Düzlemde $A(1, -2)$ noktasına uzaklığı $y = x + 1$ doğrusuna uzaklığının iki katı olan noktalarla elde edilecek koniğin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

Konik üzerinde değişken bir nokta $P(x, y)$ olsun.



Konik tanımından,

$$\frac{|PA|}{|PH|} = \frac{d(P, A)}{d(P, \ell)} = \text{dış merkezlik} = 2$$

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}}{|y-x-1|} = 2 \text{ eşitliği düzenlenirse,}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 2|y-x-1| \text{ olup}$$

Her iki yanın karesini alalım.

$$2(x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5) = 4(x^2 + y^2 + 1 + 2(-xy - y + x))$$

$$x^2 + y^2 - 4xy + 6x - 8y - 3 = 0 \text{ bulunur.}$$

SONUÇ :

$$x^2 + y^2 - 4xy + 6x - 8y - 3 = 0 \text{ ifadesi,}$$

- ✓ Odak noktası : $A(1, -2)$
- ✓ Doğrultmanı : $y = x + 1$ doğrusu
- ✓ Dış merkezliği : $e = 2$

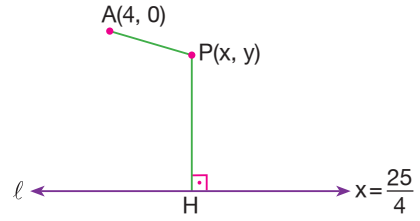
olan bir koniktir.

ÖRNEK - 3

Düzlemde $A(4, 0)$ noktasına uzaklığının $x = \frac{25}{4}$ doğrusuna uzaklığına oranı $\frac{4}{5}$ olan noktalarla elde edilecek koniğin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

Konik üzerinde değişken bir nokta $P(x, y)$ olsun.



Konik tanımından,

$$\frac{|PA|}{|PH|} = \frac{d(P, A)}{d(P, \ell)} = \text{dış merkezlik} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}}{\left|x - \frac{25}{4}\right|} = \frac{4}{5} \text{ olup}$$

$$5\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = |4x - 25|$$

Her iki yanın karesini alalım.

$$25(x^2 + y^2 - 8x + 16) = 16x^2 - 200x + 625$$

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ elde edilir.}$$

SONUÇ :

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ ifadesi,}$$

- ✓ Odak noktası : $A(4, 0)$
- ✓ Doğrultmanı : $x = \frac{25}{4}$ doğrusu
- ✓ Dış merkezliği : $e = \frac{4}{5}$

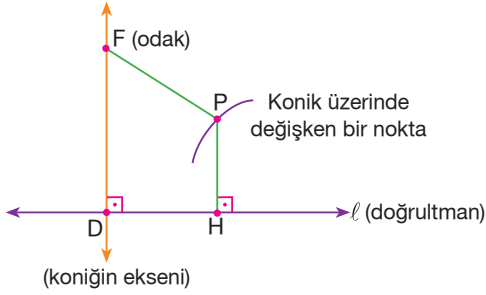
olan bir koniktir.



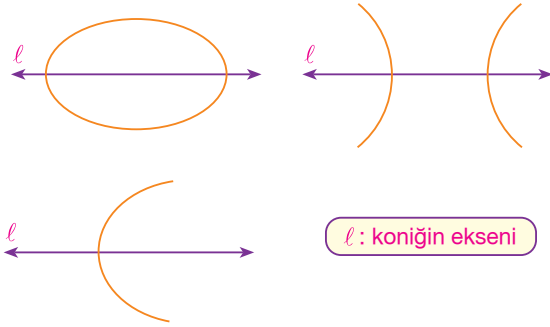
Koniğin Ekseni

Koniğin odağından geçen ve doğrultmana dik olan doğruya koniğin ekseni denir.

- ✓ Koniğin ekseni ile doğrultmanın kesiştiği nokta D ile gösterilir.



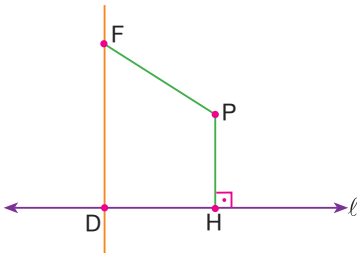
- ✓ Her konik kendi eksenine göre simetrik.



Koniğin Tepe Noktaları

Bir koniğin ekseni ile kesiştiği noktalara **koniğin tepe noktaları** denir.

- ✓ Bir koniğin T tepe noktası ya DF (eksen) üzerinde ya da dışındadır.
(Bu nokta parabolde üzerinde, elips ve hiperbolde dışındadır.)



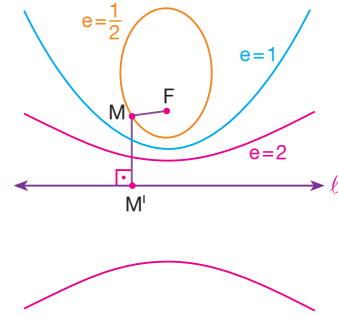
$$T = \frac{F+e \cdot D}{1+e} \text{ ya da } T = \frac{F-e \cdot D}{1-e} \quad (e \neq 1)$$

Koniklerin Sınıflandırılması

Bir koniğin dış merkezliği e olsun.

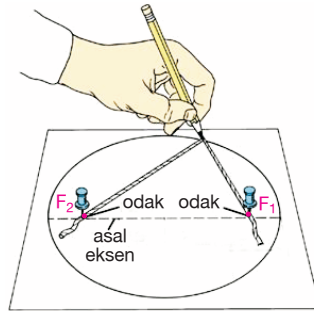
Bu konik;

- $e < 1$ ise elips
- $e > 1$ ise hiperbol
- $e = 1$ ise paraboldür.



Elips ($e < 1$)

Düzlemde, sabit iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine elips denir.



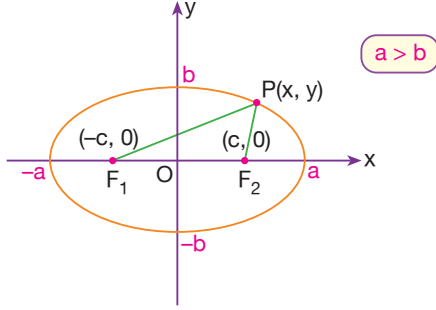
- ✓ Sabit noktalara elipsin odakları denir.
- ✓ Sabit noktalar F_1 ve F_2 ise $[F_1F_2]$ nin orta noktasına elipsin merkezi denir.
- ✓ Sabit uzaklık $2a$ dır.



Yatay Elips

F_1 ve F_2 sabit noktalar olmak üzere;

$|PF_1| + |PF_2| = 2a$ olacak şekilde P noktalarının geometrik yeri aşağıdaki yatay elipstir.



Elipsin Eksenleri Arasındaki Bağlılıklar

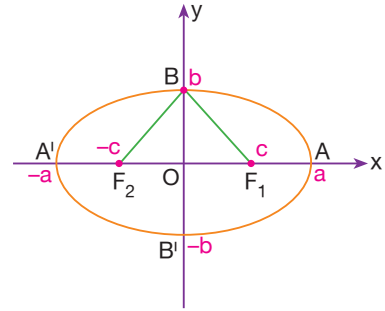
Ox eksenini $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ ve

Oy eksenini $B(0, b)$, $B'(0, -b)$

noktalarında kesen elipsin odakları,

$F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ olmak üzere a, b, c arasında,

$a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısı vardır.



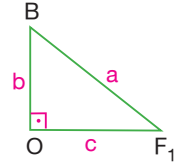
$|BF_1| + |BF_2| = 2a$ ve $|F_1O| = |F_2O|$ olduğundan,

$|BF_1| = |BF_2| = a$ dır.

Böylece BOF_1 dik üçgeninde

Pisagor teoremi ile,

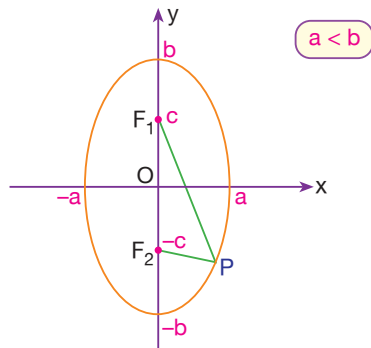
$a^2 = b^2 + c^2$ bulunur.



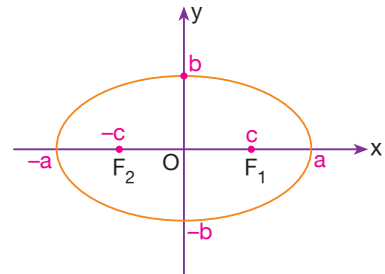
Düşey Elips

F_1 ve F_2 sabit noktalar olmak üzere;

$|PF_1| + |PF_2| = 2b$ olacak şekilde P noktalarının geometrik yeri aşağıdaki gibi düşey elipstir.



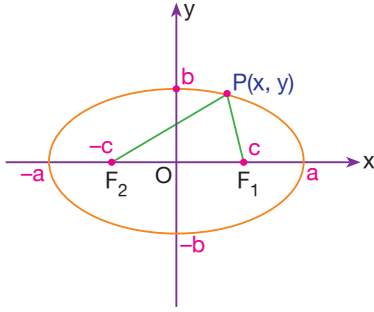
Yatay Elipsin Denklemi



Elipsin denklemi; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ şeklindedir.



İspat :



$$|PF_1| = \|\vec{PF_1}\| = \sqrt{\langle \vec{PF_1}, \vec{PF_1} \rangle}$$

$$|PF_2| = \|\vec{PF_2}\| = \sqrt{\langle \vec{PF_2}, \vec{PF_2} \rangle}$$

$\vec{PF_1}$ ve $\vec{PF_2}$ vektörlerinin konum vektörleri.

$$\vec{PF_1} = F_1 - P = (c - x, -y)$$

$$\vec{PF_2} = F_2 - P = (-c - x, -y) \text{ olup}$$

$$\|\vec{PF_1}\| = \sqrt{(c - x)^2 + y^2}$$

$$\|\vec{PF_2}\| = \sqrt{(-c - x)^2 + y^2}$$

$$\|\vec{PF_1}\| + \|\vec{PF_2}\| = 2a \text{ olduğundan,}$$

$$\sqrt{(-c - x)^2 + y^2} + \sqrt{(c - x)^2 + y^2} = 2a$$

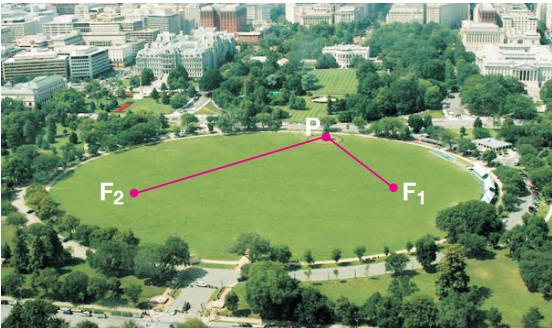
$$\sqrt{(-c - x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(c - x)^2 + y^2}$$

eşitliğinde her iki tarafın karesi alınırsa ve

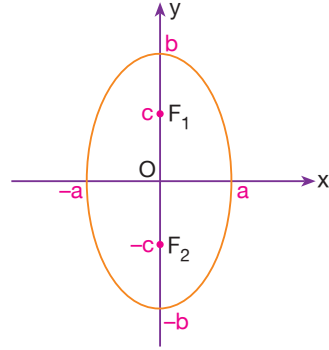
$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ olduğu gözönüne alınırsa,}$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ veya } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ bulunur.}$$

Bu denkleme elipsin standart denklemi denir.



Düşey Elipsin Denklemi

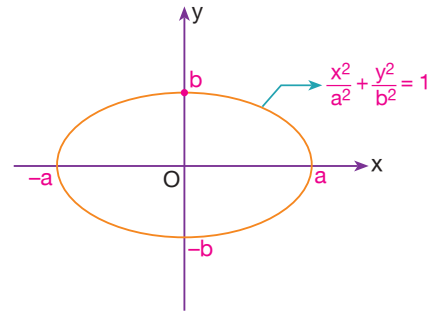


Yukarıdaki düşey elipsin denklemi,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a < b) \text{ dir.}$$

Elipsin Eksen Uzunlukları

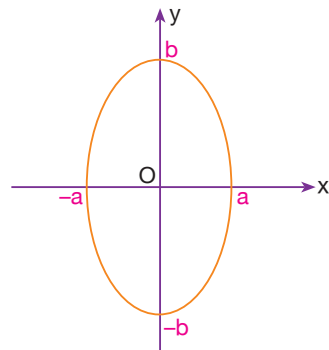
Yatay elipste;



2a : Elipsin büyük eksen uzunluğu

2b : Elipsin küçük eksen uzunluğu

Düşey elipste;



2a : Elipsin küçük eksen uzunluğu

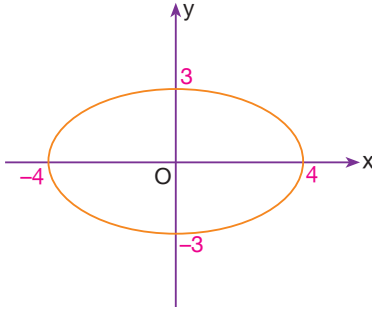
2b : Elipsin büyük eksen uzunluğu

ÖRNEK - 1

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipsinin grafiğini çizerek eksen uzunluklarını bulalım.

ÇÖZÜM :

$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$ ve
 $b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$ olup
 $a > b$ olduğundan elips yatay elipstir.



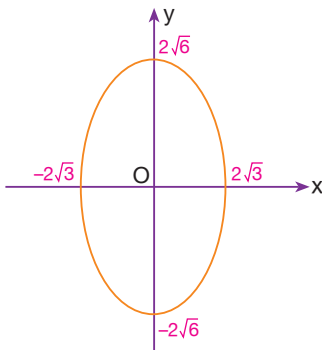
Büyük eksen uzunluğu : 8 birim
 Küçük eksen uzunluğu : 6 birim dir.

ÖRNEK - 2

$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{24} = 1$ elipsinin grafiğini çizerek eksen uzunluklarını bulalım.

ÇÖZÜM :

$a^2 = 12 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$ ve
 $b^2 = 24 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{6}$ olup
 $b > a$ olduğundan elips dikey elipstir.



Büyük eksen uzunluğu : $4\sqrt{6}$ birim
 Küçük eksen uzunluğu : $4\sqrt{3}$ birim dir.

ÖRNEK - 3

$2x^2 + y^2 = 48$ elipsinin grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM :

Denklem düzenlenirse,

$$\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{48} = 1 \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Böylece,

$$a^2 = 24 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{6} \text{ ve}$$

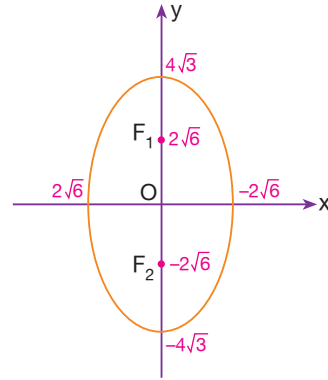
$$b^2 = 48 \Rightarrow b = \pm 4\sqrt{3} \text{ olup}$$

$b > a$ olduğundan elips dikey elipstir.

$$b^2 = a^2 + c^2 \text{ eşitliğinden,}$$

$$48 = 24 + c^2 \Rightarrow c = \pm 2\sqrt{6} \text{ dir.}$$

O halde elipsin grafiği aşağıdaki gibi olur.



NOT :

Elipsin odakları uzun eksen üzerinde bulunur.



ÖRNEK - 4

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ elipsinin grafiğini çizelim.}$$

ÇÖZÜM :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ elipsinde,}$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3 \text{ ve}$$

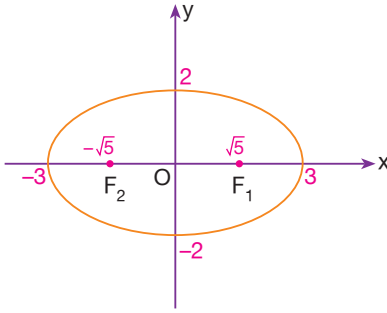
$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2 \text{ olup}$$

$a > b$ olduğundan elips yatay elipstir.

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ eşitliğinden,}$$

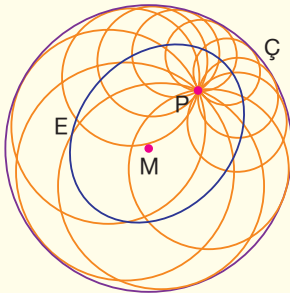
$$9 = 4 + c^2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{5} \text{ tür.}$$

O halde elipsin grafiği aşağıdaki gibi olur.



NOT :

Düzlemde bir çemberin içindeki bir noktadan geçen ve çembere teğet olacak şekilde çizilen çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir elipstir.



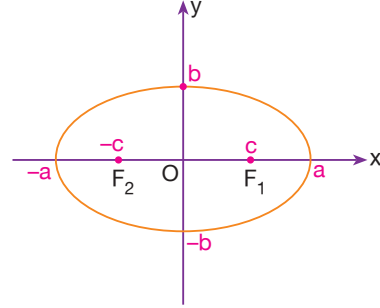
Yukarıda M merkezli $\odot$ çemberine içten teğet olup, P noktasından geçen çemberlerin merkezleri birleştirilirse, odak noktaları M ve P olan E elipsi elde edilir. ($\odot$ çemberi elipsin bir doğrultman çemberi)

Elipsin Dış Merkezliği

Elipste sabit bir noktaya (F) olan uzaklığın sabit bir doğruya (ℓ) olan uzaklığa oranı olan dış merkezliği, odaklar arası uzaklığın büyük eksen uzunluğuna oranı olarak ifade edebiliriz.

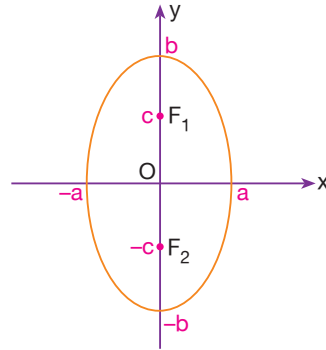
O halde,

Yatay elipste;

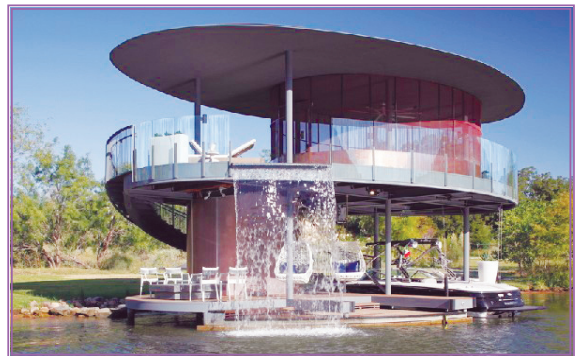


$$\text{dış merkezlik } e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} < 1$$

Düşey elipste;



$$\text{dış merkezlik } e = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b} < 1$$





ÖRNEK - 1

$9x^2 + 16y^2 = 144$ elipsinin dış merkezliğini bulalım.

ÇÖZÜM

Eşitliğin her iki yanı 144'e bölünürse,

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ elde edilir.}$$

Böylece,

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4 \text{ ve}$$

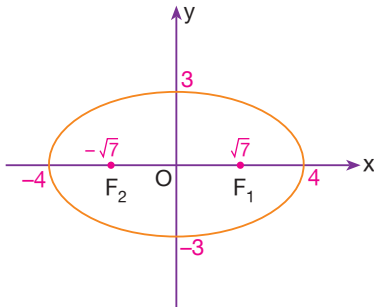
$$b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3 \text{ olup}$$

$a > b$ olduğundan elips yatay elipstir.

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ eşitliğinden,}$$

$$16 = 9 + c^2 \Rightarrow c = \pm \sqrt{7} \text{ dir.}$$

O halde elipsin grafiği;



$$e = \text{dış merkezlik} = \frac{\text{odaklar arası uzaklık}}{\text{büyük eksen uzunluğu}} = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

$8x^2 + 3y^2 = 24$ elipsinin dış merkezliğini bulalım.

ÇÖZÜM

Denklem düzenlenirse,

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{8} = 1 \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Böylece,

$$a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm \sqrt{3} \text{ ve}$$

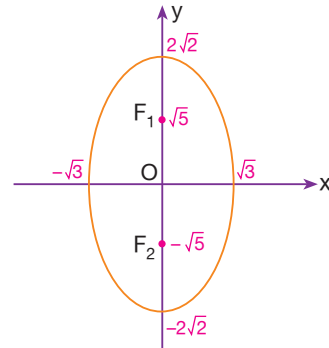
$$b^2 = 8 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{2} \text{ olup}$$

$b > a$ olduğundan elips dikey elipstir.

$$b^2 = a^2 + c^2 \text{ eşitliğinden,}$$

$$8 = 3 + c^2 \Rightarrow c = \pm \sqrt{5} \text{ tir.}$$

O halde elipsin grafiği;



$$\text{dış merkezlik} = \frac{\text{odaklar arası uzaklık}}{\text{büyük eksen uzunluğu}}$$

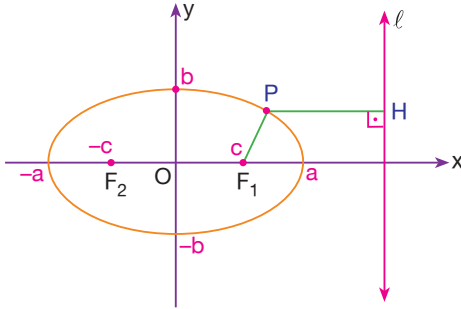
$$e = \frac{c}{b} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \text{ bulunur.}$$

Elipsin Doğrultmanları

Hatırlayalım; Bir konikte sabit bir noktaya olan uzaklığın, sabit bir doğruya olan uzaklığa oranına dış merkezlik (e) demiştik.

(Sabit nokta F : odak, sabit doğru : doğrultman, sabit oran : e dış merkezlik)

O halde yatay elips için doğrultmanları bulalım.

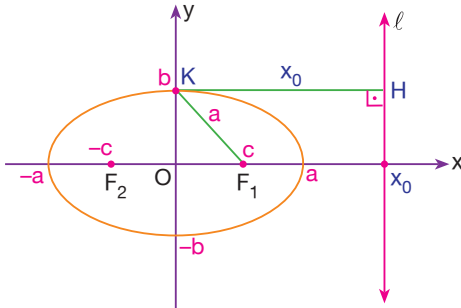


$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, H)} = e = \frac{c}{a}$$

olacak şekilde ℓ doğrusunu arıyoruz.

Bu oran nasıl olsa değişmeyecek.

O halde değişken P noktasını özel bir noktaya öteleyerek doğrultmanın denklemini bulalım.



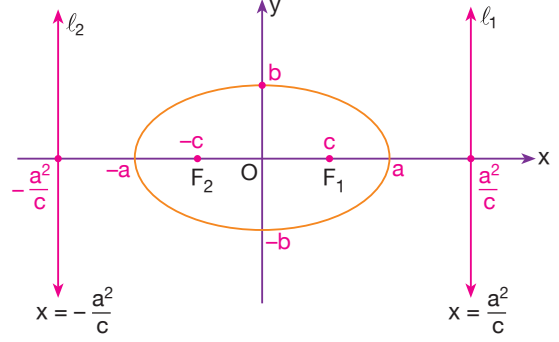
Böylece, $\frac{|KF_1|}{|KH|} = e = \frac{c}{a}$ olacağından,

$$\frac{a}{x_0} = \frac{c}{a} \text{ eşitliği ile } x_0 = \frac{a^2}{c} \text{ bulunur.}$$

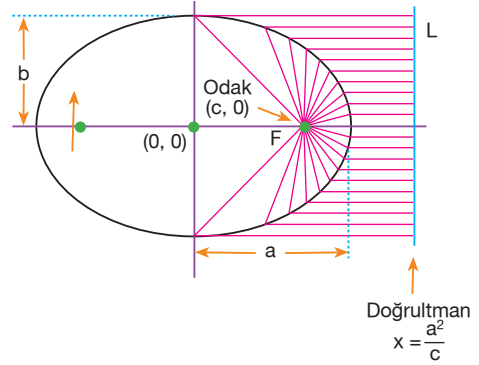
O halde, elipsin bir doğrultmanı $x = \frac{a^2}{c}$ bulunur.

Aynı şekilde diğer doğrultmanında,

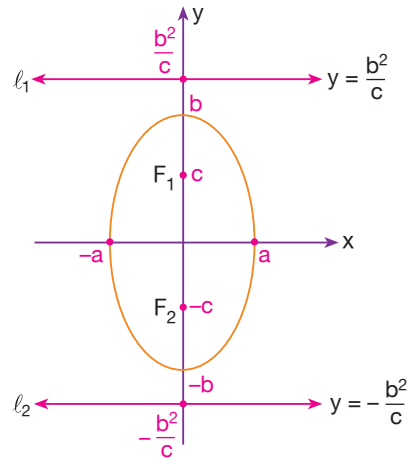
$$x = -\frac{a^2}{c} \text{ olduğu bulunabilir.}$$



ℓ_1 ve ℓ_2 : elipsin doğrultmanları



Düsey Elipsin Doğrultmanları



ℓ_1 ve ℓ_2 : elipsin doğrultmanları

ÖRNEK - 1

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipsinin doğrultmanlarını bulup grafikte gösterelim.

ÇÖZÜM :

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ elipsinde,}$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm 5 \text{ ve}$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3 \text{ olup}$$

$a > b$ olduğundan elips yatay elipstir.

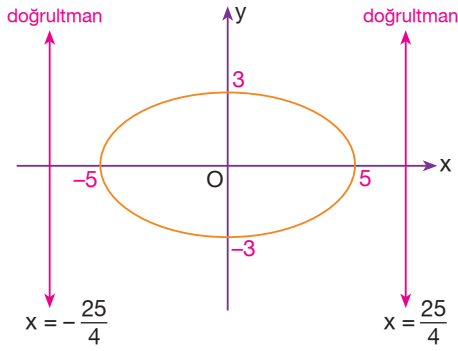
$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ eşitliğinden,}$$

$$25 = 9 + c^2 \Rightarrow c = \pm 4 \text{ tür.}$$

O halde elipsin doğrultmanları,

$$x = \pm \frac{a^2}{c} \Rightarrow x = \pm \frac{25}{4} \text{ doğrularıdır.}$$

Tüm bunları şekle aktaralım.



Elips modelinden esinlenerek yapılmış bir mimari.

ÖRNEK - 2

$9x^2 + 4y^2 = 36$ elipsinin doğrultmanlarını bulup grafikte gösterelim.

ÇÖZÜM :

Denklem düzenlenirse,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Böylece,

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \text{ ve}$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3 \text{ olup}$$

$b > a$ olduğundan elips dikey elipstir.

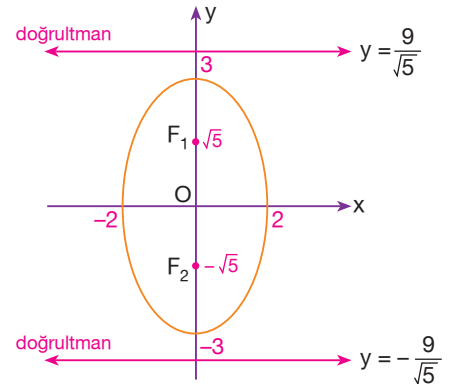
$$b^2 = a^2 + c^2 \text{ eşitliğinden,}$$

$$9 = 4 + c^2 \Rightarrow c = \pm \sqrt{5} \text{ tir.}$$

O halde elipsin doğrultmanları,

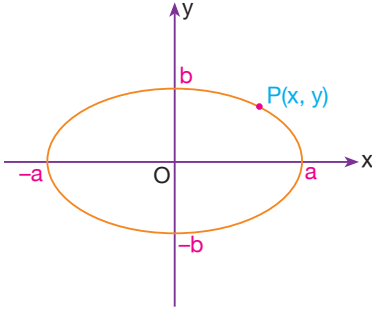
$$y = \pm \frac{b^2}{c} \Rightarrow y = \pm \frac{9}{\sqrt{5}} \text{ doğrularıdır.}$$

Tüm bunları şekle aktaralım.





Elipsin Parametrik Denklemi



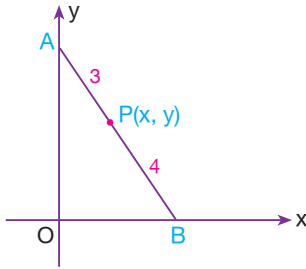
$0 \leq \alpha < 2\pi$ olmak üzere,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ elipsinin parametrik denklemleri,}$$

$$x = a \cos \alpha$$

$$y = b \sin \alpha \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

ÖRNEK - 1



$$A \in Oy$$

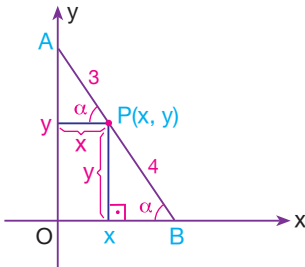
$$B \in Ox$$

$$|AP| = 3 \text{ birim}$$

$$|PB| = 4 \text{ birim}$$

Buna göre, P(x, y) noktalarının oluşturacağı şeklin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM



$$\cos \alpha = \frac{x}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{4}$$

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ olduğundan,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ elips denklemleri elde edilir.}$$

ÖRNEK - 2

$0 \leq \theta < 2\pi$ olmak üzere parametrik denklemleri,

$$x = 4 \cos \theta$$

$$y = 5 \sin \theta$$

olan elipsin standart denklemini bulalım.

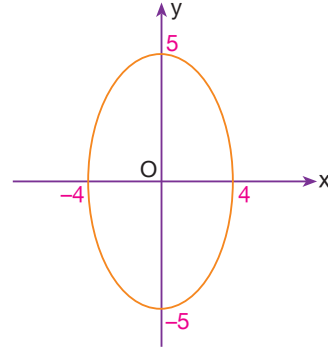
ÇÖZÜM

$$x = 4 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{x}{4}$$

$$y = 5 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{y}{5} \text{ ve}$$

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ olduğundan,

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \text{ elips denklemleri elde edilir.}$$



ÖRNEK - 3

$0 \leq \theta < 2\pi$ olmak üzere parametrik denklemleri,

$$x = 2 - 3 \cos \theta$$

$$y = 5 + 4 \sin \theta$$

olan elipsin standart denklemini bulalım.

ÇÖZÜM

$$x = 2 - 3 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{x-2}{-3}$$

$$y = 5 + 4 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{y-5}{4} \text{ ve}$$

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ olduğundan,

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1 \text{ elips denklemleri elde edilir.}$$



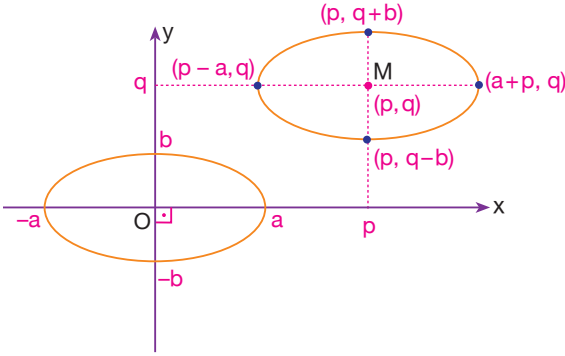
Merkezcil Olmayan Elipsler

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsini $\vec{v} = (p, q)$ doğrultusunda

ötelesek merkezcil olmayan,

merkezi $M(p, q)$ olan,

$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ elipsini elde ederiz.



ÖRNEK - 1

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ elipsinin $\vec{u} = (2, 1)$ doğrultusun-

da ötelenmişinin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ elipsinin $\vec{u} = (2, 1)$ doğrultusunda

ötelenmiş elipsin 2 birim sağa ($\rightarrow$) ve 1 birim yukarıya ($\uparrow$) ötelenmiştir.

O halde,

$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ denklemi elde edilir.

ÖRNEK - 2

$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$ elipsinin,

- a) Merkezinin koordinatlarını
 - b) Odaklarının koordinatlarını
- bulalım.

ÇÖZÜM

$$\left. \begin{array}{l} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ y+4=0 \Rightarrow y=-4 \end{array} \right\} \text{Merkezi } M(2, -4)$$

$$\text{b) } \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1 \text{ elipsi } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

elipsin $\vec{v} = (2, -4)$ doğrultusunda ötelenmiştir.

O halde, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipsinin odaklarının koordinatlarını $\vec{v} = (2, -4)$ doğrultusunda öteleyelim.

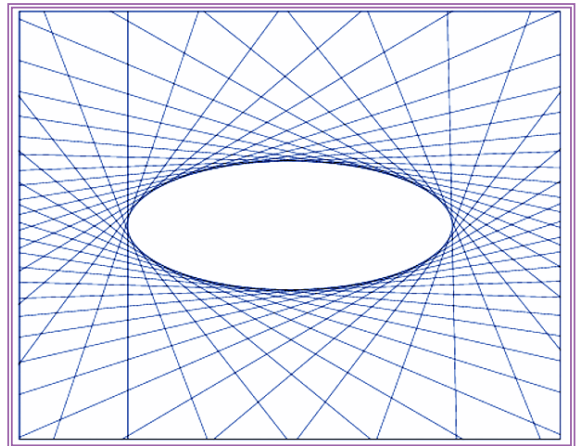
$a = 5, b = 3$ olup $a^2 = b^2 + c^2$ eşitliğinden,

$5^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow c = \pm 4$ ve $a > b$ olduğundan elips yatay elipstir.

Bu durumda odaklar $F_1(4, 0)$ ve $F_2(-4, 0)$ olup

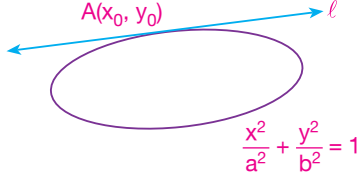
$\vec{v} = (2, -4)$ doğrultusunda ötelesek,

$F_1' = (6, -4)$ ve $F_2' = (-2, -4)$ bulunur.



Bir Elipse Üzerindeki Bir Noktadan Çizilen Teğet Doğrusunun Denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ elipsine üzerindeki } A(x_0, y_0) \text{ noktasından çizilen teğet doğrusu } \ell \text{ olsun.}$$



ℓ doğrusunun denklemi,

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$$

ya da

$$b^2 \cdot x_0 \cdot x + a^2 \cdot y_0 \cdot y = a^2 b^2$$

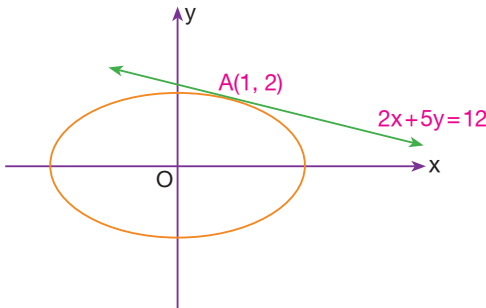
yazılabilir.

ÖRNEK - 1

$4x^2 + 5y^2 = 24$ elipsine üzerindeki $A(1, 2)$ noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM

$$4 \cdot 1 \cdot x + 5 \cdot 2 \cdot y = 24 \Rightarrow 2x + 5y = 12$$

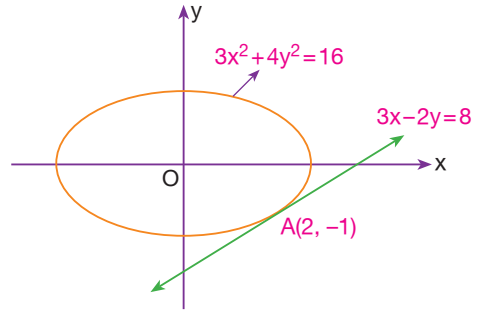


ÖRNEK - 2

$3x^2 + 4y^2 = 16$ elipsine $A(2, -1)$ noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM

$(2, -1)$ noktası $3x^2 + 4y^2 = 16$ elipsin denkleminde yerine yazıldığında eşitlik sağlanacağından nokta elips yayı üzerindedir.



O halde, teğet doğrusunun denklemi,

$$3 \cdot 2 \cdot x + 4(-1) \cdot y = 16 \Rightarrow 3x - 2y = 8 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

$x^2 + 2y^2 = 34$ elipsine üzerine $A(4, k)$ noktasından çizilen teğet doğrularının denklemini bulalım.

ÇÖZÜM

$A(4, k)$ noktası denklemi sağlayacağından,

$$4^2 + 2 \cdot k^2 = 34 \Rightarrow k = \pm 3 \text{ bulunur.}$$

O halde,

$x^2 + 2y^2 = 34$ elipsine $A(4, \pm 3)$ noktalarından çizilen teğet doğrularının denklemleri,

$$4x + 2(\pm 3)y = 34 \text{ eşitliğinden,}$$

$$2x + 3y = 17 \text{ ve } 2x - 3y = 17 \text{ denklemleridir.}$$

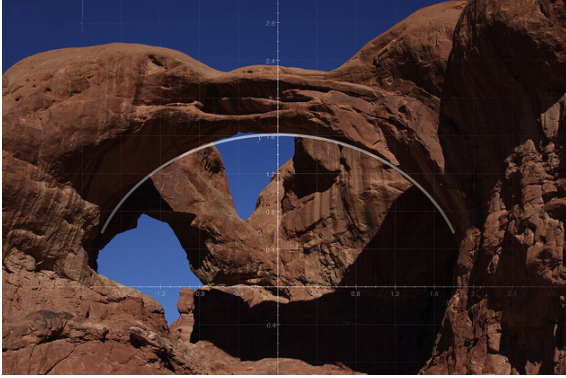
Hiperbol

Düzlemde sabit iki noktaya uzaklıkları farkının sabit olduğu noktaların geometrik yerine **hiperbol** denir.

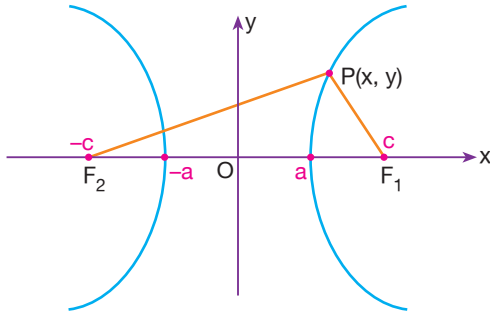
Sabit noktalar hiperbolün odaklarıdır. (F_1, F_2)

$[F_1F_2]$ nin orta noktasına hiperbolün merkezi denir.

Sabit uzaklık $2a$ olarak seçilir.



Yatay hiperbol ;



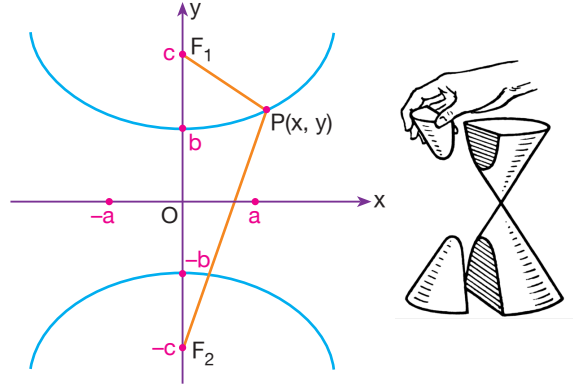
$$|d(P, F_2) - d(P, F_1)| = 2a \text{ eşitliğinden,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ eşitliği elde edilir.}$$

(Burada $c^2 = a^2 + b^2$ dir.)



Düşey hiperbolde ;



$$|d(P, F_2) - d(P, F_1)| = 2b \text{ eşitliğinden,}$$

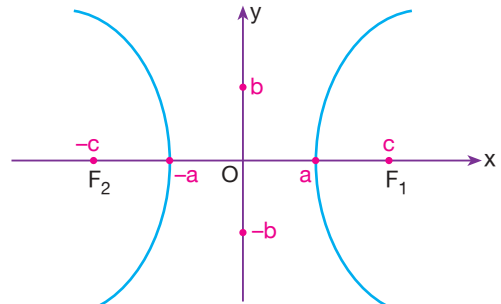
gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ eşitliği elde edilir.}$$

(Buradan $c^2 = a^2 + b^2$ dir.)

Hiperbolün Eksen Uzunlukları

Yatay hiperbolde;

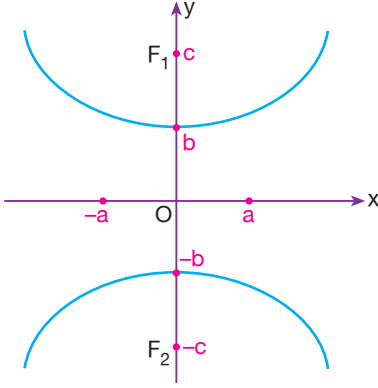


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (c^2 = a^2 + b^2)$$

2a : Asal eksen uzunluğu

2b : Yedek eksen uzunluğu

Düşey Hiperbolde ;



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (c^2 = a^2 + b^2)$$

2b : Asal eksen uzunluğu

2a : Yedek eksen uzunluğu



NOT :

Odakların bulunduğu eksen koniğin eksendir.
(Koniğin eksendir.)

ÖRNEK - 1

$3y^2 - 5x^2 = 30$ hiperbolünün grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

Denklem düzenlenirse,

$$\frac{y^2}{10} - \frac{x^2}{6} = 1 \text{ eşitliği elde edilir.}$$

Böylece,

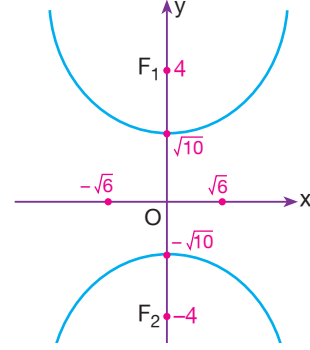
$$a^2 = 6 \Rightarrow a = \pm \sqrt{6} \text{ ve}$$

$$b^2 = 10 \Rightarrow b = \pm \sqrt{10} \text{ olup}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ eşitliğinden,}$$

$$c^2 = 6 + 10 \Rightarrow c = \pm 4 \text{ tür.}$$

Böylece hiperbolün ekseni y ekseni olduğundan grafiği aşağıdaki gibidir.



Yukarıdaki hiperbolün,

Asal eksen uzunluğu : $2\sqrt{10}$ birim ve

Yedek eksen uzunluğu : $2\sqrt{6}$ birim dir.

ÖRNEK - 2

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ hiperbolünün grafiğini çizelim.}$$

ÇÖZÜM

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ hiperbolünde,}$$

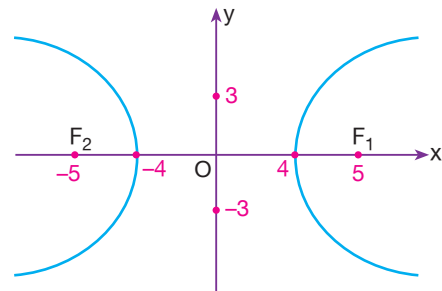
$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4 \text{ ve}$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3 \text{ olup}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ eşitliğinden,}$$

$$c^2 = 16 + 9 \Rightarrow c = \pm 5 \text{ tir.}$$

Böylece hiperbolün grafiği aşağıdaki gibidir.



Yukarıdaki hiperbolün,

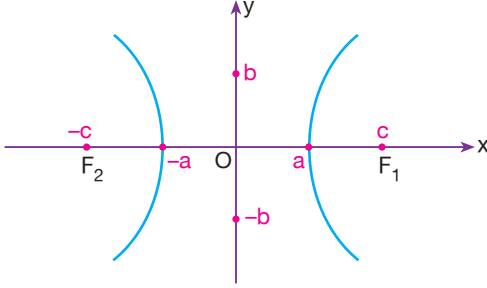
Asal eksen uzunluğu : 8 birim ve

Yedek eksen uzunluğu : 6 birim dir.



Hiperbolün Dış Merkezliği

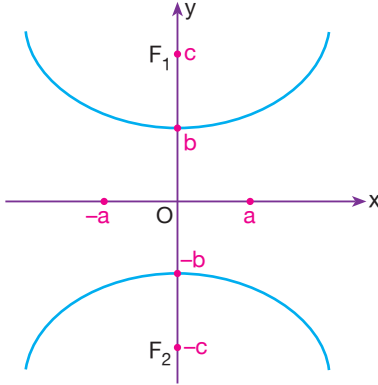
Yatay Hiperbolde;



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ hiperbolünde dış merkezlik}$$

$$e = \frac{\text{odaklar arası uzaklık}}{\text{asal eksen uzunluğu}} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} > 1 \text{ dir.}$$

Düşey Hiperbolde;



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ hiperbolün dış merkezliği}$$

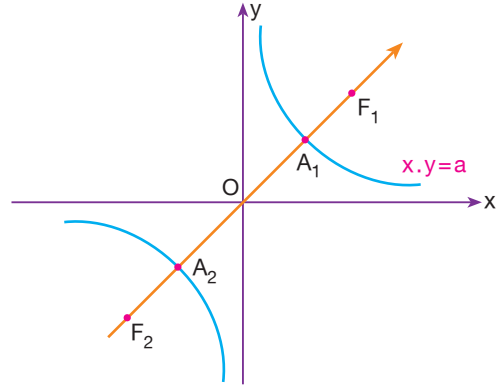
$$e = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b} > 1 \text{ dir.}$$



NOT :

Hiperbolün şekli nasıl olursa olsun,
dış merkezlik $e = \frac{\text{odaklar arası uzaklık}}{\text{asal eksen uzunluğu}} > 1$
olduğu unutulmamalıdır.

Örneğin ;



$$e = \frac{d(F_1, F_2)}{d(A_1, A_2)} \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 1

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1 \text{ hiperbolünün dış merkezliğini}$$

bulalım.

ÇÖZÜM :

$$a^2 = 20 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{5} \text{ ve}$$

$$b^2 = 5 \Rightarrow b = \pm \sqrt{5} \text{ olup}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ eşitliğinden,}$$

$$c^2 = 20 + 5 \Rightarrow c = \pm 5 \text{ tir.}$$

Böylece hiperbolün eksenleri x eksenidir olduğundan
dış merkezlik,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{2\sqrt{5}} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

$3y^2 - 2x^2 = 36$ hiperbolünün dış merkezliğini bulalım.

ÇÖZÜM

Denklem düzenlenirse,

$$\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{18} = 1 \text{ eşitliği elde edilir.}$$

Buna göre,

$$a^2 = 18 \Rightarrow a = \pm 3\sqrt{2} \text{ ve}$$

$$b^2 = 12 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{3} \text{ olup}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ eşitliğinden,}$$

$$c^2 = 18 + 12 \Rightarrow c = \pm \sqrt{30} \text{ dur.}$$

Böylece hiperbolün asal eksen y eksen olduğundan,

$$e = \frac{c}{b} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{30}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ bulunur.}$$

Hiperbolün Doğrultmanları

Hatırlayalım :

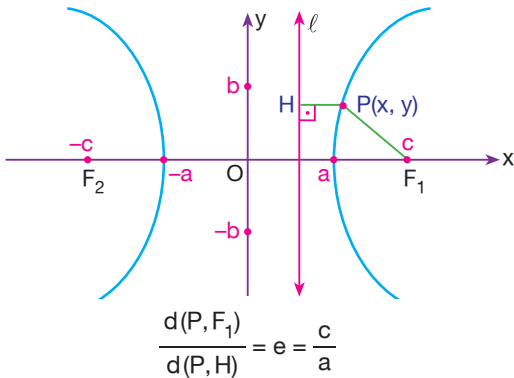
Bir konikte sabit bir noktaya olan uzaklığın sabit bir doğruya olan uzaklığa oranına dış merkezlik (e) demiştik.

Sabit nokta : F (odak)

Sabit doğru : ℓ (doğrultman)

Sabit oran : e (dış merkezlik)

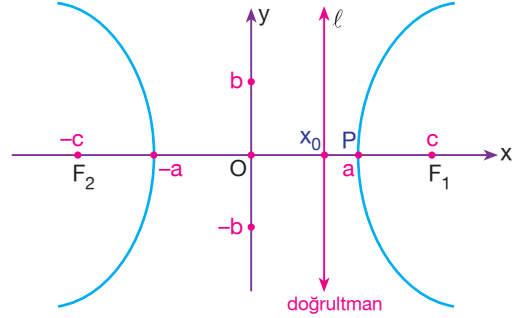
O halde, yatay hiperbol için doğrultmanları bulalım.



olacak şekilde ℓ doğrusunu arıyoruz.

Bu oran nasıl olsa değişmeyecek!

O halde P noktasını özel (yeri bilinen) bir noktaya öteleyelim.



$$\text{Böylece } \frac{d(P, F_1)}{d(P, \ell)} = \frac{c}{a} \text{ olacağından,}$$

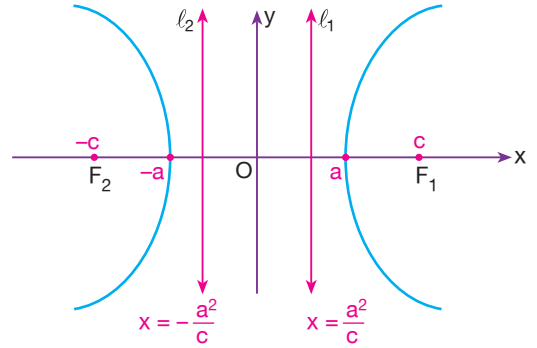
$$\frac{c - a}{a - x_0} = \frac{c}{a} \text{ eşitliği ile}$$

$$ac - cx_0 = ac - a^2 \Rightarrow x_0 = \frac{a^2}{c} \text{ bulunur.}$$

O halde hiperbolün bir doğrultmanı $x = \frac{a^2}{c}$ doğrusudur.

Aynı şekilde diğer doğrultmanında,

$$x = -\frac{a^2}{c} \text{ olduğu bulunabilir.}$$



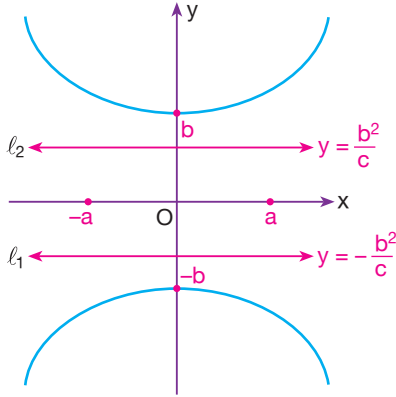
ℓ_1 ve ℓ_2 : hiperbolün doğrultmanları



NOT :

$x \cdot y = k$ denklemi bir hiperbol belirtir.

Düşey hiperbolün doğrultmaları;



$$l_1: y = \frac{b^2}{c} \text{ ve } l_2: y = -\frac{b^2}{c}$$

hiperbolün doğrultmanlarıdır.

ÖRNEK - 3

$$\frac{x^2}{14} - \frac{y^2}{11} = 1 \text{ hiperbolünün doğrultmanlarını}$$

bulalım.

ÇÖZÜM

$$a^2 = 14 \Rightarrow a = \pm \sqrt{14} \text{ ve}$$

$$b^2 = 11 \Rightarrow b = \pm \sqrt{11} \text{ olup}$$

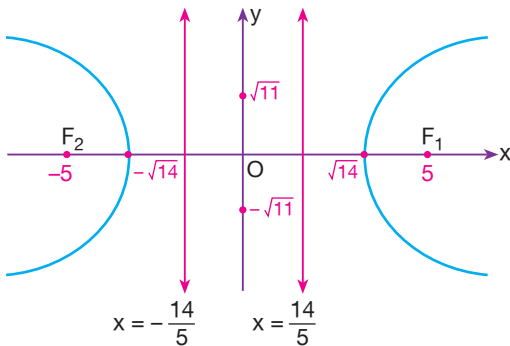
$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ eşitliğinden,}$$

$$c^2 = 14 + 11 \Rightarrow c = \pm 5 \text{ tir.}$$

Böylece hiperbolün eksenleri x eksenidir, olduğundan,

doğrultman doğruları $x = \pm \frac{a^2}{c}$ şeklindedir.

O halde doğrultmanlar; $x = \pm \frac{14}{5}$ doğrularıdır.



ÖRNEK - 4

$3y^2 - 2x^2 = 24$ hiperbolünün doğrultmanlarını bulalım.

ÇÖZÜM

Denklem düzenlenirse,

$$\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{12} = 1 \text{ eşitliği elde edilir.}$$

Buna göre,

$$a^2 = 12 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{3} \text{ ve}$$

$$b^2 = 8 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{2} \text{ olup}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ eşitliğinden,}$$

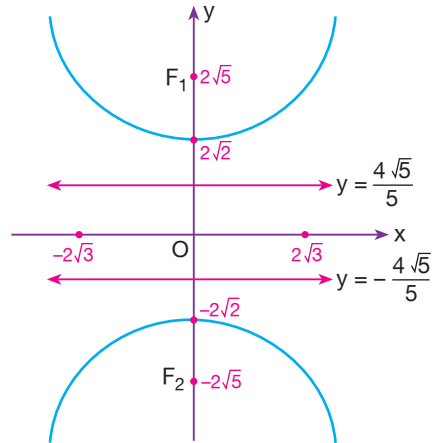
$$c^2 = 12 + 8 \Rightarrow c = \pm 2\sqrt{5} \text{ tir.}$$

Böylece hiperbolün eksenleri y eksenidir, olduğundan,

doğrultman doğruları $y = \pm \frac{b^2}{c}$ şeklindedir.

O halde doğrultmanlar;

$$y = \pm \frac{8}{2\sqrt{5}} = \pm \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ doğrularıdır.}$$



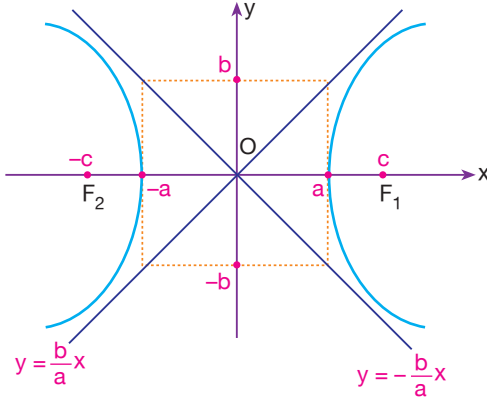
NOT :

Hiperbolün iki tane simetri eksenidir ve merkezine göre 180° dönme simetrisine sahiptir.

Hiperbolün Asimptotları

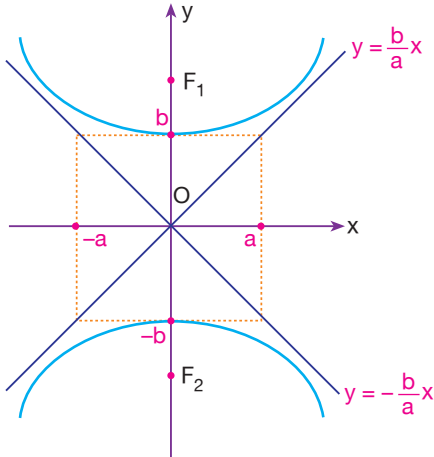
Hiperbolün kollarına sonsuzda teğet olan ve orijinden geçen doğrulara **hiperbolün asimptotları** denir.

Yatay hiperbol ;



Yatay hiperbolün asimptotları $y = \pm \frac{b}{a}x$ dir.

Düşey hiperbol ;



Düşey hiperbolün asimptotları $y = \pm \frac{b}{a}x$ dir.

✓ Pratik Bilgi

Bir hiperbolün denkleminde eşitliğin sağ tarafında sayı yerine 0 yazılırsa,

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ denkleminde } 1 \text{ yerine } 0 \text{ yazılırsa} \right)$$

asimptotların denklemleri bulunur.

ÖRNEK - 1

$x^2 - 3y^2 = 7$ hiperbolünün asimptotlarını bulalım.

ÇÖZÜM :

7 yerine 0 yazalım.

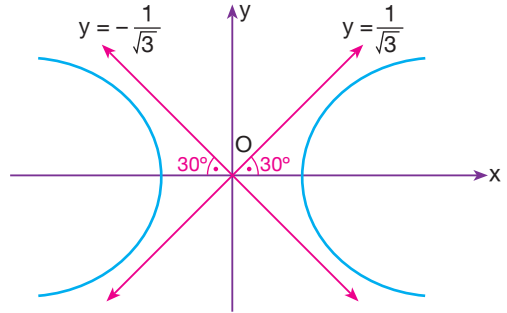
$$x^2 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

O halde,

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \text{ ve } y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

doğruları hiperbolün asimptotlarıdır.

Asimptotlarla birlikte hiperbolün grafiği;



ÖRNEK - 2

A(k, 2) noktası $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ hiperbolünün

asimptotları üzerinde olduğuna göre, k nin değerlerini bulalım.

ÇÖZÜM :

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1 \text{ hiperbolünün asimptotları,}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}x \text{ doğruları olup}$$

A(k, 2) noktası denklemi sağlar.

O halde,

$$2 = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}k \Rightarrow k = \pm \frac{4}{\sqrt{6}} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

$3y^2 - 12x^2 = 25$ hiperbolünün asimptotlarını bulalım.

ÇÖZÜM :

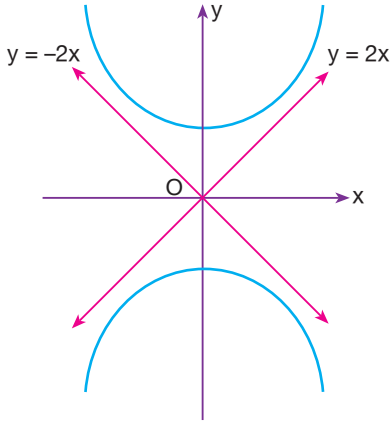
25 yerine 0 yazalım.

$$3y^2 - 12x^2 = 0 \Rightarrow y = \pm 2x$$

O halde, $y = 2x$ ve $y = -2x$

doğruları hiperbolün asimptotlarıdır.

Asimptotlarla birlikte hiperbolün grafiği;



ÖRNEK - 4

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbolünde odaklardan birinin asimptotlardan birine uzaklığını bulalım.

ÇÖZÜM :

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4 \text{ ve } b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3 \text{ olup}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ eşitliğinden,}$$

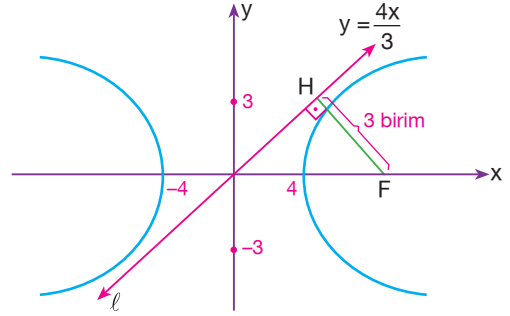
$$c^2 = 16 + 9 \Rightarrow c = \pm 5 \text{ olup}$$

Hiperbolün asimptotları $y = \pm \frac{3}{4}x$ (ℓ) bulunur.

Hiperbol yatay hiperbol olduğundan bir odak noktasının koordinatları $F(5, 0)$ dir.

O halde, $F(5, 0)$ noktasının $y = \frac{3x}{4} \dots (\ell)$ doğrusunun uzaklığını arıyoruz.

$$d(F, \ell) = \frac{|3 \cdot 5 - 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ birim bulunur.}$$

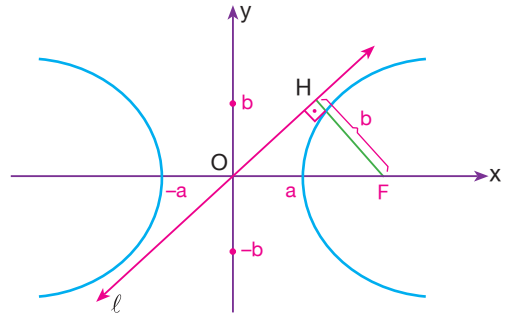


✓ Pratik Bilgi

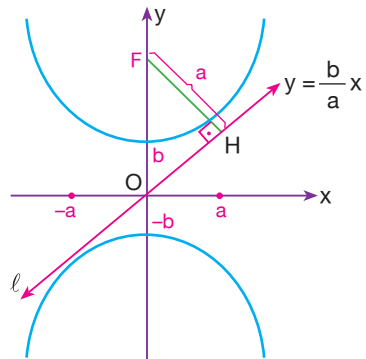
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolünde odaklardan birinin asimptotlardan birine uzaklığı $|b|$ birimdir.

ya da

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ hiperbolünün odaklarından birinin asimptotlarından birine uzaklığı $|a|$ birimdir.



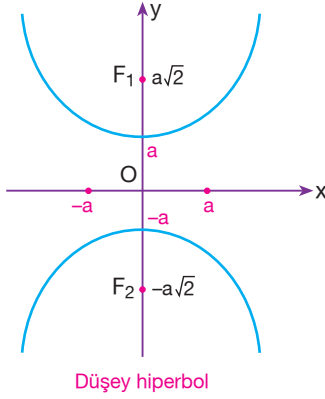
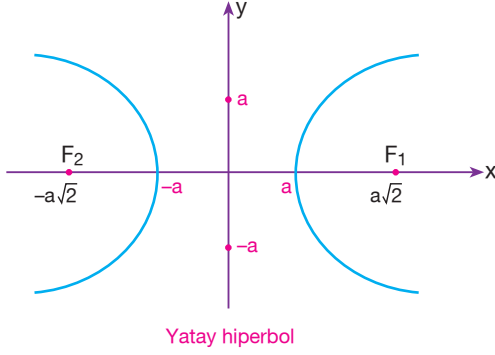
Yatay hiperbol



Düşey hiperbol

İkizkenar Hiperbol

$x^2 - y^2 = a^2$ ya da $y^2 - x^2 = a^2$ hiperbolüne **ikizkenar hiperbol** denir.



ÇÖZÜM

$x^2 - y^2 = 12$ denklemi, $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{12} = 1$ şeklinde yazılabilir.

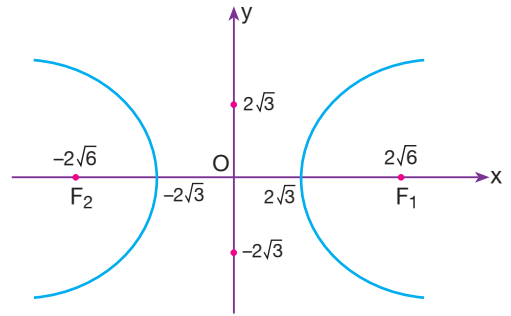
$$a^2 = 12 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{3} \text{ ve}$$

$$b^2 = 12 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{3} \text{ olup}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ eşitliğinden,}$$

$$c^2 = 12 + 12 \Rightarrow c = \pm 2\sqrt{6} \text{ dir.}$$

Böylece hiperbolün ekseni x ekseni olduğundan grafiği aşağıdaki gibidir.



Böylece hiperbolün,

- Asal eksen uzunluğu $|2a| = 4\sqrt{3}$ birim
- Yedek eksen uzunluğu $|2b| = 4\sqrt{3}$ birim
- Dış merkezliği $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{2}$
- Asimptotları $y = \pm \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm x$ tir.

ÖRNEK - 1

$x^2 - y^2 = 12$ hiperbolünün,

- Asal eksen uzunluğunu
- Yedek eksen uzunluğunu
- Dış merkezliğini
- Asimptotlarını

bulalım.

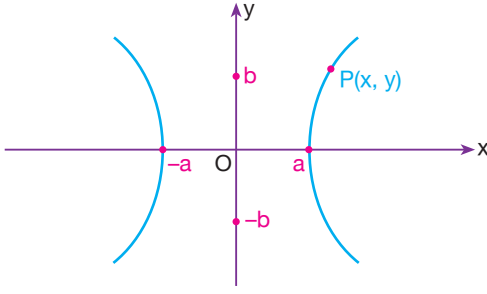


NOT :

- Bir ikizkenar hiperbolün dış merkezliği $e = \sqrt{2}$ dir.
- Bir ikizkenar hiperbolün asimptotları $y = \pm x$ doğrudur.



Hiperbolün Parametrik Denklemi



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ hiperbolü ve } 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

özdeşliği birlikte düşünülürse,

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha \Leftrightarrow 1 + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \text{ eşleşmesinden,}$$

$$\frac{y}{b} = \tan \alpha \text{ ve } \frac{x}{a} = \sec \alpha \text{ yazılabilir.}$$

Böylece,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ hiperbolünün parametrik denklemi,}$$

$x = a \sec \alpha$ ve $y = b \tan \alpha$ şeklinde yazılabilir.

ÖRNEK - 2

$0 \leq \alpha < 2\pi$ olmak üzere parametrik denklemi,

$$x = 1 + 2 \tan \alpha \text{ ve } y = 3 - 4 \sec \alpha$$

olan hiperbolün standart denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

$$x = 1 + 2 \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{x-1}{2}$$

$$y = 3 - 4 \sec \alpha \Rightarrow \sec \alpha = \frac{y-3}{-4}$$

$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ eşitliğinden,

$$1 + \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{(y-3)^2}{16} \text{ olup}$$

$$\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \text{ hiperbolü elde edilir.}$$

Dikkat edilirse,

$$\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \text{ hiperbolü,}$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1 \text{ hiperbolünün}$$

$\vec{v} = (1, 3)$ doğrultusunda ötelenmiştir.

ÖRNEK - 1

$0 \leq \alpha < 2\pi$ olmak üzere parametrik denklemi,

$$x = 7 \tan \alpha \text{ ve } y = 6 \sec \alpha$$

olan hiperbolün standart denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

$$\tan \alpha = \frac{x}{7} \text{ ve } \sec \alpha = \frac{y}{6} \text{ olup}$$

$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ eşitliğinden

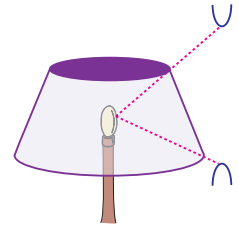
$$1 + \frac{x^2}{49} = \frac{y^2}{36} \Rightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{49} = 1$$

düşey hiperbolü elde edilir.

ARAŞTIRALIM - ÖĞRENELİM

Hiperbol, elips ve parabol kadar doğada ve günlük yaşamda sık görülen bir eğri değildir. Ama yine de salonumuzda görme şansımız var : Konik bir abajurun duvarda bıraktığı gölge bir hiperboldür.

Altıgen bir kurşun kalemi kalem traşla açarsanız da hiperbolleri görürsünüz.



Çok hızlı giden bir uçağın ardında bıraktığı ses dalgaları bir koni biçiminde yayılırlar ve yeryüzünün bir düzlem olduğunu varsayarsak; aynı anda yere çarpan ses dalgalarının oluşturduğu noktalar kümesi bir hiperbolün parçasıdır. (M.D. 2005 Yaz Sayı : 2)

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Elipsinin asal eksen uzunluğu kaç birimdir?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

2. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$

Elipsinin yedek eksen uzunluğu kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{81} = 1$

Elipsinin odaklar arası uzaklığı kaç birimdir?

- A) $\sqrt{77}$ B) $2\sqrt{19}$ C) $\sqrt{70}$
D) $2\sqrt{15}$ E) $2\sqrt{77}$

4. $16x^2 + 9y^2 = 144$

Elipsinin odaklar arası uzaklığı kaç birimdir?

- A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{7}$ E) $4\sqrt{2}$

5. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

Elipsine ait en uzak iki nokta arasındaki uzaklık kaç birimdir?

- A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

6. $16x^2 + 25y^2 = 400$

Elipsinin odaklarının koordinatları nedir?

- A) $(\pm 1, 0)$ B) $(\pm 2, 0)$ C) $(\pm 3, 0)$
D) $(0, \pm 4)$ E) $(\pm 4, 0)$

7. $9x^2 + y^2 = 36$

Elipsinin odağından geçen en uzun kirişi kaç birimdir?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

8. $\frac{(x-5)^2}{3} + \frac{(y+2)^2}{433} = 1$

Elipsinin merkezinin koordinatları toplamı kaçtır?

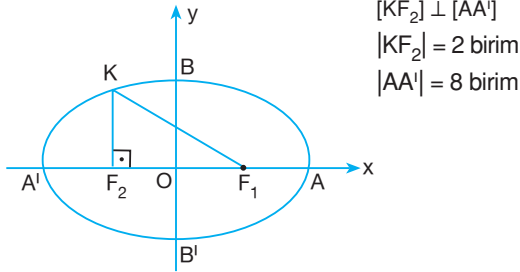
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

9. $\frac{(x-8)^2}{25} + \frac{(y-17)^2}{16} = 1$

Elipsin odaklarının koordinatları toplamı kaçtır?

- A) 36 B) 40 C) 44 D) 48 E) 50

10.

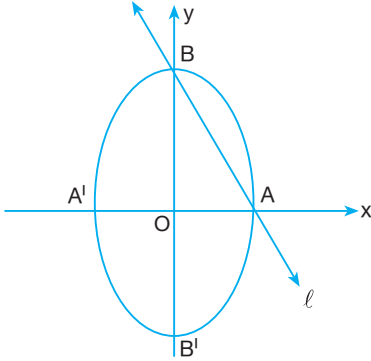


Yukarıda odak noktaları F₁ ve F₂ olan merkezli elips çizilmiştir.

Buna göre, odaklar arası uzaklık kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $4\sqrt{2}$ E) 6

11.

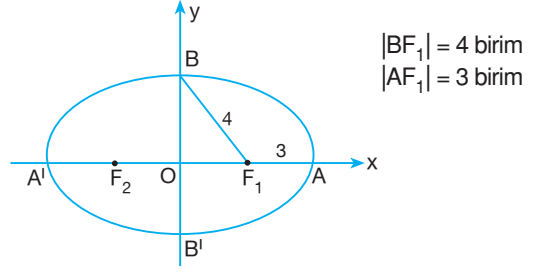


Denklemi, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ olan elips ve elipsin A ve B köşelerinden geçen ℓ doğrusu çizilmiştir.

Buna göre, orijinin bu doğruya uzaklığı kaç birimdir?

- A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{6}{5}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $\frac{12}{5}$ E) $\frac{24}{5}$

12.



Odakları F₁ ve F₂ olan şekildeki merkezli elipsin denklemi nedir?

A) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$ B) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$

C) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{14} = 1$ D) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{10} = 1$

E) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{13} = 1$

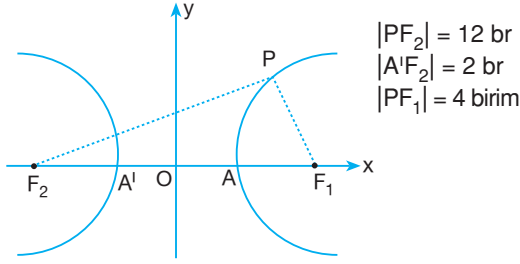
13. Odak noktaları F₁(2, -9), F₂(3, -5) olan elips K(-3, 3) noktasından geçtiğine göre bu elipsin asal eksen uzunluğu kaç birimdir?

- A) 23 B) 24 C) 25 D) 26 E) 27

14. Merkezi M(-3, 4) ve bir odağı F(1, 1) olan elipsin yedek eksen uzunluğu 24 birim olduğuna göre, asal eksen uzunluğu kaç birimdir?

- A) 24 B) 25 C) 26 D) 28 E) 30

1.



$|F_1F_2|$ (odakları arası uzaklık) kaç birimdir?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

2. Asal eksen uzunluğu 8 birim, yedek eksen uzunluğu 6 birim olan hiperbolün asal eksen x eksenine olduğuna göre, denklemi nedir?

- A) $8x^2 - 16y^2 = 123$ B) $9x^2 - 16y^2 = 144$
C) $16x^2 - 9y^2 = 72$ D) $12x^2 + 15y^2 = 125$
E) $3x^2 + 4y^2 = 215$

3.

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Hiperbolünün asal eksen uzunluğu kaç birimdir?

- A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

4.

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Hiperbolünün yedek eksen uzunluğu kaç birimdir?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

5.

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Hiperbolünün odaklarının koordinatları nedir?

- A) $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$ B) $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$
C) $(\pm 4\sqrt{5}, 0)$ D) $(\pm 5\sqrt{5}, 0)$
E) $(\pm 6\sqrt{5}, 0)$

6.

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{8} = 1$$

Hiperbolünün odakları arası uzaklığı kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{10}$ B) $2\sqrt{11}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{13}$ E) $2\sqrt{14}$

7.

$$3x^2 - y^2 = 3$$

Hiperbolünün asimptotları arasındaki geniş açının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 105 B) 110 C) 115 D) 120 E) 135

8.

Dış merkezliği $\frac{5}{4}$ ve asal eksen uzunluğu 16 birim olan hiperbolün odaklar arası uzaklığı kaç birimdir?

- A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

9. $x^2 - y^2 = 24$

Hiperbolünün odakları arası uzaklığı kaç birimdir?

- A) $4\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{3}$
D) $10\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{3}$

10. $x^2 - y^2 = 36$

Hiperbolünün bir odağının, asimptotlardan birine olan uzaklığı kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

11. Odakları $F_1(0, 6)$ ve $F_2(0, -6)$ noktaları olan ve $P(0, -4)$ noktasından geçen hiperbolün denklemi nedir?

- A) $5x^2 - 14y^2 = 146$ B) $5x^2 - y^2 = 160$
C) $5y^2 - 4x^2 = 81$ D) $5y^2 - 4x^2 = 80$
E) $10y^2 - 14x^2 = 121$

12. Odaklar arası uzaklığı 12 birim olan ikizkenar hiperbolün denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $y^2 - x^2 = 18$ B) $y^2 - x^2 = 16$
C) $y^2 - x^2 = 14$ D) $y^2 - x^2 = 12$
E) $y^2 - x^2 = 10$

13. Parametrik denklemi,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{6} \tan \theta \\ y &= 6 \sec \theta \end{aligned}$$

olan hiperbolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y^2 - 6x^2 = 36$ B) $x^2 - 6y^2 = 36$
C) $x^2 - 6y^2 = 42$ D) $\sqrt{6}x^2 - y^2 = 36$
E) $y^2 - \sqrt{6}x^2 = 36$

14. $\left(\frac{2x-3y}{4}\right) \cdot \left(\frac{2x+3y}{9}\right) = 1$

hiperbolünün dış merkezliği kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{65}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{97}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{77}}{5}$

15. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

Hiperbolünün asimptotlarından birinin denklemi nedir?

- A) $3y = 2x$ B) $2y = 3x$ C) $3y = 5x$
D) $5y = 3x$ E) $2y = 5x$

16. $A(-6, 0)$ ve $B(6, 0)$ noktaları veriliyor.
 $|PA| - |PB| = 10$ birim

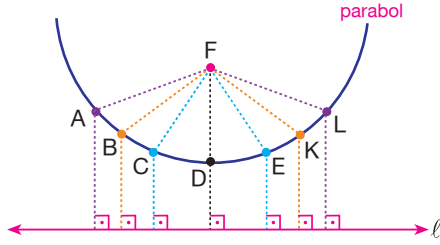
olacak şekilde $P(x, y)$ noktalarının geometrik yerinin denklemi nedir?

- A) $11x^2 - 25y^2 = 275$
B) $25x^2 - 11y^2 = 275$
C) $12x^2 + 16y^2 = 265$
D) $12x^2 - 16y^2 = 165$
E) $15x^2 + 16y^2 = 124$

Parabol



Tanım – 1 : Düzlemde sabit bir noktaya (odak) ve sabit bir doğruya (doğrultman) eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine **parabol** denir.



F : Parabolün odağı

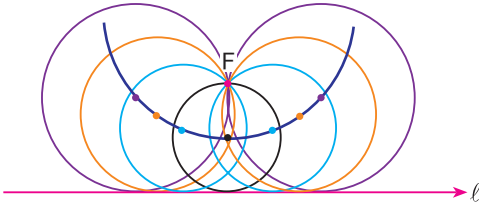
ℓ : Parabolün doğrultmanı

e : Parabolün dış merkezliği

$$e = \frac{d(F, A)}{d(A, \ell)} = \frac{d(F, B)}{d(B, \ell)} = \dots = \frac{d(F, K)}{d(K, \ell)} = \dots = 1$$

parabolün dış merkezliği : e = 1 dir.

Tanım – 2 : Düzlemde sabit bir noktadan (odaktan) geçen ve sabit bir doğruya (doğrultmana) teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir parabol-dür.



e : 1 (yarıçap eşitliği)

F : Parabolün odağı

ℓ : Parabolün doğrultmanı



NOT :

F den geçen ve ℓ doğrusuna teğet olan çember sayısı yeterince çoğaltılırsa parabol daha net görülür.

Parabolün Tepe Noktası

Tepe noktasının, $T = \frac{F + e \cdot D}{1 + e}$ olduğunu hatırlayalım.

Bu durumda, $e = 1$ olduğunda $T = \frac{F + D}{2}$ bulunur.

Tepe noktasını (0, 0) seçersek bu durumda,

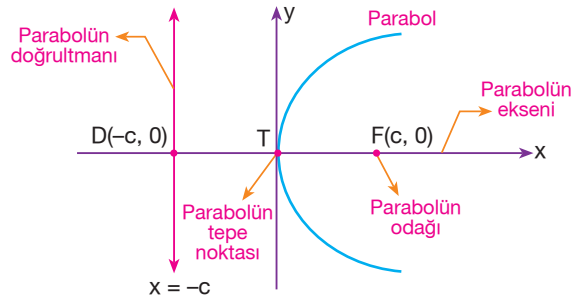
F = -D bulunur.

Yani; D ile F noktaları orijine göre simetriktr.

Merkezcil Parabol

1. Durum :

Parabolün tepe noktasını orijin ve eksenini x ek-seni seçelim.

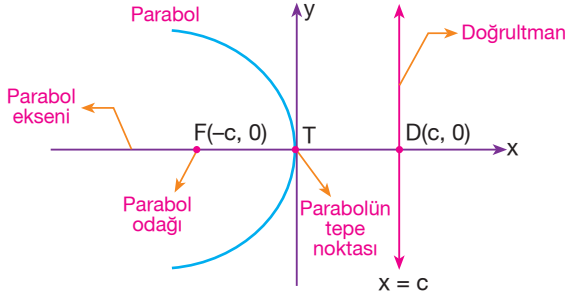


D(-c, 0) : doğrultman ile parabolün ekseninin ke-siştği nokta.



2. Durum :

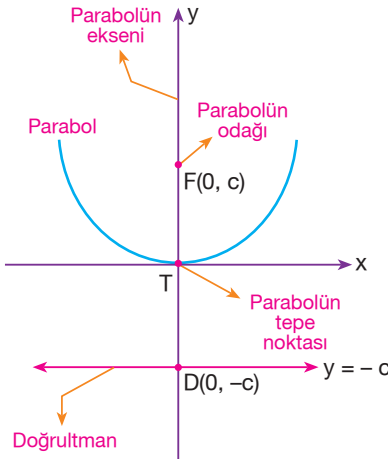
Parabolün tepe noktasını orijin ve eksenini x eksenini seçelim.



$D(c, 0)$: doğrultman ile parabol ekseninin kesiştiği nokta.

3. Durum :

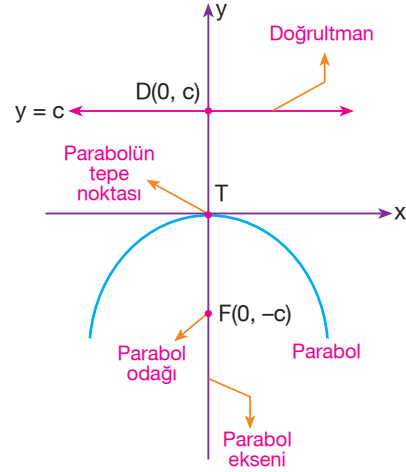
Parabolün tepe noktasını orijin ve eksenini y eksenini seçelim.



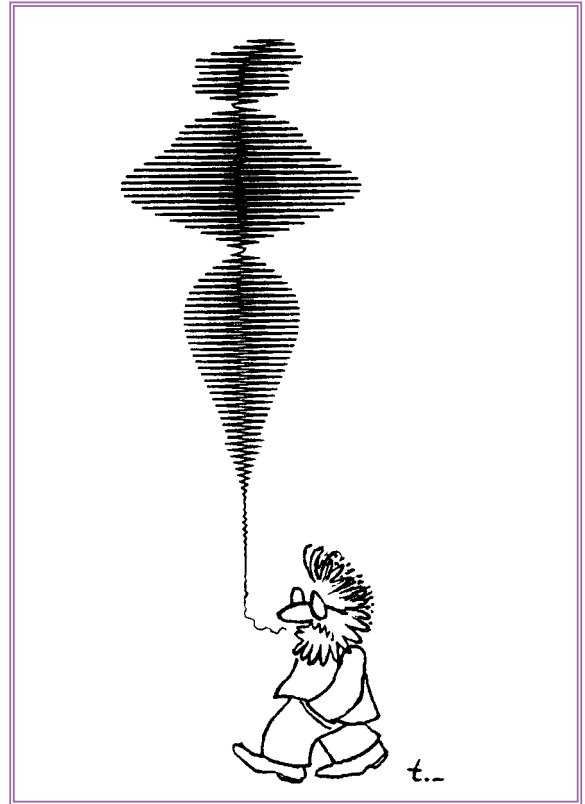
$D(0, -c)$: doğrultman ve parabol ekseninin kesiştiği nokta.

4. Durum :

Parabolün tepe noktasını orijin ve eksenini y eksenini seçelim.



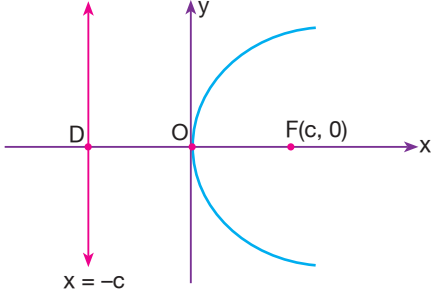
$D(0, c)$: doğrultman ve parabol ekseninin kesiştiği nokta.



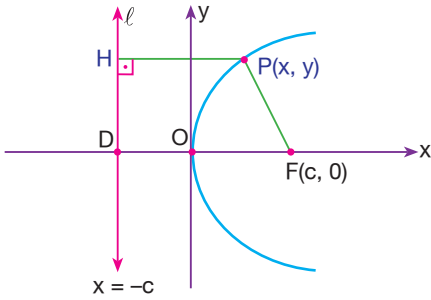
(Matematik Dünyası Dergisi-www.matematikdunyasi.org)

Parabolün Denklemi

Tepe noktası orijin ve eksen x eksen olan parabolün denklemi ;



Parabol üzerinde değişken bir nokta P(x, y) olsun P noktası odak ve doğrultmana eşit uzaklıkta bulunduğundan,



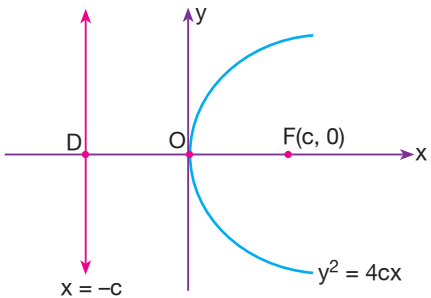
$|PF| = |PH|$ ya da $d(P, F) = d(P, \ell)$ eşitliği ile,

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = x + c \text{ olup}$$

her iki yanın karesini alalım.

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = x^2 + 2xc + c^2$$

$y^2 = 4cx$ elde edilir.



O halde,

$$y^2 = 4cx \text{ parabolü ;}$$

- ✓ Tepe noktası : Orijin
- ✓ Odak noktası : F(c, 0)
- ✓ Doğrultmanı : $x = -c$
- ✓ Eksen : x eksen
- ✓ Dış merkezliği : $e = 1$

olan bir koniktir.

ARAŞTIRILIM – ÖĞRENELİM

Parabolik bir bilardo masasında odak noktasına konulan bir top istakayla herhangi bir istikamete doğru vurulursa, parabole çarpan top parabolün simetri eksenine paralel gider.



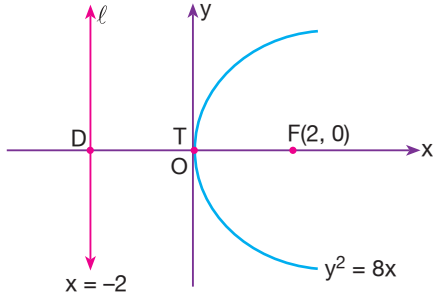
Bu özellik arabaların farlarında kullanılır : Bir parabolü simetri eksenı etrafından döndürerek bir yüzey elde edelim. Bu yüzeyi yansıtıcı bir maddeyle kaplayalım. Odak noktasına yerleştirilmiş bir ampul parabolik yüzeye çarparak dümdüz ileri gidecek ve gecemizi aydınlatacaktır. Eğer ampül odak noktasının biraz üstüne yerleştirilirse, ışığın yoğunluğu azalır ve karşıdan gelen arabanın sürücüsü ışıktan rahatsız olmaz.



Bunun tersi de yapılabilir. Güneş ışınları tek bir noktaya odaklaştırılarak yoğun bir ısı yada ışık elde edilebilir. Güneş enerjisi ile bu yöntem kullanılarak su ısıtılabilir.

👉 Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

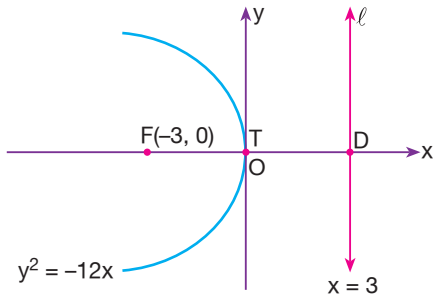
1



Yukarıdaki parabol ;

- ✓ Tepe noktası : orijin
 - ✓ Odak noktası : $F(2, 0)$
 - ✓ Doğrultmanı : $x = -2$
 - ✓ Ekseni : x ekseni
 - ✓ Dış merkezliği : $e = 1$
- olan bir koniktir.

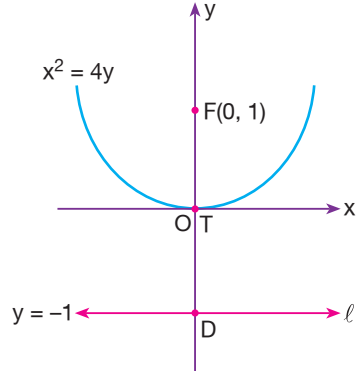
2



Yukarıdaki parabol ;

- ✓ Tepe noktası : orijin
 - ✓ Odak noktası : $F(-3, 0)$
 - ✓ Doğrultmanı : $x = 3$
 - ✓ Ekseni : x ekseni
 - ✓ Dış merkezliği : $e = 1$
- olan bir koniktir.

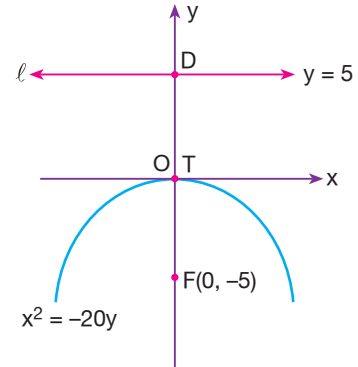
3



Yukarıdaki parabol ;

- ✓ Tepe noktası : orijin
 - ✓ Odak noktası : $F(0, 1)$
 - ✓ Doğrultmanı : $y = -1$
 - ✓ Ekseni : y ekseni
 - ✓ Dış merkezliği : $e = 1$
- olan bir koniktir.

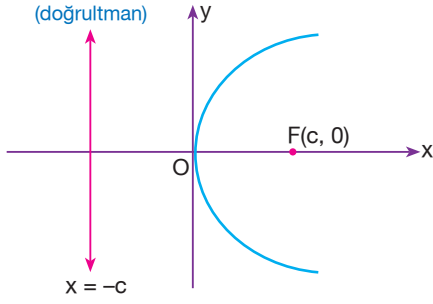
4



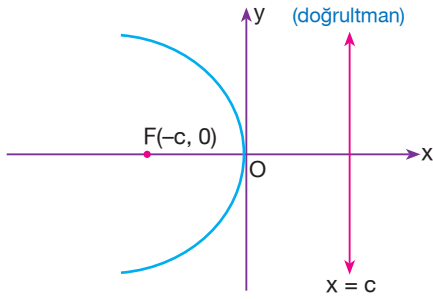
Yukarıdaki parabol ;

- ✓ Tepe noktası : orijin
 - ✓ Odak noktası : $F(0, -5)$
 - ✓ Doğrultmanı : $y = 5$
 - ✓ Ekseni : y ekseni
 - ✓ Dış merkezliği : $e = 1$
- olan bir koniktir.

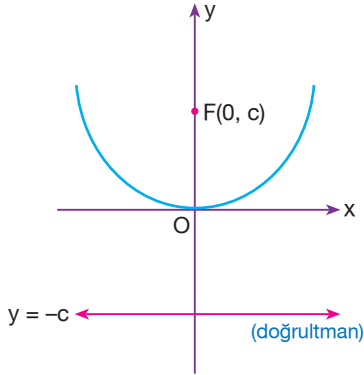
$y^2 = 4cx$ parabolü;



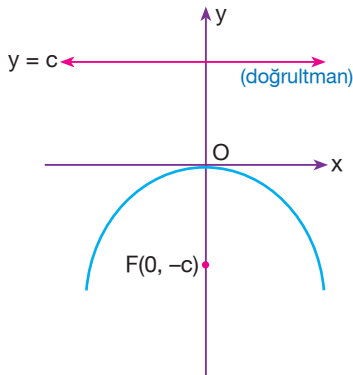
$y^2 = -4cx$ parabolü



$x^2 = 4cy$ parabolü



$x^2 = -4cy$ parabolü



ÖRNEK - 1

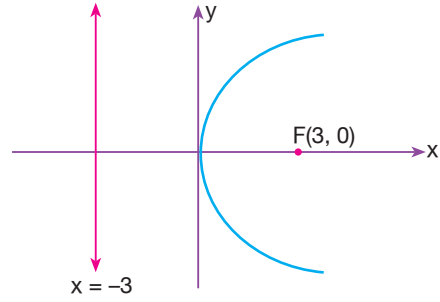
$y^2 = 12x$ parabolünün,

- Köşesini
- Odağını
- Doğrultmanını
- Eksenini

bulalım.

ÇÖZÜM

$4c = 12 \Rightarrow c = 3$ olup parabolün grafiği,



Köşesi $O(0, 0)$, odağı $F(3, 0)$, doğrultmanı $x = -3$, eksenini x eksenidir.

ÖRNEK - 2

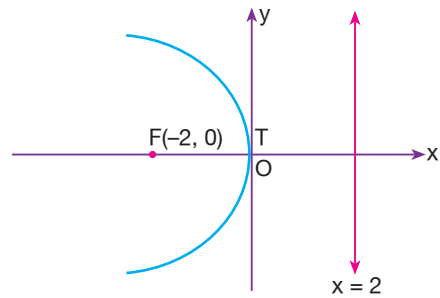
$y^2 = -8x$ parabolünün,

- Köşesini
- Odağını
- Doğrultmanını
- Eksenini

bulalım.

ÇÖZÜM

$4c = -8 \Rightarrow c = -2$ olup parabolün grafiği,



Köşesi $O(0, 0)$, odağı $F(-2, 0)$, doğrultmanı $x = 2$, eksenini x eksenidir.

ÖRNEK - 3

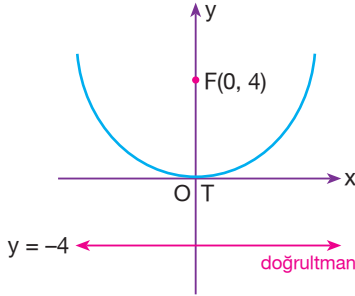
$x^2 = 16y$ parabolünün,

- Köşesini
- Odağını
- Doğrultmanını
- Eksenini

bulalım.

ÇÖZÜM :

$4c = 16 \Rightarrow c = 4$ olup parabolün grafiği,



Köşesi $O(0, 0)$, odağı $F(0, 4)$, doğrultmanı $y = -4$, eksenini y eksenidir.

ÖRNEK - 4

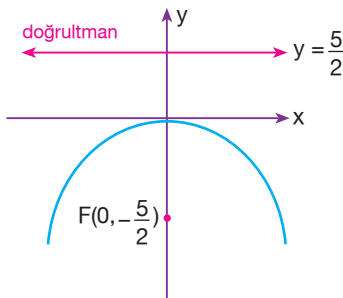
$x^2 = -10y$ parabolünün,

- Köşesini
- Odağını
- Doğrultmanını
- Eksenini

bulalım.

ÇÖZÜM :

$4c = -10 \Rightarrow c = -\frac{5}{2}$ olup parabolün grafiği,



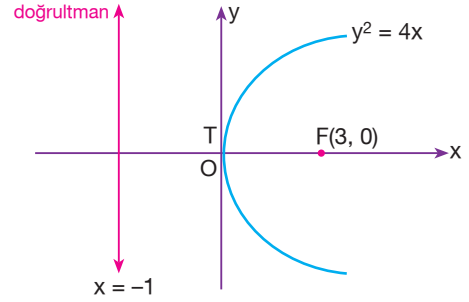
Köşesi $O(0, 0)$, odağı $F(0, -\frac{5}{2})$, doğrultmanı $y = \frac{5}{2}$, eksenini x eksenidir.

ÖRNEK - 5

Odak noktası $F(1, 0)$ ve doğrultmanı $x = -1$ doğrusu olan parabolün grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM :

$4c = 4 \Rightarrow c = 1$ olup $y^2 = 4cx$ eşitliğinden, parabolün denklemi $y^2 = 4x$ bulunur.

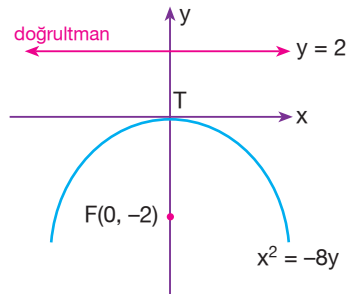


ÖRNEK - 6

Odak noktası $F(0, -2)$ ve doğrultmanı $y = 2$ doğrusu olan parabolün grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM :

$c = -2 \Rightarrow 4c = -8$ olup $x^2 = 4cy$ eşitliğinden, parabolün denklemi $x^2 = -8y$ bulunur.



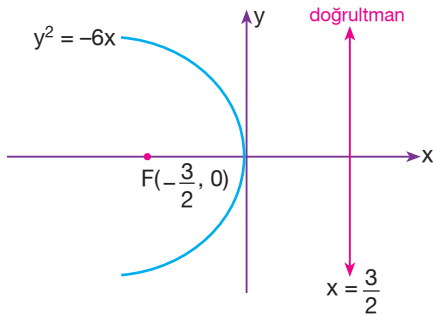


ÖRNEK - 7

Odak noktası $F(-\frac{3}{2}, 0)$ ve doğrultmanı $x = \frac{3}{2}$ doğrusu olan parabolün grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM :

$c = \frac{3}{2} \Rightarrow 4c = 6$ olup $y^2 = -4cx$ eşitliğinden, parabolün denklemi $y^2 = -6x$ bulunur.

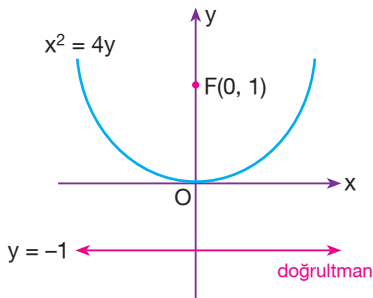


ÖRNEK - 8

Odak noktası $F(0, 1)$ ve doğrultmanı $y = -1$ doğrusu olan parabolün grafiğini çizelim.

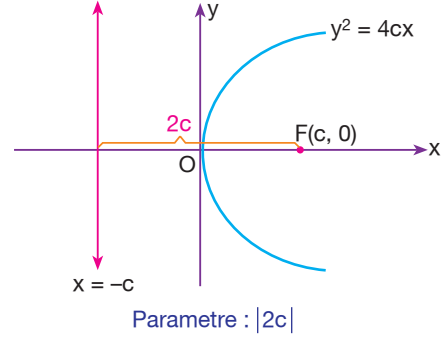
ÇÖZÜM :

$c = 1 \Rightarrow 4c = 4$ olup $x^2 = 4cy$ eşitliğinden, parabolün denklemi $x^2 = 4y$ bulunur.



Parabolün Parametresi

Parabolün odak noktası ile doğrultmanı arasındaki uzaklığa parabolün parametresi denir.



$y^2 = 4cx$ parabolünün parametresi $|2c|$ dir.

ÖRNEK - 1

$y^2 = 8x$ parabolünün parametresini bulalım.

ÇÖZÜM :

$4c = 8 \Rightarrow c = 2$ olup parabolün parametresi $2c = 4$ birim dir.

ÖRNEK - 2

$x^2 = 7y$ parabolünün parametresini bulalım.

ÇÖZÜM :

$4c = 7 \Rightarrow c = \frac{7}{4}$ olup parabolün parametresi $2c = \frac{7}{2}$ birim dir.

Ötelenmiş Parabol (Merkezcil Olmayan Parabol)

$y^2 = 4cx$ parabolün $\vec{u} = (a, b)$ doğrultusunda ötelenmiş ile,

- Köşesi (a, b) noktası
- Odağı $F(c + a, b)$
- Doğrultmanı $x = -c + a$

olan $(y - b)^2 = 4c(x - a)$ parabolü elde edilir.

ÖRNEK - 1

$(y - 1)^2 = 12(x + 3)$ parabolünün,

- Köşesini
- Odağını
- Doğrultmanını
- Eksenini

bulalım.

ÇÖZÜM

$(y - 1)^2 = 12(x + 3)$ parabolü $y^2 = 12x$ parabolünün $\vec{u} = (-3, 1)$ doğrultusunda ötelenmiştir.

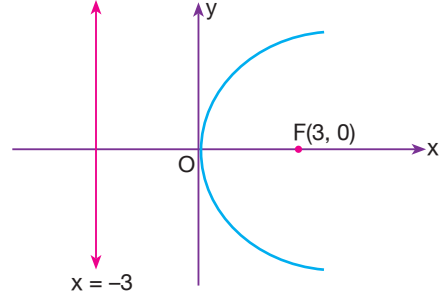
O halde,

$y^2 = 12x$ parabolünün tüm elemanlarını $\vec{u} = (-3, 1)$ doğrultusunda ötelersek $(y - 1)^2 = 12(x + 3)$ parabolünü elde ederiz.

	$y^2 = 12x$	$(y - 1)^2 = 12(x + 3)$
Köşesi	$(0, 0)$	$(-3, 1)$
Odağı	$(3, 0)$	$(0, 1)$
Doğrultmanı	$x = -3$	$x = -6$
Eksenini	x eksenini ($y = 0$)	$y = 1$

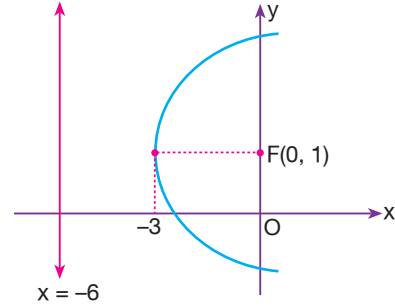
1.

$$y^2 = 12x$$



2.

$$(y - 1)^2 = 12(x + 3)$$



Tablo dikkatlice incelenirse;

2. parabol, 1. parabolün 3 birim sola ($\leftarrow$) ve 1 birim yukarıya ($\uparrow$) ötelenmesi ile elde edilmiştir.



Bir çok tarihi eserde parabolik yapılar görülmektedir.

ÖRNEK - 2

$y^2 = 8(x - 5)$ parabolünün,

- Köşesini
- Odağını
- Doğrultmanını
- Eksenini

bulalım.

ÇÖZÜM :

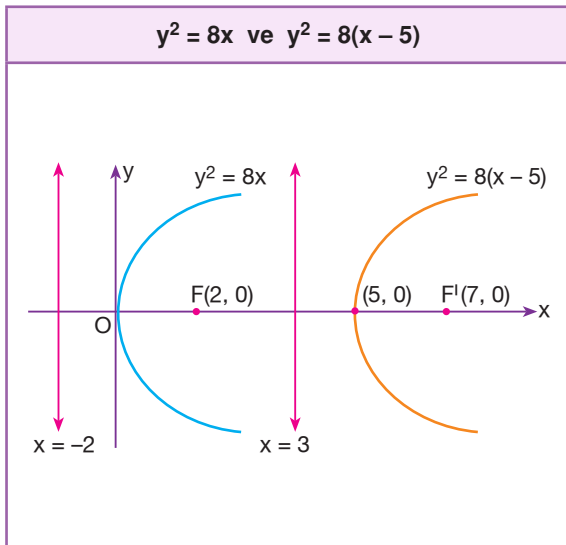
$y^2 = 8(x - 5)$ parabolü; $y^2 = 8x$ parabolünün, $\vec{u} = (5, 0)$ doğrultusunda ötelenmiştir.

Yani, $y^2 = 8x$ parabolünün tüm elemanlarını 5 birim sağa ötelersek $y^2 = 8(x - 5)$ parabolünün grafiğini elde ederiz.

O halde,

	$y^2 = 8x$	$y^2 = 8(x - 5)$
Köşesi	: (0, 0)	→ (5, 0)
Odağı	: (2, 0)	→ (7, 0)
Doğrultmanı	: $x = -2$	→ $x = 3$
Eksen	: x eksen	→ x eksen

✓ Parabolün ekseninin değişmediğine dikkat edelim.



ÖRNEK - 3

$(y + 1)^2 = -12x$ parabolünün,

- Köşesini
- Odağını
- Doğrultmanını
- Eksenini

bulalım.

ÇÖZÜM :

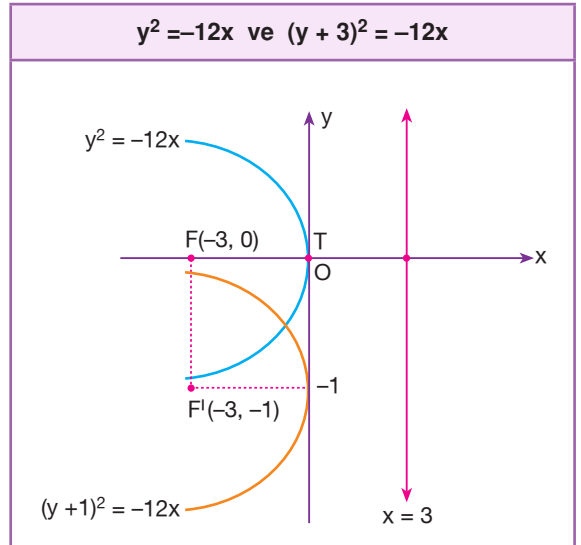
$(y + 1)^2 = -12x$ parabolü $y^2 = -12x$ parabolünü, $\vec{u} = (0, -1)$ doğrultusunda ötelenmiştir.

Yani, $y^2 = -12x$ parabolünün tüm elemanlarını 1 birim aşağı ötelersek $(y + 1)^2 = -12x$ parabolünün grafiğini elde edebiliriz.

O halde,

	$y^2 = -12x$	$(y + 1)^2 = -12x$
Köşesi	: (0, 0)	→ (0, -1)
Odağı	: (-3, 0)	→ (-3, -1)
Doğrultmanı	: $x = 3$	→ $x = 3$
Eksen	: x eksen	→ $y = -1$ ($y = 0$)

✓ Parabolün doğrultmanının değişmediğine dikkat edelim.



ÖRNEK - 4

$(y - 1)^2 = 16(x + 2)$ parabolünün,

- Köşesini
- Odağını
- Doğrultmanını
- Eksenini

bulalım.

ÇÖZÜM :

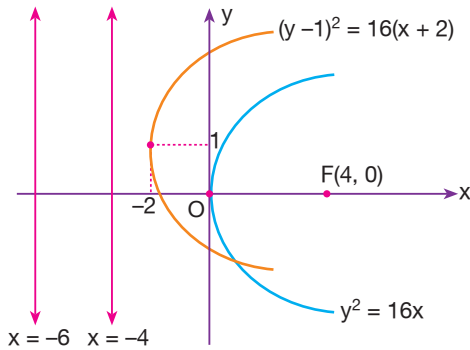
$(y - 1)^2 = 16(x + 2)$ parabolü $y^2 = 16x$ parabolünün, $\vec{u} = (-2, 1)$ doğrultusunda ötelenmiştir.

Yani, $y^2 = 16x$ parabolünün tüm elemanlarını 2 birim sola, 1 birim yukarıya ötelersek $(y - 1)^2 = 16(x + 2)$ parabolünün grafiğini elde ederiz.

O halde,

	$y^2 = 16x$	$(y - 1)^2 = 16(x + 2)$
Köşesi	: (0, 0)	→ (-2, 1)
Odağı	: (4, 0)	→ (2, 1)
Doğrultmanı	: $x = -4$	→ $x = -6$
Eksen	: x eksen	→ $y = 1$ doğrusu ($y = 0$)

$y^2 = 16x$ ve $(y - 1)^2 = 16(x + 2)$



ÖRNEK - 5

$(x - 3)^2 = 8(y + 1)$ parabolünün,

- Köşesini
- Odağını
- Doğrultmanını
- Eksenini

bulalım.

ÇÖZÜM :

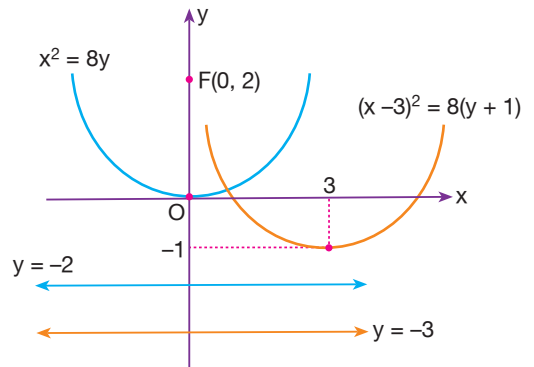
$(x - 3)^2 = 8(y + 1)$ parabolü $x^2 = 8y$ parabolünün, $\vec{u} = (3, -1)$ doğrultusunda ötelenmiştir.

Yani, $x^2 = 8y$ parabolünün tüm elemanlarını 3 birim sağa, 1 birim aşağıya ötelersek $(x - 3)^2 = 8(y + 1)$ parabolünün grafiğini elde ederiz.

O halde,

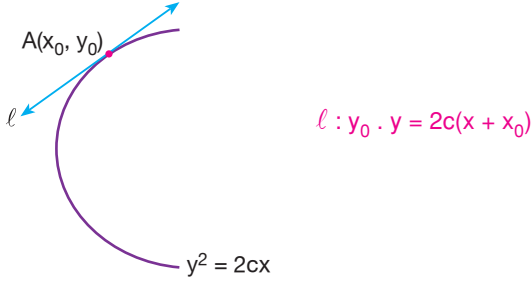
	$x^2 = 8y$	$(x - 3)^2 = 8(y + 1)$
Köşesi	: (0, 0)	→ (3, -1)
Odağı	: (0, 2)	→ (3, 1)
Doğrultmanı	: $y = -2$	→ $y = -3$
Eksen	: y eksen	→ $x = 3$

$y^2 = 8x$ ve $y^2 = 8(x - 5)$

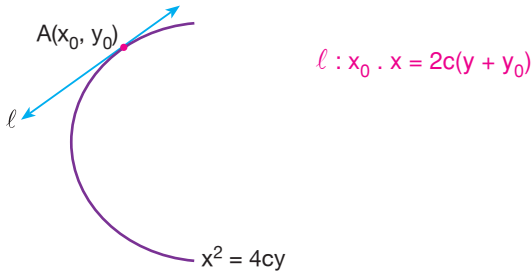


Bir Parabole Üzerindeki Bir Noktadan Çizilen Teğet Doğrusunun Denklemi

- $y^2 = 4cx$ parabolüne üzerindeki $A(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemi;
 $y_0 \cdot y = 2c(x + x_0)$ ile bulunabilir.



- $x^2 = 4cy$ parabolüne üzerindeki $A(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemi;
 $x_0 \cdot x = 2c(y + y_0)$ ile bulunabilir.



ÖRNEK - 1

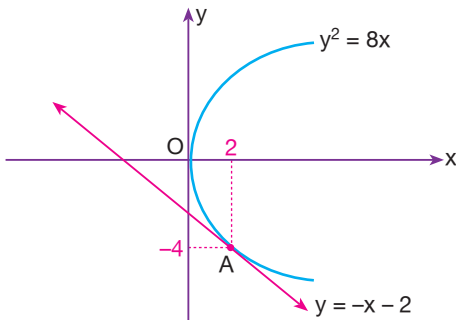
$y^2 = 8x$ parabolüne $A(2, -4)$ noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM

$A(2, -4)$ noktasının koordinatları $y^2 = 8x$ parabolünü sağladığından, nokta parabol üzerindedir.

O halde teğet doğrusunun denklemi,

$$-4y = 4(x + 2) \Rightarrow y = -x - 2 \text{ bulunur.}$$



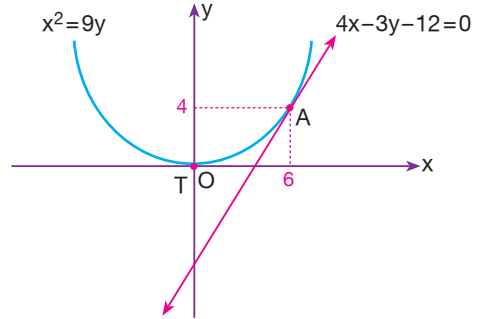
ÖRNEK - 2

$x^2 = 9y$ parabolüne $A(6, 4)$ noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM

$A(6, 4)$ noktası parabol üzerinde olduğundan A noktasından geçen teğet doğrusunun denklemi;

$$6x = \frac{9}{2}(y + 4) \Rightarrow 4x - 3y - 12 = 0 \text{ bulunur.}$$



ÖRNEK - 3

$x^2 = 2y$ parabolüne üzerindeki $A(a, b)$ noktasından çizilen teğet doğrusu $y = 2x + 3$ olduğuna göre, $\frac{a}{b}$ oranını bulalım.

ÇÖZÜM

$A(a, b)$ noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemi,

$$ax = y + b \Rightarrow y = ax - b \text{ olup}$$

O halde,

$y = 2x + 3$ ile $y = ax - b$ aynı doğrular olup

$$\frac{a}{2} = -\frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$



ÖRNEK - 4

$y^2 = -ax$ parabolü üzerindeki $A(-6, 6)$ noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemini bulalım.

ÇÖZÜM :

$A(-6, 6)$ noktası parabol üzerinde olduğundan noktanın koordinatları denklemi sağlar.

$$6^2 = -a(-6) \Rightarrow a = 6 \text{ olup}$$

$y^2 = -6x$ parabolüne $A(-6, 6)$ noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemi,

$$6y = -3(x - 6) \Rightarrow 2y + x - 6 = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 5

$y^2 = 12x$ parabolü üzerinde olup $y = 3x + 2$ doğrusuna en yakın olan noktanın koordinatlarını bulalım.

ÇÖZÜM :

Parabol üzerinde olup $y = 3x + 2$ doğrusuna en yakın olan nokta $K(A, B)$ olsun.

O halde, K noktasından çizilen teğet doğrusu, $y = 3x + 2$ doğrusuna paralel olup eğimleri eşittir.

K noktasından çizilen teğet doğrusu;

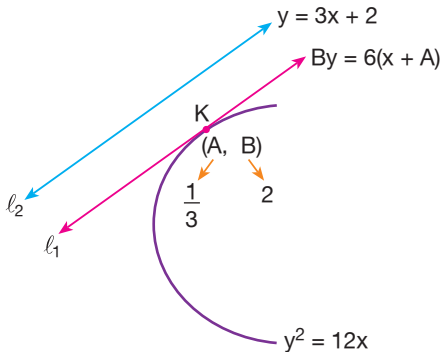
$$By = 6(x + A) \text{ dir.}$$

$$\text{Eğimler eşitliğinden } \frac{6}{B} = 3 \Rightarrow B = 2$$

Parabol denkleminde yerine yazılırsa,

$$2^2 = 12 \cdot A \Rightarrow A = \frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

Böylece en yakın nokta, $K\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ bulunur.



Bir Parabol İle Bir Doğrunun Teğetlik Şartı

Teorem :

$y^2 = 4cx$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrusu teğet ise $c = m \cdot n$ dir.

İspat :

Parabol ile doğru denklemlerinin ortak çözümünden Δ yı sıfıra eşitleyelim.

$y^2 = 4cx$ denkleminde y yerine $mx + n$ yazalım.

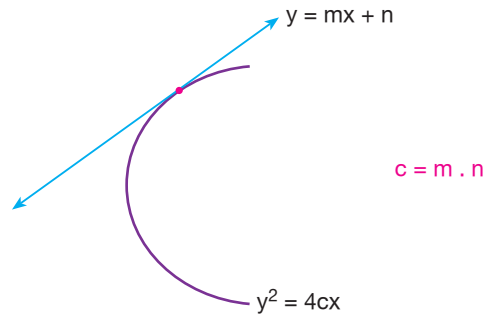
$$(mx + n)^2 = 4cx$$

$$m^2x^2 + 2mnx + n^2 - 4cx = 0$$

$$m^2x^2 + (2mn - 4c)x + n^2 = 0 \text{ ve } \Delta = 0 \text{ olacağından}$$

$$\Delta = (2mn - 4c)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot n^2 = 0$$

$$2mn - 4c = -2mn \Rightarrow c = mn \text{ bulunur.}$$



ÖRNEK - 1

$y^2 = 8x$ parabolü $y = 5x + k$ doğrusuna teğet ise k değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

$$y^2 = 8x \text{ parabolünde, } 4c = 8 \Rightarrow c = 2 \text{ ve}$$

$$y = 5x + k \text{ doğrusunda, } m = 5 \text{ ve } n = k \text{ dir.}$$

O halde, teğetlik şartı, $c = m \cdot n$ olup

$$2 = 5 \cdot k \Rightarrow k = \frac{2}{5} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

$y^2 = ax$ parabolü $y = 2x - 3$ doğrusuna teğet ise a değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

$y^2 = ax$ parabolünde, $4c = a \Rightarrow c = \frac{a}{4}$ ve

$y = 2x - 3$ doğrusunda, $m = 2$ ve $n = -3$ tür.

Teğetlik şartı, $c = m \cdot n$ olup

$$\frac{a}{4} = 2(-3) \Rightarrow a = -24 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

$y^2 = 16x$ parabolüne $A(-1, 3)$ noktasından çizilen teğet doğrularının eğimleri toplamını bulalım.

ÇÖZÜM :

Aranan doğru $y = mx + n$ olsun.

$A(-1, 3)$ noktası doğru denklemini sağlamalıdır.

$$3 = -m + n$$

Parabol denkleminde,

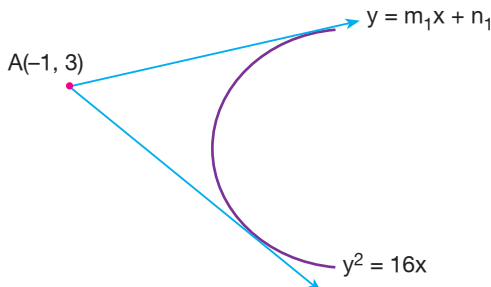
$$4c = 16 \Rightarrow c = 4 \text{ tür.}$$

Teğetlik şartı, $c = m \cdot n$ olduğundan,

$$4 = m \cdot (3 + m)$$

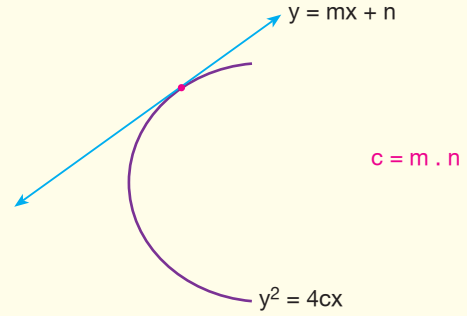
$$m^2 + 3m - 4 = 0 \Rightarrow m_1 + m_2 = -3 \text{ bulunur.}$$

Yani,

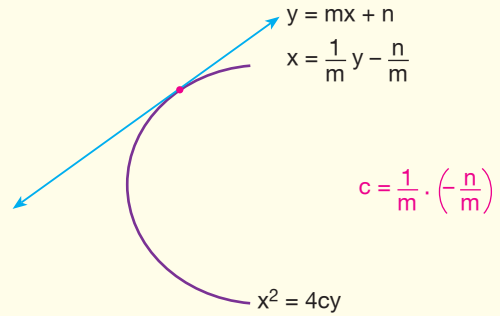


NOT :

1. Durum :



2. Durum :



2. durumda x ile y nin rollerinin değiştirildiğini böylece m yerine $\frac{1}{m}$ ve n yerine $-\frac{n}{m}$ yazıldığını dikkat edelim.

ÖRNEK - 4

$x^2 = -12y$ parabolü $y = 5x + n$ doğrusuna teğet ise n değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

$$4c = -12 \Rightarrow c = -3 \text{ olup}$$

$c = m \cdot n$ teğetlik şartında,

m yerine $\frac{1}{5}$ ve n yerine $-\frac{n}{5}$ yazalım.

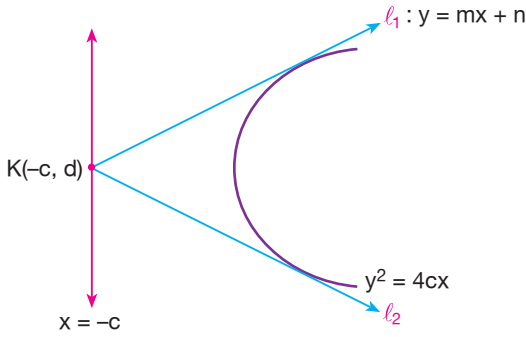
$$-3 = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{n}{5}\right) \Rightarrow n = 75 \text{ bulunur.}$$

Teorem :

Bir parabolde doğrultman doğrusu üzerinde alınan bir noktadan çizilen teğet doğruları dik kesişir.

İspat :

$y^2 = 4cx$ parabolünün doğrultmanı $x = -c$ olup doğrultman üzerindeki bir nokta $K(-c, d)$ olsun.



$K(-c, d)$ noktası $y = mx + n$ üzerinde ise,

$$d = -mc + n \text{ ve}$$

teğetlik şartı olan $c = m \cdot n$ eşitliğinden,

$$c = m(d + mc) \text{ elde edilir.}$$

Denklem düzenlenirse,

$$m^2c + md - c = 0 \text{ olup}$$

Bu denklem m ye bağlı 2. dereceden gibi düşünlürse kökler çarpımından,

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \text{ bulunur.}$$

O halde $l_1 \perp l_2$ dir.

Dikkat edilirse eğimler çarpımı d ordinatından bağımsızdır.

ÖRNEK - 5

$x^2 = 12y$ parabolüne $A\left(\frac{5}{2}, -3\right)$ noktasından çizilen teğet doğrularının eğimleri çarpımını bulalım.

ÇÖZÜM :

$A\left(\frac{5}{2}, -3\right)$ noktası $x^2 = 12y$ parabolünün doğrultmanı üzerindedir.

O halde A noktasından parabole çizilen teğet doğruları dik kesiştiğinden eğimler çarpımı -1 dir.

ÖRNEK - 6

$2y^2 = 5x$ parabolüne $A(m, n)$ noktasından çizilen teğetlerin dik kesişmesi için m nin değerini bulalım.

ÇÖZÜM :

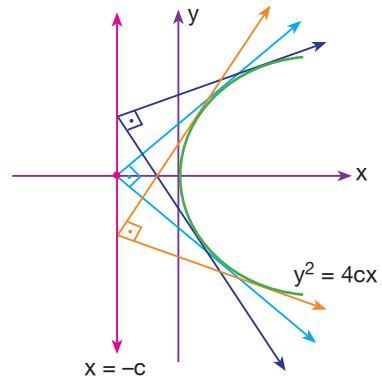
Bir parabolde dik kesişen teğetlerin kesim noktalarının geometrik yeri parabolün doğrultmanıdır.

O halde A noktası $2y^2 = 5x$ parabolünün doğrultmanı olan $x = -\frac{5}{8}$ doğrusu üzerindedir.

Böylece, $m = -\frac{5}{8}$ bulunur.

SONUÇ :

1.



1. Odak noktası $F(0, 4)$ ve simetri eksenini Oy eksenini olan merkezli parabolün denklemi nedir?

- A) $x^2 = 16y$ B) $y^2 = 12x$
C) $x^2 = 12y$ D) $y^2 = 16x$
E) $x^2 = 14y$

2. Odak noktası $F(0, -8)$ ve simetri eksenini Oy eksenini olan merkezli parabolün doğrultmanı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = 4$ B) $y = 5$ C) $y = 6$
D) $y = 7$ E) $y = 8$

3. Odak noktası $F(0, -7)$ ve doğrultmanı $y = 7$ doğrusu olan parabolün denklemi nedir?

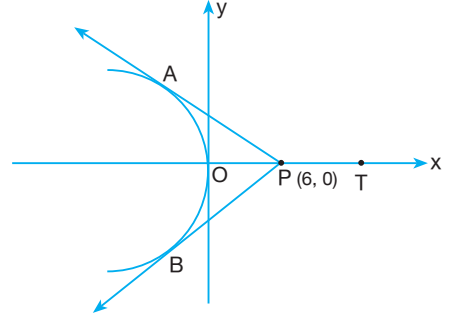
- A) $y^2 = -14x$ B) $x^2 = -28y$
C) $y^2 = 14x$ D) $x^2 = 14y$
E) $x^2 = 28y$

4. $(x - 2)^2 = 12(y - 1)$

parabolünün odağının koordinatları nedir?

- A) (1, 2) B) (-2, 3) C) (3, 4)
D) (2, 4) E) (-5, 6)

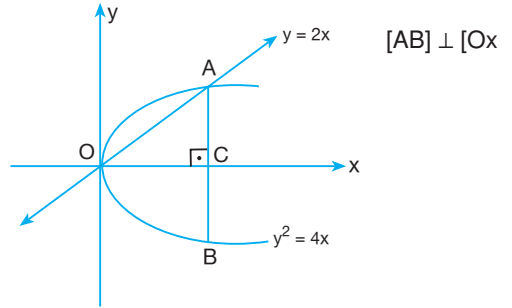
- 5.



Şekildeki $y^2 = -24x$ parabolüne $P(6, 0)$ noktasından çizilen teğetler $[PA]$ ve $[PB]$ olduğuna göre, APT açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 90 B) 105 C) 135 D) 150 E) 165

- 6.



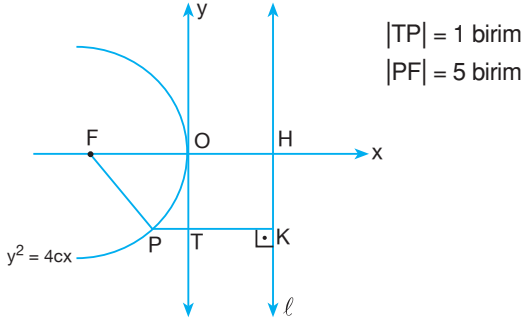
$|OA|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

7. $A(2, 3)$ noktasından geçen ve $y = 2x - 3$ doğrusuna teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yerinin denklemi nedir?

- A) Parabol B) Elips
C) Hiperbol D) Paralel iki doğru
E) Kesişen iki doğru

8.



Odağı F olan $y^2 = 4cx$ parabolünde ℓ doğrusu parabolün doğrultmanı olduğuna göre, $|TK|$ uzunluğu kaç birimdir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. Köşe noktaları,

$$\begin{aligned} y^2 &= 12x, & y^2 &= -8x \\ x^2 &= 14y, & x^2 &= -6y \end{aligned}$$

parabollerinin odakları olan dörtgensel bölgenin alanı kaç birimkaredir?

- A) $\frac{25}{2}$ B) 13 C) $\frac{27}{2}$ D) 14 E) $\frac{29}{2}$

10. $y = 3$ doğrusuna teğet olan ve $P(1, -1)$ noktasından geçen çemberlerin merkezlerinin geometrik yerinin denklemi nedir?

- A) $(x - 1)^2 = -3y + 3$
B) $(x + 1)^2 = 3y + 2$
C) $(x - 1)^2 = -8(y - 1)$
D) $(x - 1)^2 = 7y + 4$
E) $(x - 1)^2 = 2y + 1$

11. $y^2 = 12x$ parabolü ile $x^2 = 16y$ parabolünün doğrultman doğrularının kesim noktasının orijine uzaklığı kaç birimdir?

- A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{5}$ D) 5 E) 6

12. Parametrik denklemi,

$$y = \sin \theta, \quad x = \frac{1 - \cos 2\theta}{16}$$

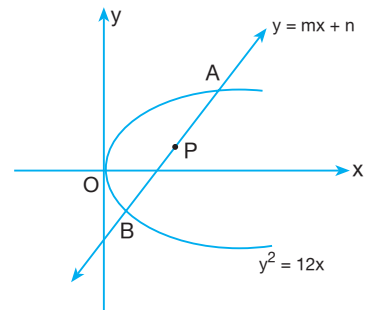
olan parabolün odağının koordinatları toplamı kaçtır? ($\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$)

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

13. $(y + 2)^2 = 4(x + 1)$ parabolünün köşe koordinatları nedir?

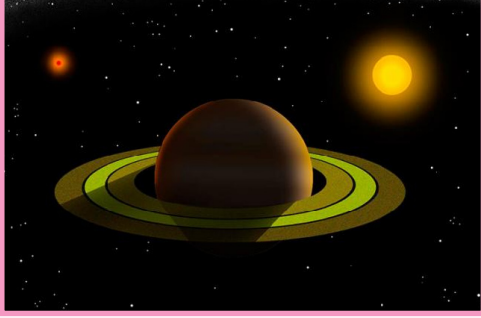
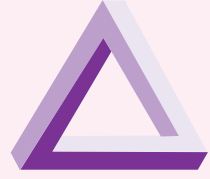
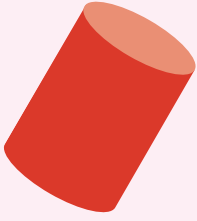
- A) $(-1, -2)$ B) $(2, 1)$ C) $(-2, -1)$
D) $(-2, 0)$ E) $(-2, 3)$

14.



$|AP| = |PB|$ ve $P(3, 1)$ olduğuna göre, n kaçtır?

- A) -14 B) -15 C) -16 D) -17 E) -18



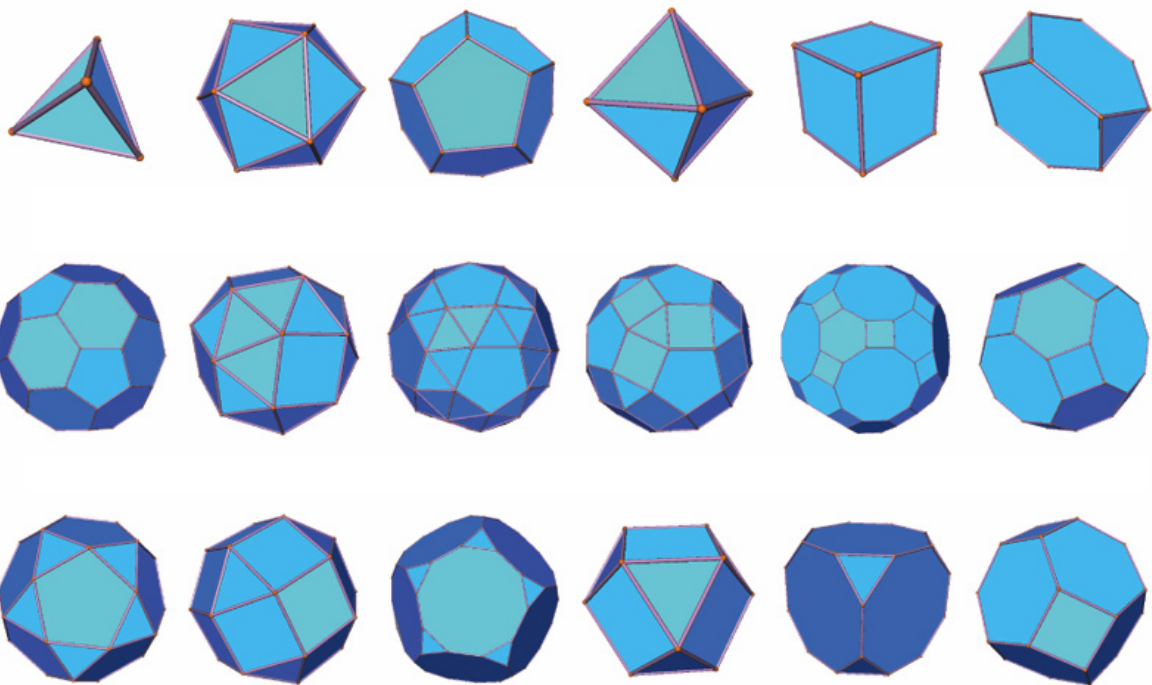
TEK ve ÇOK YÜZEYLİ KAPALI YÜZEYLER ve KATI CİSİMLER



ÜNİTE - 14



- Platonik, Arşimed, Kepler
- Prizma
- Piramit
- Silindir
- Koni
- Küre
- Uzayda Süslemeler
- Yapıların Döndürülmesi
- Perspektif Çizim





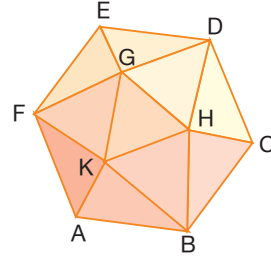
Tek ve Çokyüzeyle Kapalı Yüzeyler ve Katı Cisimler :

- Yüzey parçaları ile sınırlanan kapalı uzay parçasına **çokyüzeyle katı cisim**; çokyüzeyle katı cismin sınırına da **çokyüzeyle** denir.

Aşağıda bazı çokyüzeyleler ve açınımları verilmiştir.

Çokyüzlü	Açınımı

- Bir çokyüzeyleyi oluşturan her bir yüzey parçasına bu çokyüzeylelin **yüzü**, herhangi iki yüzünün arakesitine bu çokyüzeylelin **ayrıtı**, ikiden fazla yüzün arakesitine bu çokyüzeylelin **tepe noktası** denir.

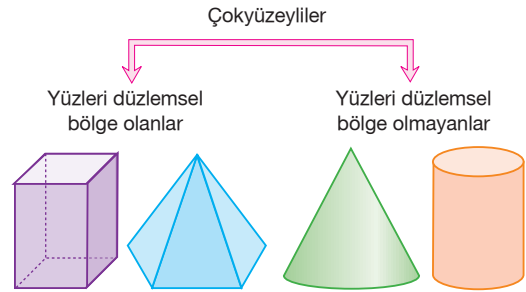


Yandaki çokyüzeylede;
 $\widehat{FEG}$, $\widehat{GDH}$, $\widehat{ABK}$,
 $\widehat{GHK}$... çokyüzeylelin yüzeyleridir.

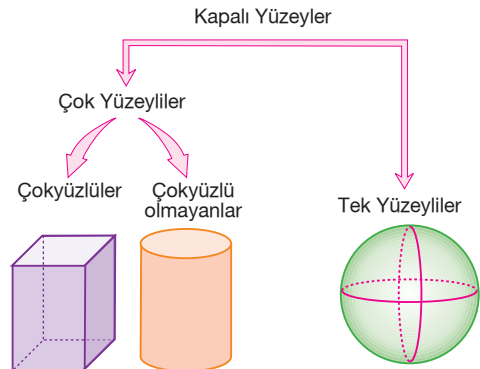
$[AB]$, $[GH]$, $[FK]$, $[BH]$... şeklin ayrıtlarıdır.

A, B, C, D, K, H, G ... şeklin tepe noktalarıdır.

- Çokyüzeyleler, yüzleri düzlemsel bölge olanlar ve olmayanlar olarak sınıflandırılır.



- Çokyüzeyle katı cismin bütün yüzeyleri düzlemsel ve çokgensel bölge ise **çokyüzlü katı cisim**; eğer çokyüzeylelin bütün yüzey parçaları düzlemsel ve çokgensel bölge ise **çokyüzlü** denir.



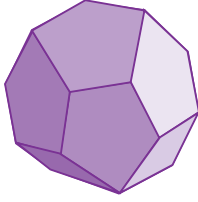
Her çokyüzlü aynı zamanda çokyüzeylelidir.

Çokyüzlü katı cisimler ve çokyüzeylelerden **Platonik**, **Arşimed** ve **Kepler**'i inceleyeceğiz.



Platonik Çokyüzlü :

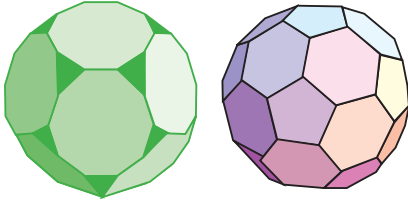
Eş düzgün çokgenlerden oluşan ve her bir köşesindeki yüzey sayısı aynı olan konveks çokyüzlüye **Platonik çokyüzlü** denir.



Yukarıdaki Platonik çokyüzlünün tüm yüzeyleri düzgün beşgendir.

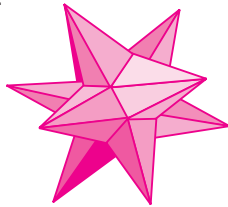
Arşimed Çokyüzlü :

- Aynı köşede buluşan; iki veya daha fazla tipte çokgeni içeren konveks çokyüzlüye **Arşimed çokyüzlü** denir.

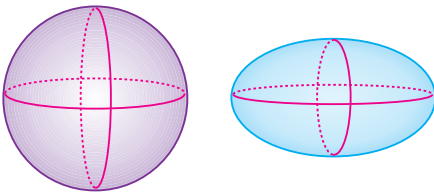


Kepler Çokyüzlü :

- Herhangi dört düzgün yıldız çokyüzlünün birleşmesinden oluşan konkav çokyüzlüye **Kepler çokyüzlü** denir.



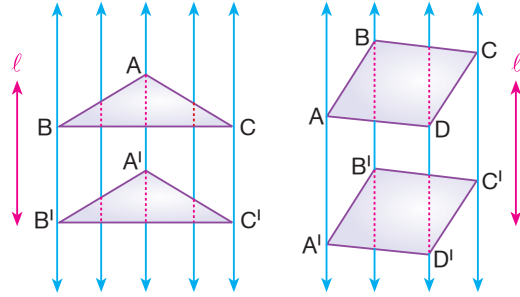
- Tek yüzey parçası ile sınırlanan kapalı uzay parçasına **tekyüzeyle katı cisim**; tek yüzeyle katı cismin sınırına ise **tekyüzeyle** denir.



Küre ve elipsoid tek yüzeyledir.

PRİZMALAR

Prizmatik Yüzey :

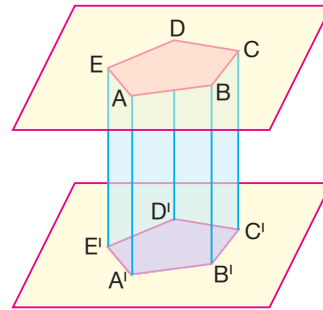


Uzayda bir çokgen ve çokgenin bulunduğu düzleme paralel olmayan bir l doğrusu alalım.

l doğrusuna paralel ve çokgenin kenarlarına değerek hareket eden doğruların oluşturduğu yüzeye **prizmatik yüzey** denir.

Prizma :

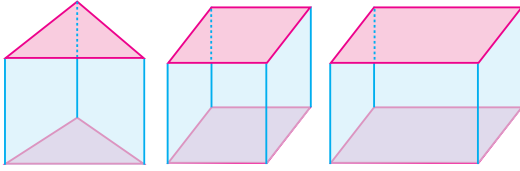
Bir prizmatik yüzeyin paralel iki düzlemle sınırlandırılmış şekline **prizma** denir.



- ABCDE ve A'B'C'D'E' düzlem parçalarına prizmanın tabanları denir.
- [AB], [BC], [CD], ... [A'B'], ... doğru parçalarına prizmanın taban ayrıtları denir.
- [AA'], [BB'], [CC'], [DD'], [EE'] doğru parçalarına prizmanın yan ayrıtları olup uzunlukları eşittir.
- AA'B'B, BB'C'C, DD'E'E çokgenlerine prizmanın yan yüzeyleri denir.
- Prizmanın tabanları arasındaki uzaklığa prizmanın yüksekliği denir.



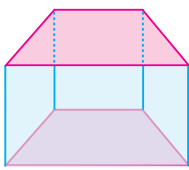
Prizmalar tabanlarına göre isim alır.



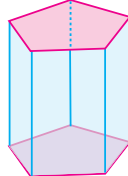
Üçgen
prizma

Kare
prizma

Dikdörtgenler
prizması



Yamuk
prizma

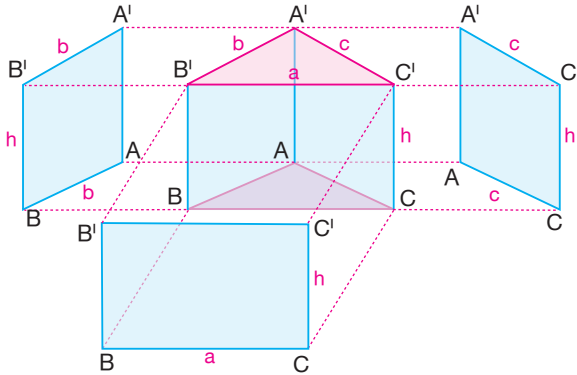


Beşgen
prizma

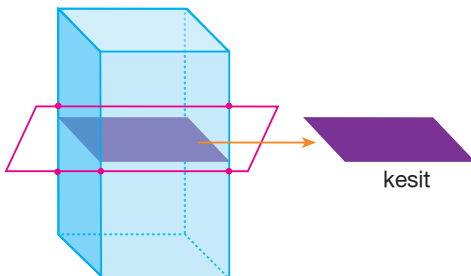
Dik Prizma :

Yanal ayrıtları taban düzlemine dik olan prizmalara **dik prizma** denir.

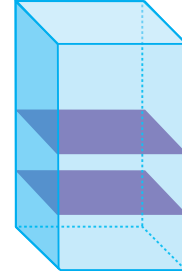
- Yan yüzeyleri aşağıdaki gibi dikdörtgendir.



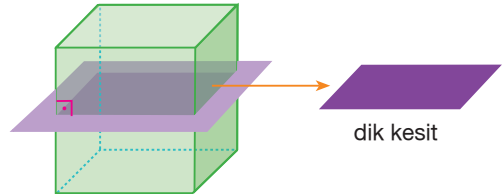
- Prizmatik yüzeyin bir düzlemle arakesitine **yüzeyin bir kesiti** denir.



- Paralel iki kesit eşittir.



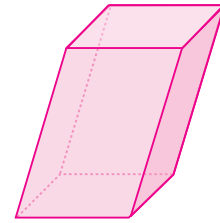
- Bir prizmanın yanal ayrıtına dik olan düzlemle arakesitine **prizmanın dik kesiti** denir.



- Yanal ayrıtı tabanlara dik olan prizmaya **dik prizma**, aksi halde **eğik prizma** denir.

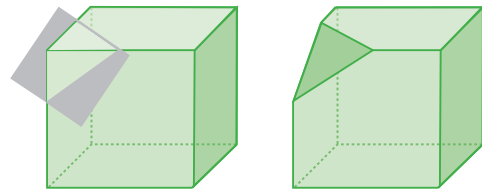


Dik prizma



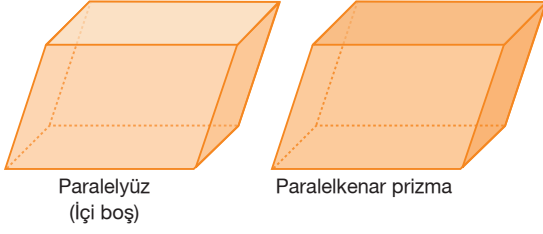
Eğik prizma

- Bir prizmanın alt tabanını kesmeyecek bir düzlemle oluşturduğu kesit ile alt tabanın sınırladığı prizmatik bölgeye **kesik prizma** denir.

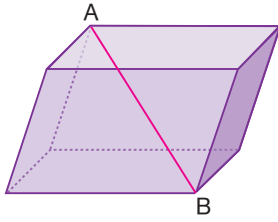


Kesik prizma

- Tabanı paralelkenarsal bölge olan bir prizmatik yüzeye **paralelyüz**, paralelyüzünün sınırladığı bölgeye **paralelkenar prizma** denir.

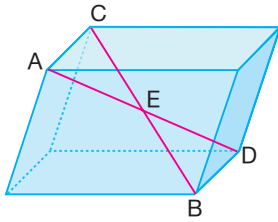


- Bir paralelkenar prizmanın aynı düzlemde kalmayan iki köşesini birleştiren bir doğru parçasına **cisim köşegeni** denir.



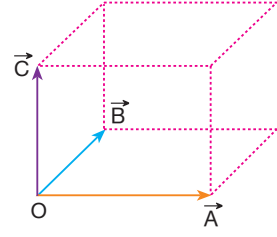
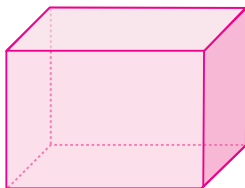
[AB] : Cisim köşegeni

- Cisim köşegenleri birbirini ortalar.



$$[AD] \cap [CB] = \{E\}, |CE| = |EB|, |AE| = |ED|$$

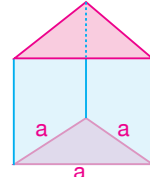
- Tabanları dikdörtgensel bölgeler olan bir dik paralelkenar prizmaya **dikdörtgenler prizması** denir.



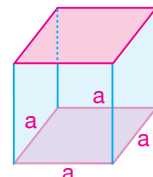
Yukarıdaki gibi $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ üzerine kurulu paralelyüzünün hacmi, $|\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})|$ ya da $|\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle|$ ifadelerinden biri ile hesaplanabilir.

Düzgün Prizma :

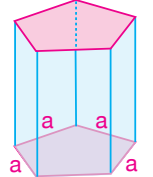
Tabanı düzgün çokgen olan dik prizmaya **düzgün prizma** denir.



Eşkenar üçgen prizma



Kare prizma



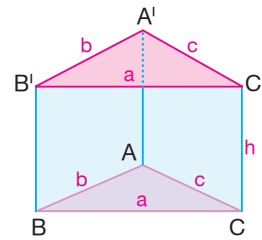
Düzgün beşgen prizma

Dik Prizmaların Alan ve Hacimleri :

- ✓ Hacim = $V = \text{Taban Alanı} \cdot \text{Yükseklik}$
- ✓ Yanal Alanı = $\text{Taban Çevresi} \cdot \text{Yükseklik}$
- ✓ Alanı = $\text{Yanal Alanı} + 2 \cdot \text{Taban Alanı}$

Üçgen Dik Prizma :

Tabanı üçgen ve yan yüzeyleri dikdörtgen olan dik prizmadır.

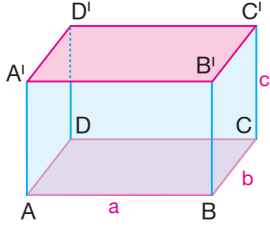


- ✓ $\text{Hacmi} = A(\triangle ABC) \cdot h$
- ✓ $\text{Yanal Alanı} = (a + b + c) \cdot h$
- ✓ $\text{Alanı} = (a + b + c) \cdot h + 2 \cdot A(\triangle ABC)$



Dikdörtgenler Prizması :

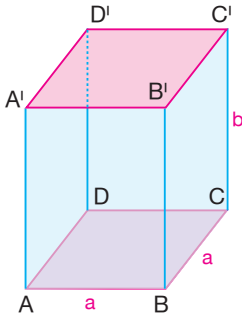
Tabanı dikdörtgen ve yan yüzeyleri dikdörtgen olan dik prizmadır.



- ✓ Hacmi = $a \cdot b \cdot c$
- ✓ Yanal Alanı = $2(a + b) \cdot c$
- ✓ Alanı = $2(a + b) \cdot c + 2ab$
= $2ab + 2ac + 2bc$

Kare Dik Prizma :

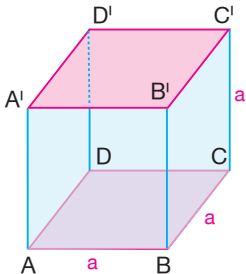
Tabanı kare, yan yüzeyleri dikdörtgen olan dik prizmadır.



- ✓ Hacmi = $a^2 \cdot b$
- ✓ Yanal Alanı = $4a \cdot b$
- ✓ Alanı = $4ab + 2a^2$

Küp :

Tüm yüzeyleri aynı karelerden oluşan dik prizmadır.



- ✓ Hacmi = a^3
- ✓ Yanal Alanı = $4a^2$
- ✓ Alanı = $4a^2 + 2a^2$
= $6a^2$

✓ Pratik Bilgi

Tabanı n – gen olan bir prizmanın,

Köşe sayısı : $K = 2n$

Yüzey sayısı : $Y = n + 2$

Ayrit sayısı : $A = 3n$ olup

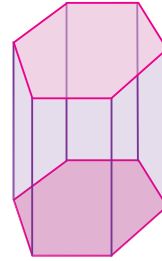
$K + Y - A = 2$ dir.

ÖRNEK - 1

12 tane köşesi olan bir prizmanın ayrit ve yüzey sayılarını bulalım.

ÇÖZÜM :

12 tane köşesi olan prizmanın tabanları altıgendir.



Ayrit sayısı : $6 + 6 + 6 = 18$

Yüzey sayısı : $6 + 1 + 1 = 8$ bulunur.

ÖRNEK - 2

4 köşeli bir prizmanın çizilip çizilemeyeceğini inceleyelim.

ÇÖZÜM :

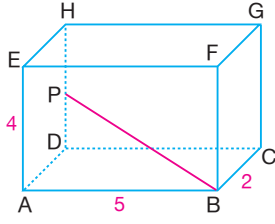
Prizmanın tanımından yola çıkılırsa alt tabanının köşe sayısı kadar üst tabanda olacaktır.

Tabanın üçgen, dörtgen beşgen . . .vs. olacağı düşünülürse,

Köşe sayısı : 6, 8, 10, 12, . . . olacaktır.

Bir prizmanın köşe sayısı en az 6 tane olacağından 4 köşeli bir prizma çizilemez.

ÖRNEK - 3

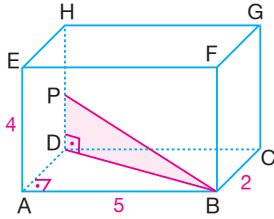


Şekildeki dik dikdörtgenler prizmasında
 $|AB| = 5$ birim
 $|AE| = 4$ birim
 $|BC| = 2$ birim
 $|DP| = |PH|$

Yukarıda verilenlere göre, $|PB|$ uzunluğunu bulalım.

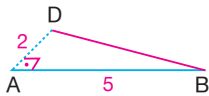
ÇÖZÜM

Taban yüzeyinin bir köşegeni olan $[DB]$ çizilirse,



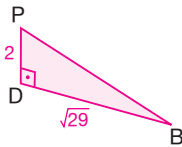
$|AD| = 2$ birim olup

ABD dik üçgeninde Pisagor teoremi ile,



$$|BD|^2 = 4 + 25 \Rightarrow |BD| = \sqrt{29} \text{ birim olur.}$$

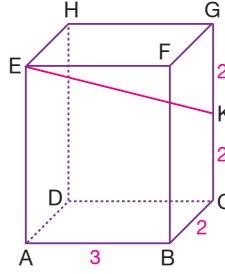
PDB dik üçgeninde,



Pisagor teoremi ile,

$$|PB| = \sqrt{29 + 4} = \sqrt{33} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 4

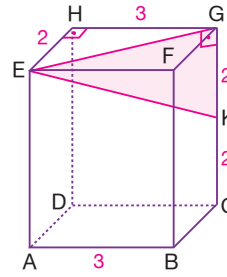


Şekildeki dikdörtgenler prizmasında
 $|GK| = 2$ birim
 $|KC| = 2$ birim
 $|BC| = 2$ birim
 $|AB| = 3$ birim

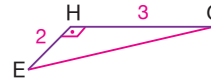
Yukarıda verilenlere göre, $|EK|$ uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM

$[EG]$ köşegenini çizelim.

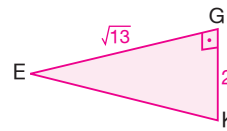


EHG dik üçgeninde Pisagor bağıntısı ile,



$$|EG| = \sqrt{13} \text{ birim olup}$$

EGK dik üçgeninde Pisagor bağıntısı ile,



$$|EK| = \sqrt{17} \text{ birim bulunur.}$$



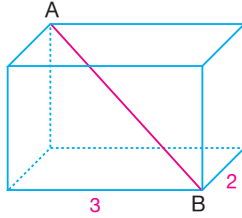


✓ **Pratik Bilgi**

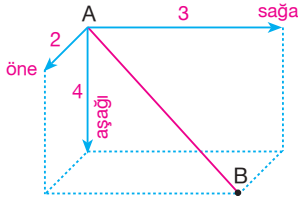
Uzayda A ve B noktaları arasındaki uzaklığı bulmak için A noktasından B noktasına giderken yapılan ötelemelerin bileşkesinden faydalanabiliriz.

👉 **Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.**

Örneğin :



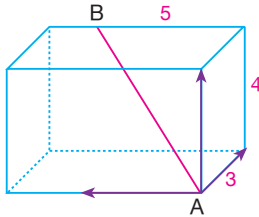
Yukarıdaki dikdörtgenler prizmasında A noktasından B noktasına giderken,



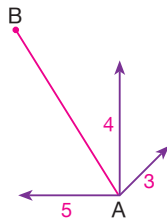
3 birim sağa, 4 birim aşağıya, 2 birim öne doğru gelinmiştir.

O halde, $|AB| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ birim bulunur.

Örneğin :



Yukarıdaki dikdörtgenler prizmasında A noktasından B noktasına giderken,

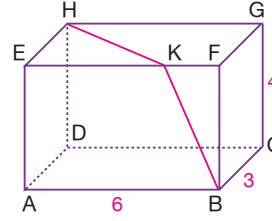


5 birim sola, 4 birim yukarıya, 3 birim arkaya gidilmiştir.

O halde, $|AB| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2} = 5\sqrt{2}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 5

Şekildeki dikdörtgenler prizmasında $K \in [EF]$ dir.

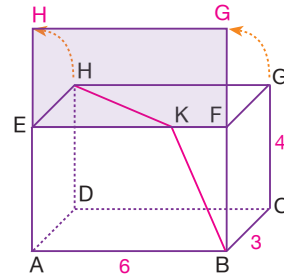


$$\begin{aligned} |AB| &= 6 \text{ birim} \\ |BC| &= 3 \text{ birim} \\ |CG| &= 4 \text{ birim} \end{aligned}$$

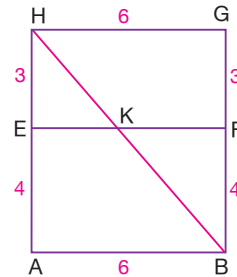
Buna göre, $|BK| + |KH|$ toplamının en küçük değerini bulalım.

ÇÖZÜM 📏 :

Kırık çizgileri düzleştirelim.

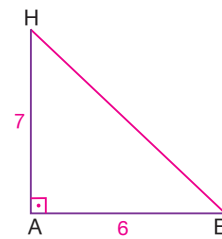


EFGH düzlemi kapak modeli gibi düşünülüp,



$$|BK| + |KH| = |BH|$$

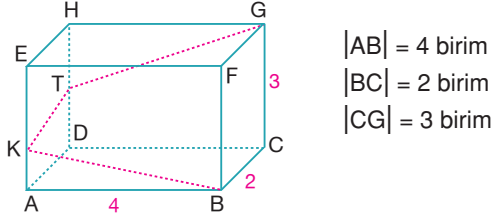
ABH dik üçgeninde Pisagor bağıntısı ile,



$$|BH| = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 6

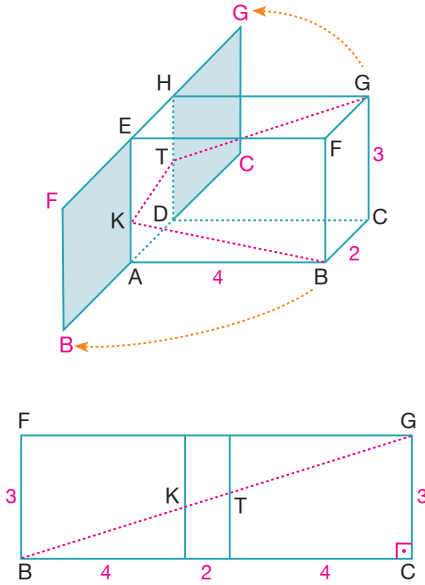
Şekildeki dikdörtgenler prizmasında
 $K \in [EA]$, $T \in [DH]$ dir.



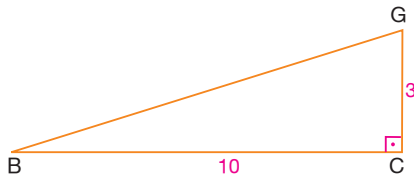
$|BK| + |KT| + |TG|$ toplamının en küçük değerini bulalım.

ÇÖZÜM

Hareket edilen yüzeyleri açarsak,



BCG üçgeninde Pisagor teoremi ile,



$|BG| = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109}$ birim bulunur.

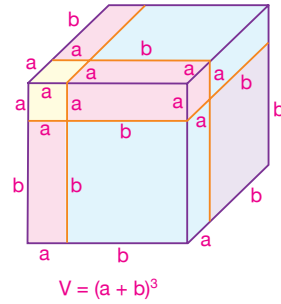
ÖRNEK - 7

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ özdeşliğini kanıtlayalım.

ÇÖZÜM

Bir ayrıt uzunluğu $a + b$ birim olan bir küp düşünelim.

Bu küpü aşağıdaki gibi parçalayalım.



O halde parçalanma sonucunda,

1 tane $a^3 \Rightarrow V_1 = a^3$

3 tane $a^2 \cdot b \Rightarrow V_2 = a^2 \cdot b$

3 tane $a \cdot b^2 \Rightarrow V_3 = a \cdot b^2$

1 tane $b^3 \Rightarrow V_4 = b^3$

elde edilir.

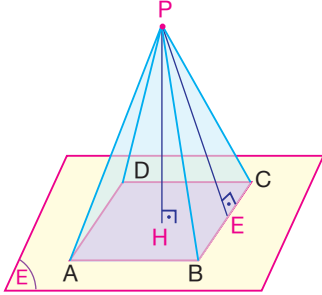
O halde küpün hacmi tüm bu parçaların hacimleri toplamına eşit olacağından,

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ bulunur.

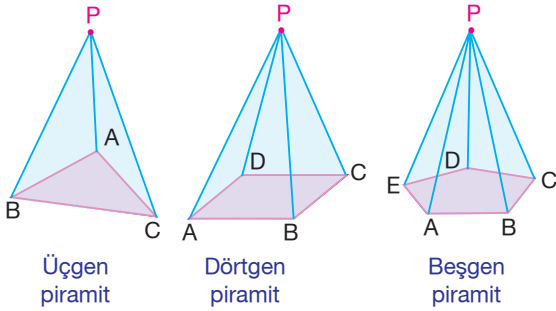


PİRAMİTLER

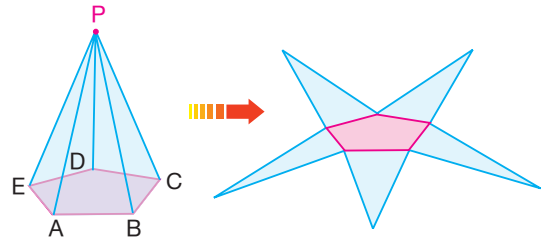
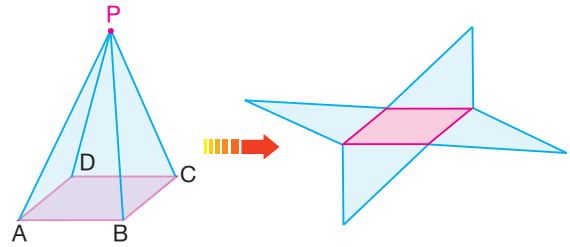
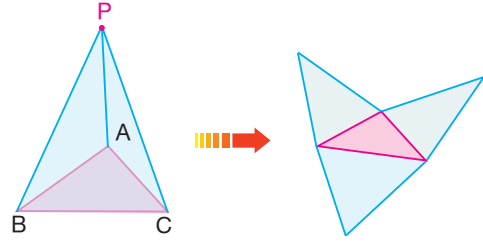
Uzayda bir düzlem, bu düzlem dışında bir P noktası verilsin. P noktasından geçen çokgenin kenarlarına dayanarak hareket eden bir doğrunun oluşturduğu yüzeye **piramidal yüzey** denir. Bu piramidal yüzeyin bütün ana doğrularını kesen bir düzlem tarafından sınırlandırılması ile oluşan cisme **piramit** denir.



- ✓ P : Tepe noktası
 - ✓ (ABCD) : Taban
 - ✓ [PH] : Yükseklik
 - ✓ [PE] : Yan yüz yüksekliği
- Tabanı (ABCD) çokgensel bölgesi ve tepesi P noktası olan piramit (P, ABCD) biçiminde gösterilir.
- Piramitler tabanına göre isimlendirilir.

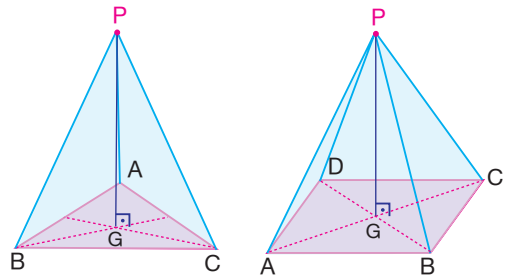


- Piramitlerin yan yüzeyleri üçgendir.



Dik Piramit :

Yüksekliği tabanın ağırlık merkezinden geçen piramite **dik piramit** denir.



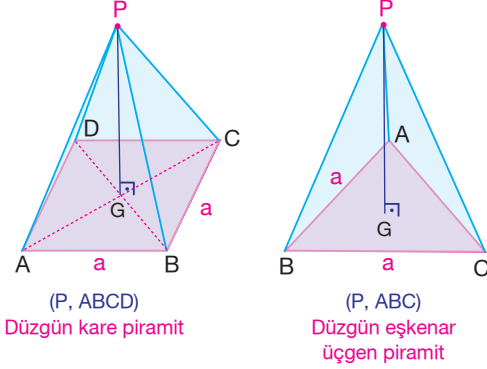
G : (ABC) nin
ağırlık merkezi

G : ABCD dörtgensel
bölgesinin ağırlık merkezi



Düzgün Piramit :

Tabanı düzgün çokgen olan dik piramite **düzgün piramit** denir.



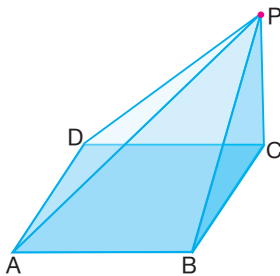
Piramidin Hacmi – Alan Hesabı :

✓ Hacim = $V = \frac{(\text{Taban alanı}) \cdot \text{Yükseklik}}{3}$

✓ Yanal alanı = Yan yüzlerin alanları toplamı

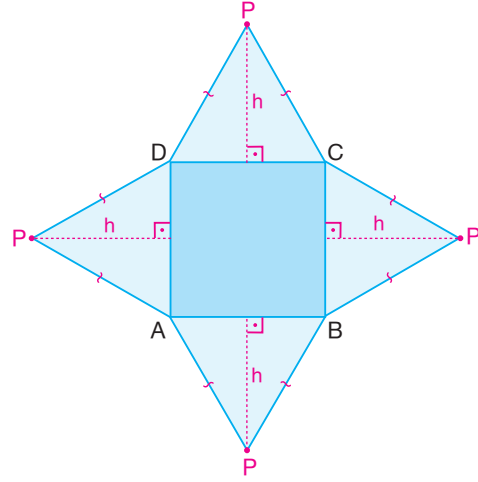
✓ Alanı = Taban alanı + Yanal alanı

- Tabanı düzgün olan piramit her zaman düzgün piramit olmayabilir.



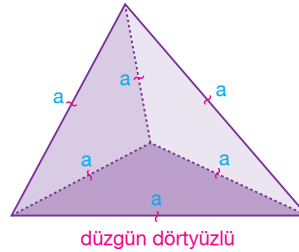
ABCD kare, (P, ABCD) düzgün piramit değil

- Düzgün piramitte yanal yüzler birbirine eş ikizkenar üçgensel bölgelerdir. Yanal ayrıtlar eş olup yüzeylerinin yüksekliğide eştir.



Düzgün Dört yüzlü :

Dört yüzüde birbirine eş ve eşkenar üçgensel bölge olan piramite **düzgün dört yüzlü** denir.



Yüzey alanı :

$$A = a^2 \sqrt{3}$$

Yüksekliği :

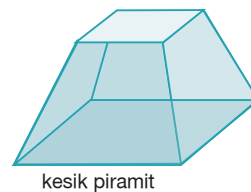
$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Hacmi :

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

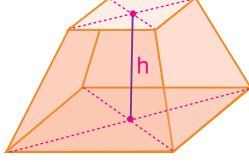
Kesik Piramit :

- Bir piramit tabanına paralel bir düzlemle kesildiğinde taban ile düzlem arasındaki piramidal bölgeye **kesik piramit** denir.

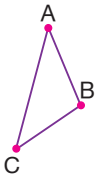




- Düzgün kesik piramidin tabanları birbirine benzer düzgün çokgensel bölge olup yanal yüzeyler birbirine eş ikizkenar yamuksal bölgedir. Tabanlarının ağırlık merkezlerini birleştiren doğru parçasına **yükseklik** denir.

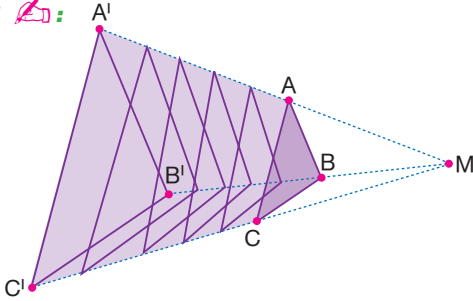


ÖRNEK - 1



ABC üçgeninin M merkezli ve $k \in [1, 3]$ oranlı homotetiğini bulalım.

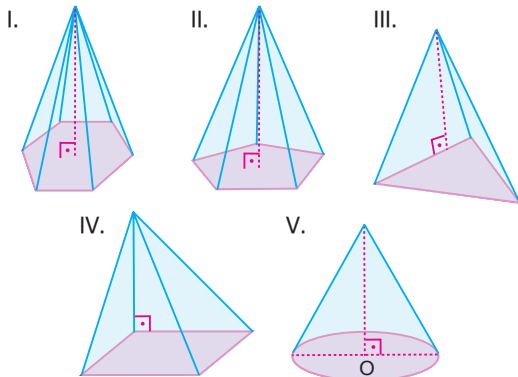
ÇÖZÜM



$$\vec{MA'} = 3 \cdot \vec{MA}, \vec{MB'} = 3 \cdot \vec{MB}, \vec{MC'} = 3 \cdot \vec{MC}$$

Oluşan şekil bir kesik piramittir.

ÖRNEK - 2



Yukarıdakilerden hangilerinin bir dik piramit olabileceğini bulalım.

ÇÖZÜM

Yükseklik ayağı tabanın ağırlık merkezinden geçen piramitte **dik piramit** denir.

I., II. ve V. piramitler dik piramit olabilir.

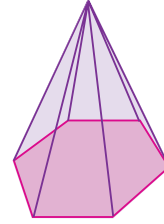
ÖRNEK - 3

Köşe sayısı 7 olan piramidin ayrıt ve yüzey sayısını bulalım.

ÇÖZÜM

Tabanı n gen olan piramidin tabanında n tane ve tepesinde **1 tane** olmak üzere $(n + 1)$ tane köşesi vardır. O halde, $n + 1 = 7 \Rightarrow n = 6$ olup

Piramit **altıgen** piramittir.



O halde, **Ayrıt sayısı** : $A = 12$

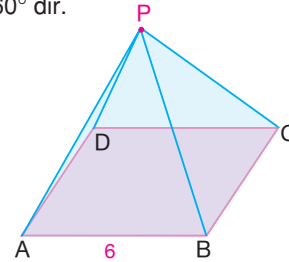
Yüzey sayısı : $Y = 6 + 1 = 7$ bulunur.

✓ Pratik Bilgi

Bir n gen piramitte, **köşe sayısı** : $K = n + 1$, **yüzey sayısı** : $Y = n + 1$, **ayrıtları** : $A = 2n$ olup $K + Y - A = 2$ dir.

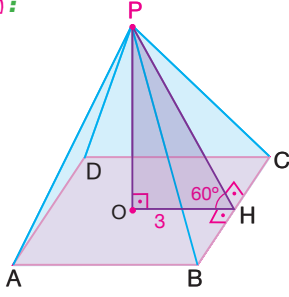
ÖRNEK - 4

Aşağıda tabanının bir ayrıt uzunluğu 6 birim olan kare dik piramitte bir yan yüzünün taban düzlemi ile yaptığı açı 60° dir.



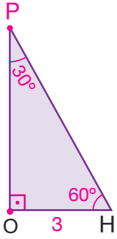
Buna göre, piramidin yüksekliğini bulalım.

ÇÖZÜM :



Yükseklik ayağı tabanın ağırlık merkezinden geçer.

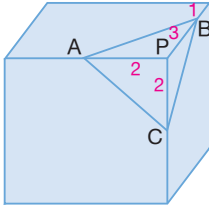
O halde, $[PO] \perp [OH]$ olup



POH dik üçgeninde,
 $h = |PO| = 3\sqrt{3}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 5

Aşağıda bir ayrıtı 4 birim olan bir küpün bir köşesinden şekildeki gibi bir piramit çıkarılıyor.



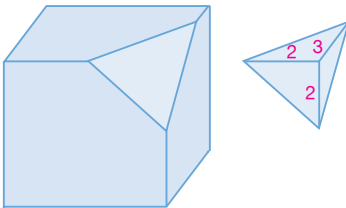
Buna göre, kalan cismin hacmini bulalım.

ÇÖZÜM :

Küpün hacmi : $V = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \text{ br}^3$ ve

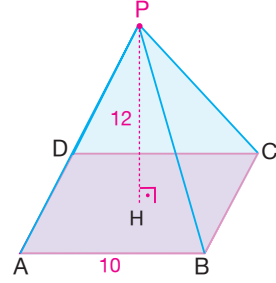
Piramidin hacmi: $V = \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = 2 \text{ br}^3$ olup

Kalan cismin hacmi,



$V = 64 - 2 = 62 \text{ br}^3$ bulunur.

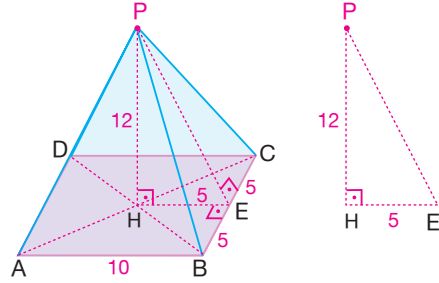
ÖRNEK - 6



Yukarıdaki düzgün kare piramidin yüzey alanının kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

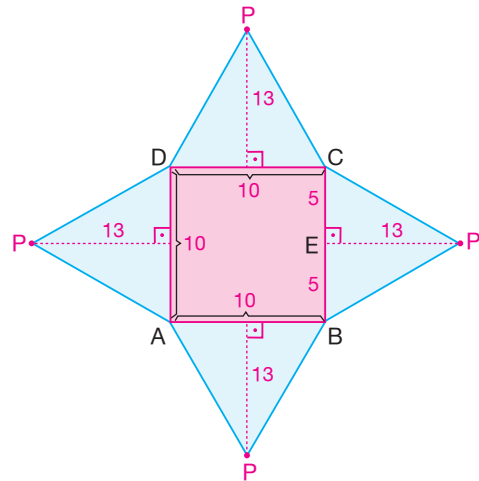
ABCD dörtgeni kare ve verilen piramit düzgün piramit olduğundan, H noktası karenin köşegenlerinin kesişme noktasıdır.



O halde PHE dik üçgeninde Pisagor bağıntısı ile,

$$|PE|^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow |PE| = 13 \text{ birim olup}$$

Şeklin açınımdan,



Yüzey alanı = Yanal alanı + Taban alanı

$$= 4 \cdot \frac{13 \cdot 10}{2} + 10^2 = 360 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

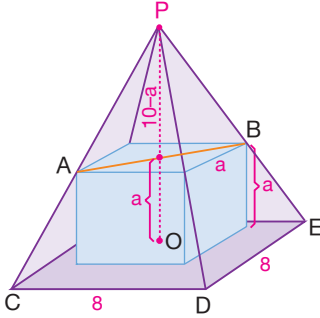


ÖRNEK - 7

Tabanının bir ayrıtı 8 birim ve yüksekliği 10 birim olan bir dik kare piramidin içine yerleştirilebilecek en büyük küpün bir ayrıtının uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

Küpün bir ayrıtının uzunluğuna a diyelim.



Piramitlerin benzerliğinden,

Tales teoremi ile, $\frac{10-a}{10} = \frac{a}{8}$ eşitliğinden,

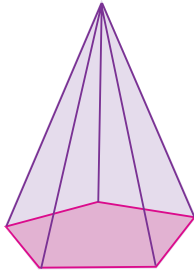
$a = \frac{40}{9}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 8

Tabanı düzgün beşgen olan piramidin kaç tane ayrıtı olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

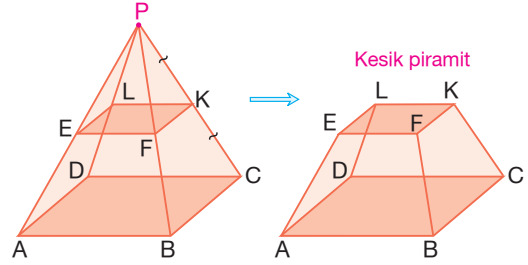
Tabanı düzgün beşgen olan piramit aşağıdaki gibi çizilebilir.



O halde, tabanda 5 tane ve yan yüzeyde 5 tane olmak üzere 10 tane ayrıtı vardı.

ÖRNEK - 9

Aşağıdaki piramit tam orta noktasından tabana paralel bir düzlemle kesiliyor.



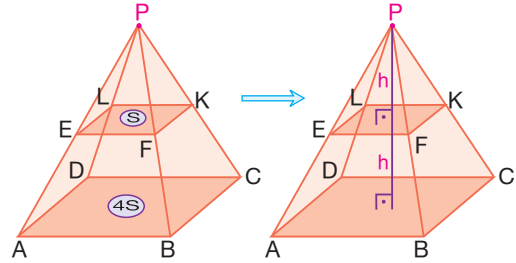
Buna göre, kesik piramidin hacminin, tüm piramidin hacmine oranını bulalım.

ÇÖZÜM :

EFKL ve ABCD benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ olan iki çokgen-sel bölgedir.

O halde, $\frac{A(EFKL)}{A(ABCD)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ yazılabilir.

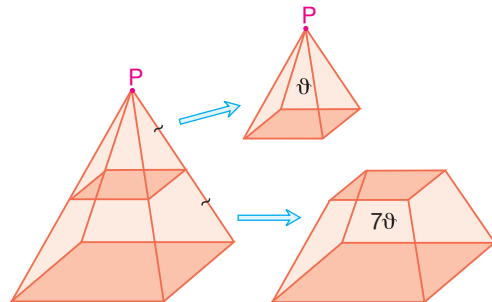
$A(EFKL) = S$ dersek, $A(ABCD) = 4S$ olur.



Tüm piramidin hacmi : $\vartheta_{\text{Tüm}} = \frac{4S \cdot 2h}{3} = \frac{8 \cdot S \cdot h}{3}$

Üstteki piramidin hacmi : $\vartheta_{\text{Üstteki}} = \frac{S \cdot h}{3}$

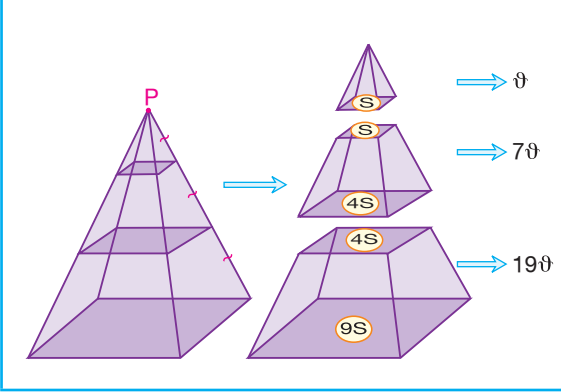
O halde, $\vartheta_{\text{Tüm}} = 8 \cdot \vartheta_{\text{Üstteki}}$ olup



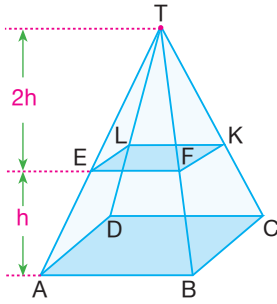
İstenen oran, $\frac{7\vartheta}{8\vartheta} = \frac{7}{8}$ bulunur.



✓ Pratik Bilgi



ÖRNEK - 10



Şekildeki dik kare piramit tabana paralel bir düzlemle kesiliyor.

Kesik piramidin hacminin tüm piramidin hacmine oranını bulalım.

ÇÖZÜM

Hacimler oranı benzerlik oranının küpüne eşit olup

$$\left(\frac{2h}{3h}\right)^3 = \frac{8}{27} \text{ eşitliğinden,}$$

(T, EFLK) piramidinin hacmine 8θ dersek,

(T, ABCD) piramidinin hacmi 27θ olur.

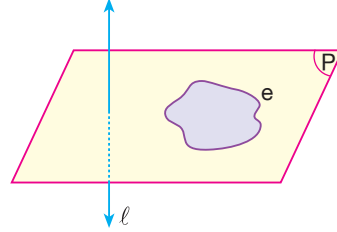
Böylece, kesik piramidin hacmi,

$27\theta - 8\theta = 19\theta$ olup istenen oran,

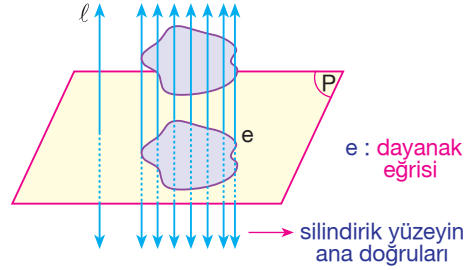
$$\frac{19\theta}{27\theta} = \frac{19}{27} \text{ bulunur.}$$

Silindir :

Uzayda bir kapalı e eğrisi ve bu eğrinin bulunduğu düzlemi kesen bir ℓ doğrusu verilmiş olsun.



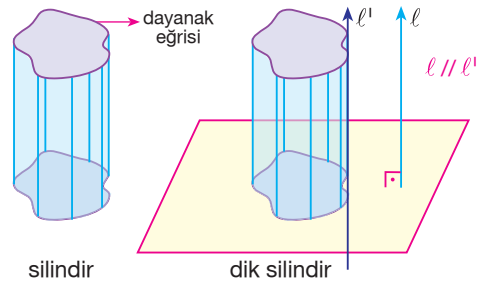
➤ Bu eğriyi kesen ve ℓ doğrusuna paralel olan doğruların kümesine **silindirik yüzey** denir.



➤ e eğrisinden geçen ve ℓ doğrusuna paralel olan doğrulara silindirik **yüzeyin ana doğrusu** denir.

➤ Paralel iki düzlemle sınırlandırılmış silindirik yüzeyin oluşturduğu cisme **silindir** denir.

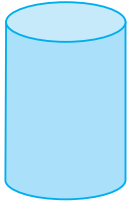
➤ Bir silindirik yüzeyin ana doğrusu eğrinin bulunduğu düzleme dikse buna **dik silindir** denir.



➤ Tabanları daire olan dik silindire **dik dairesel silindir** denir.



- Bir silindirin tabana paralel olmayan bir düzlemle kesitine **kesik silindir** denir.

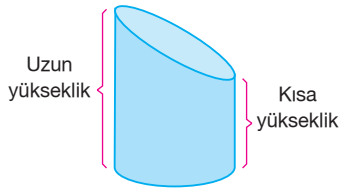


Silindir

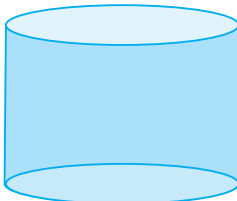


Kesik silindir

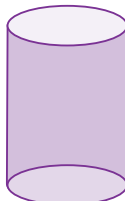
- Kesik silindirin ana doğru parçalarından en büyüğüne kesik silindirin uzun yüksekliği, en küçüğüne de kesik silindirin kısa yüksekliği denir.



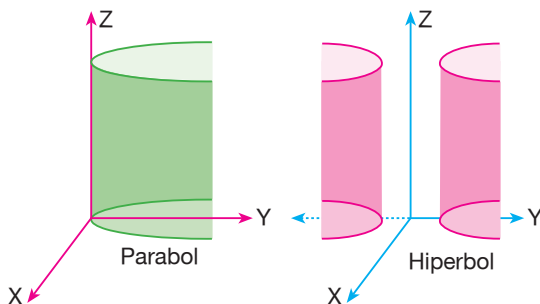
- Dayanak eğrisi çember, elips hiperbol ve parabol olan silindirik yüzeyler.



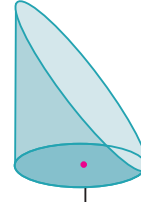
Elips



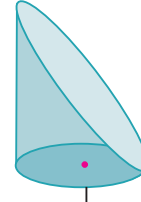
Çember



- Kısa yüksekliği sıfır olan kesik silindire **silindirik takoz** denir.

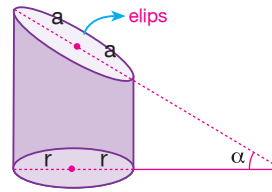


Silindirik takoz



Silindirik takoz

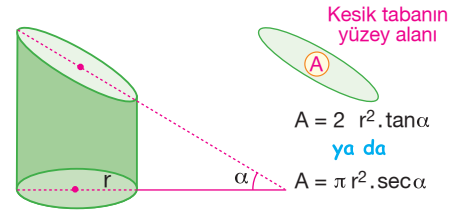
- Kesik dik dairesel silindirin kesik tabanının (elipsin) yarı uzun eksen uzunluğu bu tabanın alt taban ile yaptığı açının sekantı ile taban çapının çarpımına eşittir.



$$a = r \cdot \sec \alpha$$

a : elipsin yarı uzun eksen uzunluğu

- Kesik dik dairesel silindirin kesik tabanının yüzey alanı bu tabanın alt taban ile yaptığı açının tangenti ile alt taban alanının çarpımının iki katına eşittir.



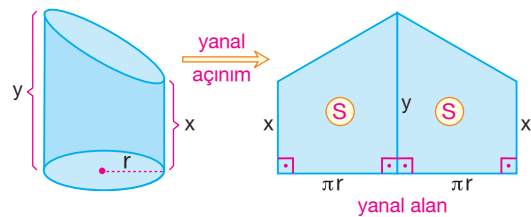
Kesik tabanın yüzey alanı

$$A = 2 r^2 \cdot \tan \alpha$$

ya da

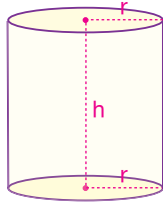
$$A = \pi r^2 \cdot \sec \alpha$$

- Kesik dik dairesel silindirin yanal yüzünün alanı kısa ve uzun yüksekliklerin toplamı ile alt taban çevresinin çarpımının yarısına eşittir.



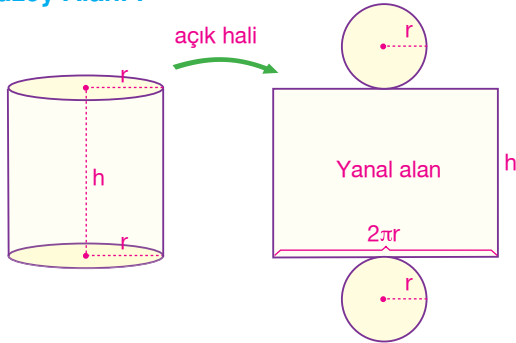
$$\text{Yanal Alan} = (x + y) \cdot \pi \cdot r$$

Dik Dairesel Silindirin Hacmi :



$$\text{Hacmi} = V = \text{Taban alanı} \cdot \text{Yükseklik} = \pi r^2 h$$

Dik Dairesel Silindirin Yanal Alanı ve Yüzey Alanı :



Yanal alan bir dikdörtgendir.

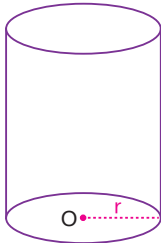
O halde, $\text{Yanal alan} = 2\pi r h$

$\text{Yüzey alanı} = 2\pi r h + 2\pi r^2$ dir.

ÖRNEK - 1

Hacmi $36\pi \text{ br}^3$ olup yükseklikleri ve yarıçap uzunlukları tamsayı olan kaç farklı dik dairesel silindir çizilebileceğini bulalım.

ÇÖZÜM :



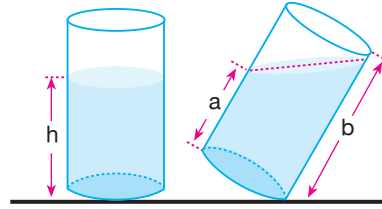
Silindirin hacmi;
 $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ olup
 $\pi \cdot r^2 \cdot h = 36\pi$ ise
 $r^2 \cdot h = 36$ yazılabilir.

O halde, r ve h değerleri aşağıdaki gibidir.

r	h
1	36
2	9
3	4
6	1

Böylece, 4 farklı silindir çizilebilir.

ÖRNEK - 2



Şekildeki silindirin içinde h yüksekliğinde bir miktar su vardır. Aynı silindir eğilip şekildeki konuma getirildiğinde su miktarı değişmiyor.

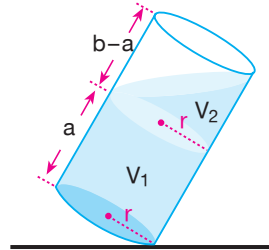
Buna göre, h yüksekliğinin a ve b türünden eşitini bulalım.

ÇÖZÜM :

Silindirin taban yarıçap uzunluğu r olsun.

İlk durumda suyun hacmi $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

İkinci durumda,



$$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot a$$

$$+ V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{(b-a)}{2}$$

$$V_1 + V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{b+a}{2} \right)$$

$$V_1 + V_2 = V \text{ olduğundan,}$$

$$\pi \cdot r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot \left(\frac{a+b}{2} \right) \text{ eşitliğinden,}$$

$$h = \frac{a+b}{2} \text{ bulunur.}$$

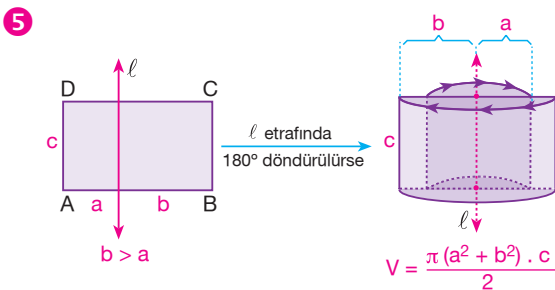
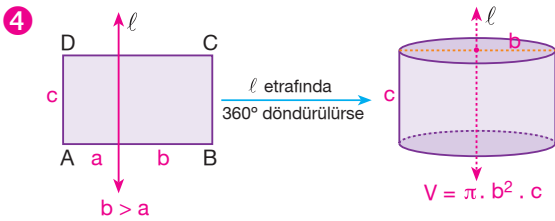
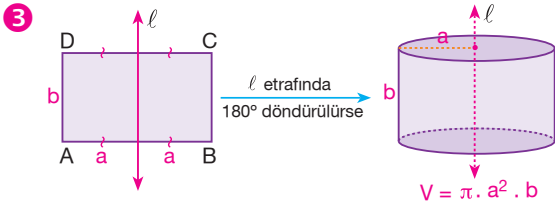
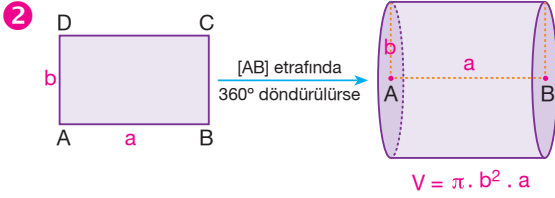
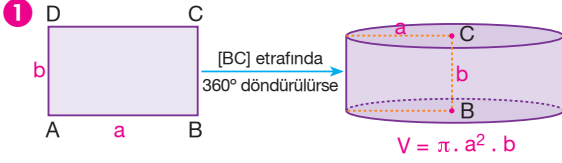


NOT :

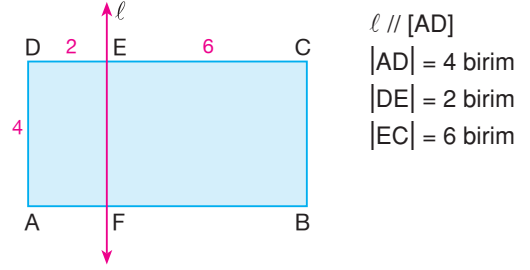
Yukarıdaki gibi iki durumda da (su dökülüyorsa) her iki şekilde desu seviyesine kadar olan yükseklikler toplamı birbirine eşittir.

Yani, $h + h = a + b$ dir.

Dikdörtgenin Döndürülmesi

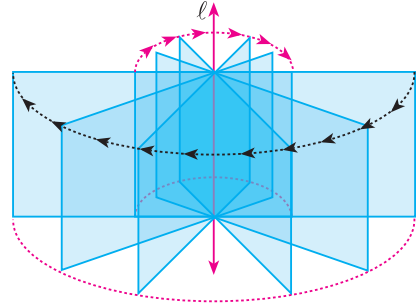


ÖRNEK - 3

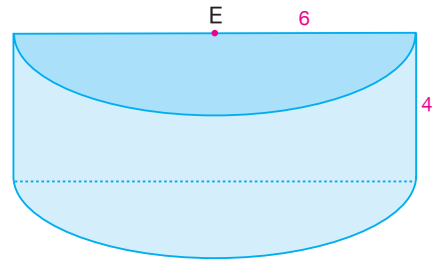


ABCD dikdörtgenel levhanın ℓ doğrusu etrafında 180° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım.

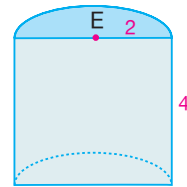
ÇÖZÜM :



Levha ℓ doğrusu etrafında 180° döndürüldüğünde, EFBC dörtgeni taban yarıçap uzunluğu 6 birim ve yüksekliği 4 birim olan yarım silindiri ve



ADEF dörtgeni, taban yarıçapı 2 birim ve yüksekliği 4 birim olan yarım silindiri oluşturur.



O halde elde edilen cismin hacmi,

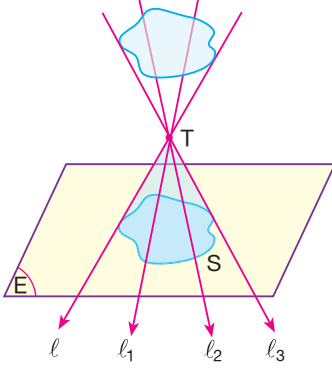
$$V = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 4}{2} + \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 4}{2} = 80\pi \text{ br}^3 \text{ bulunur.}$$



Dik Dairesel Koninin Hacmi ve Yüzey Alanı :

Kapalı bir S eğrisi ile bu eğrinin bulunduğu düzlemin dışında bir T noktası verilsin.

Eğriyi kesen ve T noktasından geçen doğruların oluşturduğu yüzeye **konisel yüzey**, eğrisine de bu yüzeyin **dayanak eğrisi** denir.



S : Dayanak eğrisi

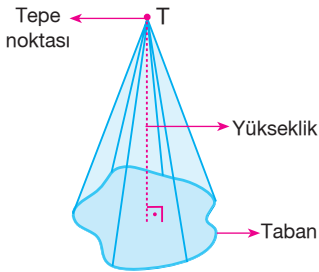
T : Konisel yüzeyin tepe noktası

$\{l_1, l_2, \dots\}$ konisel yüzeyin elemanları

- T noktasının altında ve üstünde oluşan yüzey parçalarına **konisel yüzeyin kanatları** denir.

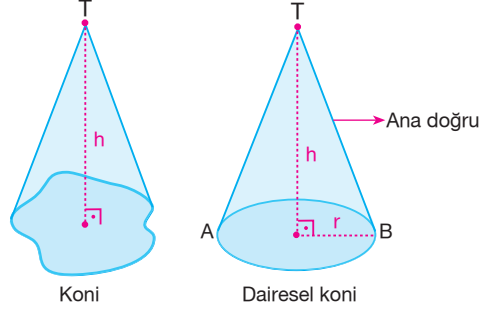
Koni :

Konisel yüzeyin kanatlarından birinin bir düzlemlle sınırladığı cisme **koni** denir.



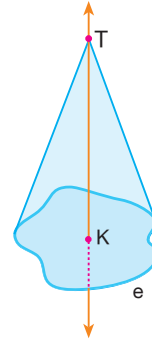
T : Tepe noktası

- T noktasından tabana inilen dikmeye **yükseklik** denir.



Koninin Ekseni :

Bir konide tepe noktası ve tabanın merkezinden geçen doğruya **koninin ekseni** denir.

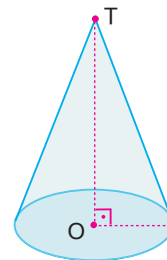


K : e eğrisinin merkezi

TK : Koninin ekseni

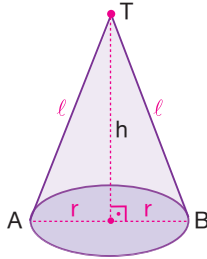
Dik koni :

Ekseni tabanına dik olan konidir.





- Tabanı daire olan dik koniye **dik dairesel koni** denir.



Yandaki dik dairesel konide

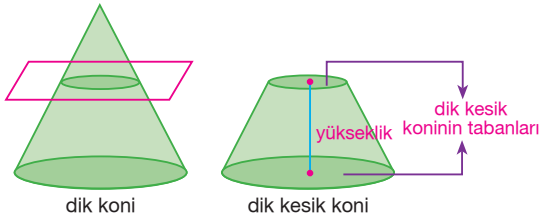
T : Tepe noktası

l : Ana doğru

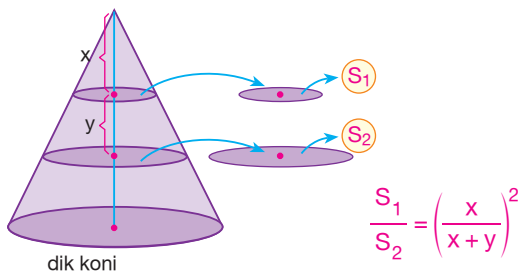
h : Yükseklik

r : Taban yarıçapı

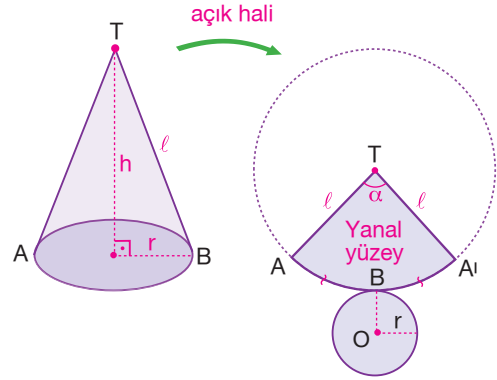
- Dik dairesel koninin tabanı ile tabana paralel düzlem kesiti arasındaki koni parçasına dik kesik koni denir.



- Bir koninin tabanı dairesel ise tabana paralel iki kesitin alanları oranı bunların tepe noktasına olan uzunluklarının karelerin oranına eşittir.



Bir Dik Koninin Açınımı :



$$\text{Hacim} = V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} \quad (\text{piramidin hacmi gibi})$$

$$\text{Yanal Alanı} = \pi \cdot r \cdot l$$

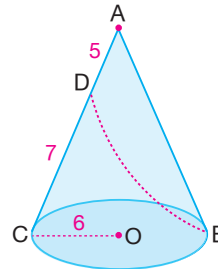
$$\text{Taban Alanı} = \pi \cdot r^2$$

$$\text{Yüzey Alanı} = \pi r l + \pi r^2$$

$$AA' = \frac{2\pi \cdot l \cdot \alpha}{360^\circ} = 2\pi r \text{ eşitliğinden,}$$

$$r \text{ ile } l \text{ arasında } \frac{r}{l} = \frac{\alpha}{360^\circ} \text{ bağıntısı vardır.}$$

ÖRNEK - 1

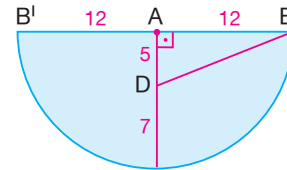


Yandaki O merkezli dik dairesel konide yüzey üzerinden B ile D noktaları arasındaki en kısa uzaklığı hesaplayalım.

ÇÖZÜM :

$$\frac{6}{12} = \frac{\alpha}{360^\circ} \text{ olacağından, } \alpha = 180^\circ \text{ olup}$$

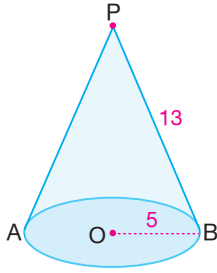
Koninin açınımı aşağıdaki gibi olur.



B noktasından D noktasına yüzey üzerinden en kısa yol ABD dik üçgeninde Pisagor teoremi ile,

$$|BD|^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow |BD| = 13 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

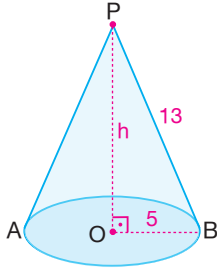


Yukarıdaki dik dairesel koninin taban yarıçap uzunluğu 5 birim ve ana doğru parçasının uzunluğu 13 birim olduğuna göre, hacmini bulalım.

ÇÖZÜM

Verilen koni dik dairesel koni olduğundan,

$[PO] \perp [OB]$ olur.

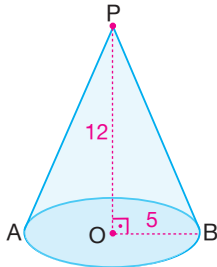


$|PO| = h$ diyelim.

POB dik üçgeninde Pisagor bağıntısı ile,

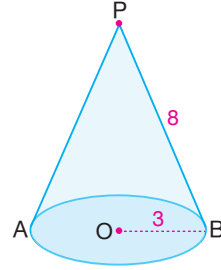
$$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow h = 12 \text{ birim olur.}$$

Böylece,



Koninin hacmi, $V = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} = 100\pi \text{ br}^3$ bulunur.

ÖRNEK - 3



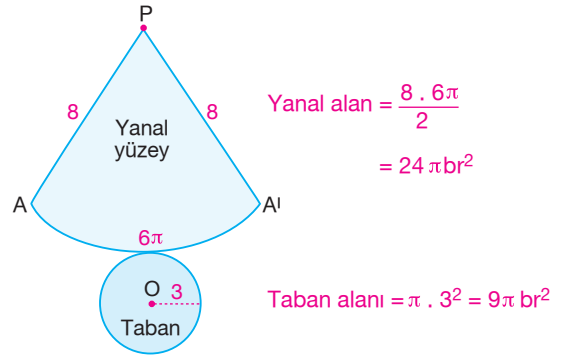
Yukarıdaki O merkezli dik dairesel koninin taban yarıçapı 3 birim ve ana doğru parçasının uzunluğu 8 birim dir.

Buna göre, koninin yüzey alanının kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM

Koninin yüzey alanı, yanal yüzeyinin alanı ile taban alanın toplamı kadardır.

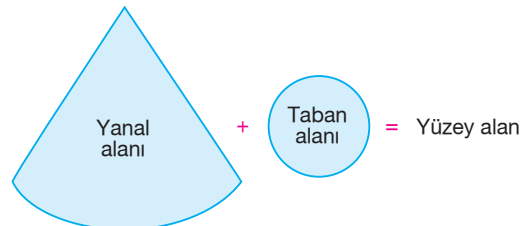
O halde, koninin açılımını yapalım.



Böylece, koninin yüzey alanı,

$$24\pi + 9\pi = 33\pi \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

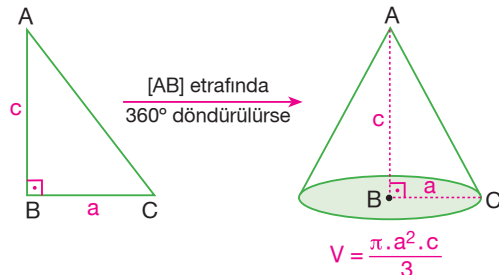
HATIRLATMA

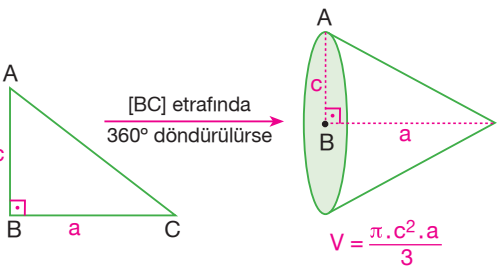


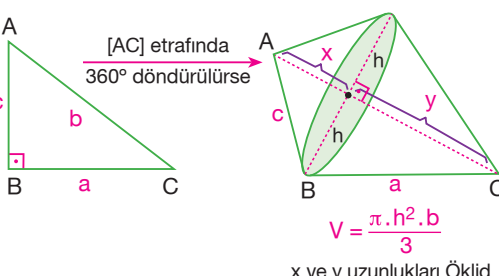


DÖNDÜRMELER

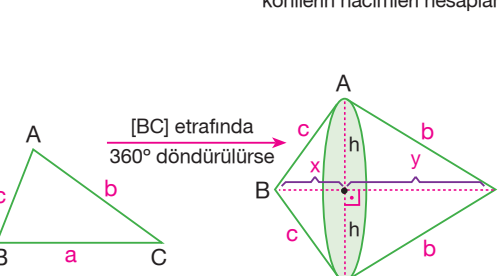
Üçgenin Döndürülmesi

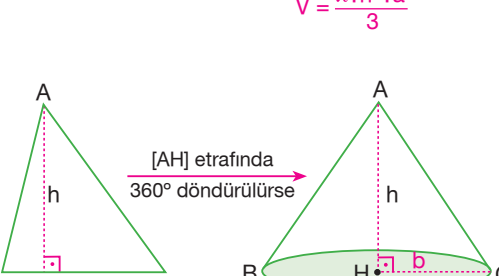
1. 

$$V = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot c}{3}$$
2. 

$$V = \frac{\pi \cdot c^2 \cdot a}{3}$$
3. 

$$V = \frac{\pi \cdot h^2 \cdot b}{3}$$

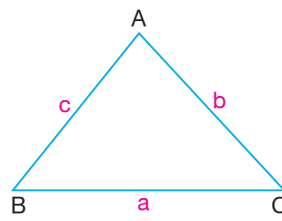
x ve y uzunlukları Öklid bağlantıları ile hesaplanarak konilerin hacimleri hesaplanır.
4. 

$$V = \frac{\pi \cdot h^2 \cdot a}{3}$$
5. 

$$V = \frac{\pi \cdot b^2 \cdot h}{3}$$

$b > a$

✓ Pratik Bilgi



$A(ABC) = S$ olsun.

ABC üçgeninin,

- ✓ [BC] etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi $V = \frac{4\pi \cdot S^2}{3 \cdot a}$
- ✓ [AC] etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi $V = \frac{4\pi \cdot S^2}{3 \cdot b}$
- ✓ [AB] etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi $V = \frac{4\pi \cdot S^2}{3 \cdot c}$

ÖRNEK - 4

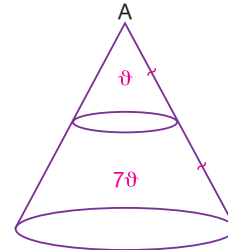
İçi suyla dolu 8 birim yüksekliğindeki bir dik koninin taban dairesinde bir delik açılıp suyun dışarıya dökülmesi sağlanıyor.

8 dakika sonra koni yüksekliğinin yarısına kadar boşaldığına göre, kalan suyun tamamen boşalması için kaç dakika zaman geçtiğini bulalım.

ÇÖZÜM

Konilerin taban yarıçapları oranı $\frac{1}{2}$ olduğundan,

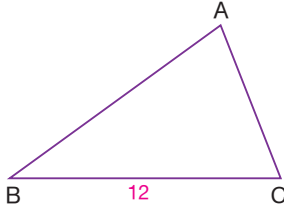
Hacimleri oranı $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ olur.



ϑ hacimlik kısmın boşalması için 8 dakika geçerse kalan 7ϑ hacimlik kısmın boşalması için,

$7 \cdot 8 = 56$ dakika zaman geçer.

ÖRNEK - 5



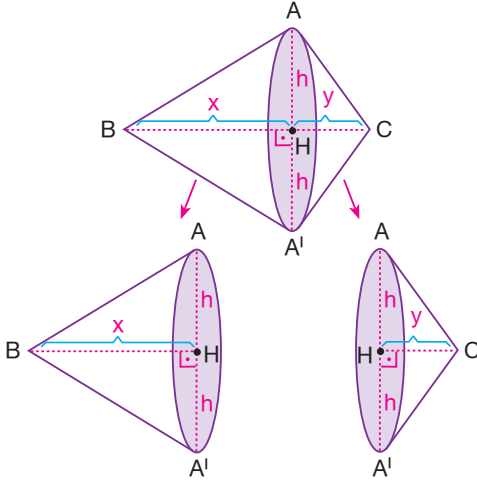
ABC üçgen
 $|BC| = 12$ birim
 $A(\triangle ABC) = 48 \text{ br}^2$

ABC üçgeninin [BC] etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak cismin hacmini bulalım.

ÇÖZÜM :

Oluşan cismin, taban yarıçap uzunluğu $r = h_a$ ve yükseklikleri toplamı $|BC|$ olan iki konidir.

$$A(\triangle ABC) = \frac{h \cdot 12}{2} = 48 \Rightarrow h = 8 \text{ birim dir.}$$



$$\text{Soldaki koninin hacmi : } V_1 = \frac{\pi \cdot h^2 \cdot x}{3}$$

$$\text{Sağdaki koninin hacmi : } V_2 = \frac{\pi \cdot h^2 \cdot y}{3} \text{ olup}$$

$$\text{Cismin hacmi : } V = V_1 + V_2 = \frac{\pi \cdot h^2}{3} (x + y)$$

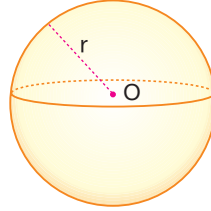
$$V = \frac{\pi \cdot h^2 \cdot 12}{3} = 4\pi h^2 \text{ olup}$$

$$V = 4\pi \cdot 8^2 = 256\pi \text{ br}^3 \text{ bulunur.}$$

Yukarıdaki soruyu pratik bilgiyi kullanarak çözmeye çalışınız.

Küre :

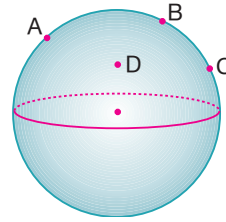
Uzayda sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaların belirttiği yüzeye **küre yüzeyi**, sabit olan noktaya **küre yüzeyinin merkezi**, merkezden küre yüzeyine olan uzaklığa **kürenin yarıçapı** ve küre yüzeyi ile sınırlanan bölgeye **küre** denir.



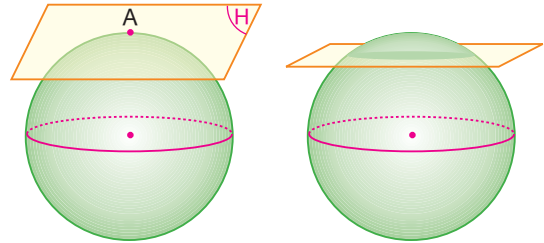
$$\text{Hacmi} = V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{Alanı} = 4\pi r^2$$

➤ Aynı düzlemde bulunmayan dört nokta bir tek küre yüzeyi belirler.

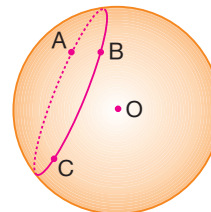


➤ Bir küre yüzeyi ile kesişen düzlemin arakesiti çember veya tek noktadır.



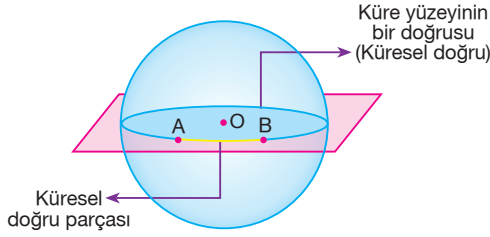
H düzlemi küreye A noktasında teğet

➤ Bir küre yüzeyi üzerindeki üç farklı noktadan bir ve yalnız bir çember geçer.

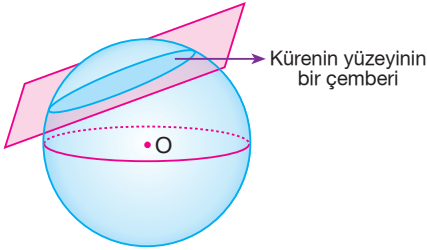




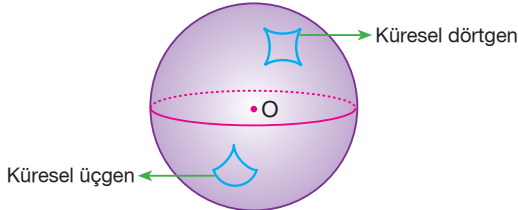
- Bir küre yüzeyi ile kürenin merkezinden geçen düzlemin arakesitine **küre yüzeyinin doğruları** denir.



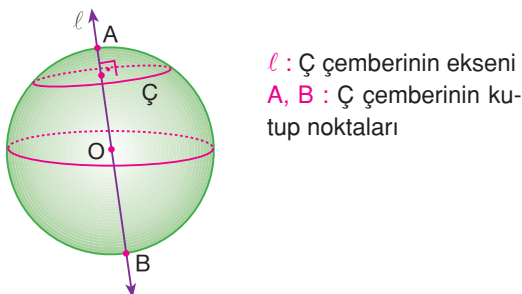
- Bir kürenin merkezinden geçmeyen ve küre ile birden fazla noktada kesişen düzlem ile arakesiti-ne **küre yüzeyinin çemberi** denir.



- Bir küre yüzeyi üzerinde çizilen şekillere **küresel şekiller** denir.

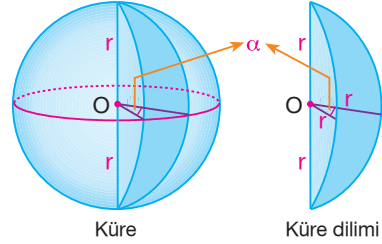


- Bir küre yüzeyi üzerindeki bir çemberin merkezinden çıkılan dikmeye **çemberin ekseni** ve küre yüzeyindeki bir çemberin ekseni ile küre yüzeyinin arakesit noktalarına bu çemberin **kutup noktaları** denir.



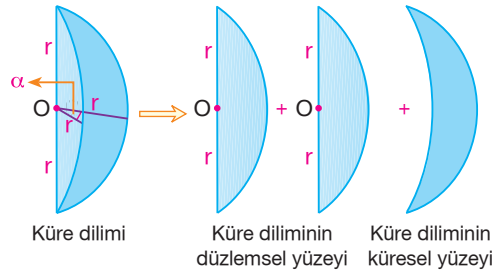
Küre Dilimi :

İki yarı düzlemle küre yüzeyi arasında kalan cis-me **küre dilimi** denir.



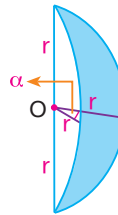
α : küresel yüzey açısı

- Küre dilimi üzerindeki düzlem küresel yüzey parçalarına küre diliminin **düzlemsel** ve **küresel yüzeyleri** denir.



$$\text{Küre diliminin alanı} : A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{90^\circ} + \pi r^2$$

Küre Diliminin Küresel Yüzeyinin Alanı :



α derece cinsinden ise

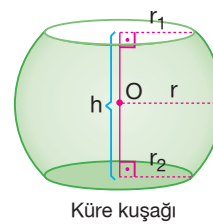
$$\text{Taralı alan} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{90^\circ}$$

α radyan cinsinden ise

$$\text{Taralı alan} = 2 \cdot r^2 \cdot \alpha$$

Küre Kuşağı :

Bir küre yüzeyinin paralel iki düzlem arasında ka-lan parçasına **küre kuşağı** denir.

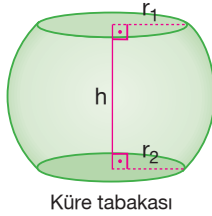


$$\text{Küre kuşağının alanı} : A = 2\pi \cdot r \cdot h$$



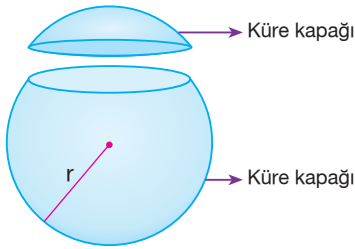
Küre Tabakası :

Küre kuşağı ile paralel düzlemler arasında kalan cisme **küre tabakası** denir.

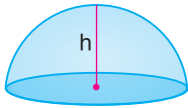


Küre Kapağı :

Küre yüzeyinin bir düzlemlle kesilmesi sonucunda elde edilen parçaların herbirine **küre kapağı** denir.



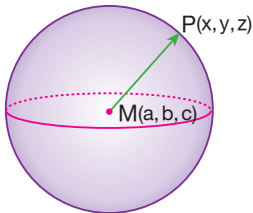
r yarıçaplı bir küreden kesilen h yüksekliğindeki küre kapağının alanı,



$$A = 2\pi rh$$

Küre Denklemi :

Merkezinin koordinatları $M(a, b, c)$ ve yarıçap uzunluğu r olan kürenin vektörel denklemi,



$$\|\vec{MP}\| = r$$

Kapalı (analitik) denklemi,

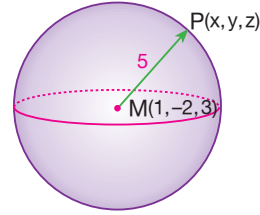
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \text{ dir.}$$

ÖRNEK - 1

Merkezinin koordinatları $M(1, -2, 3)$ ve yarıçap uzunluğu $r = 5$ birim olan kürenin vektörel ve analitik denklemlerini bulalım.

ÇÖZÜM :

$M(1, -2, 3)$ ve $r = 5$ birim ise



Kürenin vektörel denklemi,

$M(1, -2, 3)$ olmak üzere, $\|\vec{MP}\| = 5$ ve

Analitik denklemi,

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25 \text{ bulunur.}$$

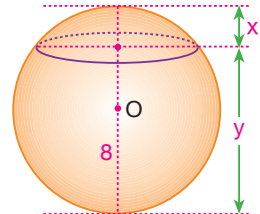
ÖRNEK - 2

Bir küreden küre kapağı kesilerek geriye kalan küre kapağının alanı $160\pi \text{ br}^2$ dir.

Kürenin yarıçap uzunluğu 8 birim olduğuna göre kesilen küre kapağının yüksekliğini bulalım.

ÇÖZÜM :

Küre kapağının yüzeyi x olsun.



$$2\pi r \cdot y = 160\pi$$

$$2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot y = 160\pi \Rightarrow y = 10 \text{ birim olup}$$

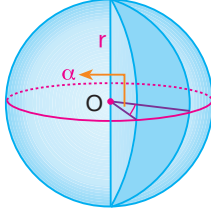
Kesilen küre kapağının yüksekliği,

$$x = 16 - 10 = 6 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

Küresel yüzey alanı $24\pi br^2$ olan bir küre diliminin küresel yüzey açısı $\frac{2\pi}{5}$ radyan ise kürenin büyük çemberinin yarıçapını bulalım.

ÇÖZÜM :



Küre diliminin küresel yüzey alanı,

$A = 2r^2 \cdot \alpha$ eşitliğinden,

$$24\pi = 2 \cdot r^2 \cdot \frac{2\pi}{5} \Rightarrow r = \sqrt{30} \text{ birim olur.}$$

Kürenin büyük çemberinin yarıçapı kürenin yarıçapına eşittir.

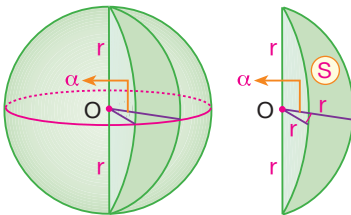
O halde, kürenin büyük çemberinin yarıçap uzunluğu $\sqrt{30}$ birim bulunur.

ÖRNEK - 4

Yarıçap uzunluğu 4 birim olan küreden bir küre dilimi çıkarılıyor.

Kalan parçanın tüm yüzey alanı $120\pi br^2$ olduğuna göre, çıkarılan küre diliminin küresel yüzey açısının ölçüsünü bulalım.

ÇÖZÜM :



S; Küre diliminin yüzey alanı

Kürenin yarıçapı 4 birim ise,

$$\text{Yüzey alanı : } A = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi 4^2 = 64\pi br^2 \text{ dir.}$$

Kalan parçanın yüzey alanında bulunan yarım dairelerin alanları çıkartılırsa kalan parçanın küresel yüzey alanının buluruz.

$$120\pi - 16\pi = 104\pi$$

Küre diliminin yüzey alanına S diyelim.

$$104\pi - S = 64\pi \Rightarrow S = 40\pi br^2 \text{ dir.}$$

O halde, $40\pi = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot \alpha}{90^\circ}$ eşitliğinden,

α küresel yüzey açısı 225° bulunur.

ÖRNEK - 5

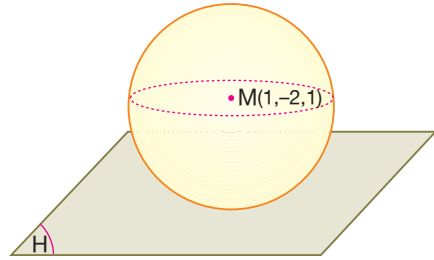
Uzayda analitik denklemi,

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2z + k = 0$$

olan küre $3x + 4y - 12z + 30 = 0$ düzlemine teğet olduğuna göre, kürenin yarıçap uzunluğunu bulalım.

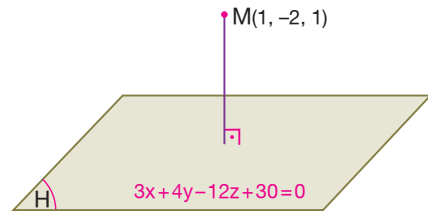
ÇÖZÜM :

Kürenin merkezinin koordinatları $M(1, -2, 1)$ olup,



Kürenin merkezinin düzleme uzaklığı kürenin yarıçap uzunluğuna eşittir.

O halde,



$$r = d(M, H) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 12 \cdot 1 + 30|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = 1 \text{ birim bulunur.}$$



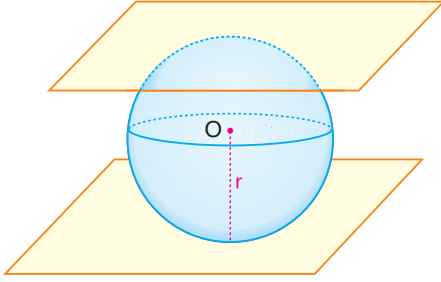
ÖRNEK - 6

$$2x + 3y + z - 1 = 0 \text{ ve } 2x + 3y + z + 13 = 0$$

düzlemlerine teğet olan kürenin yarıçap uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM :

Düzlemler paralel olup, düzlemler arasındaki uzaklık karenin uzunluğuna eşittir.



$$\text{O halde, } 2r = \frac{|-1-13|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}}$$

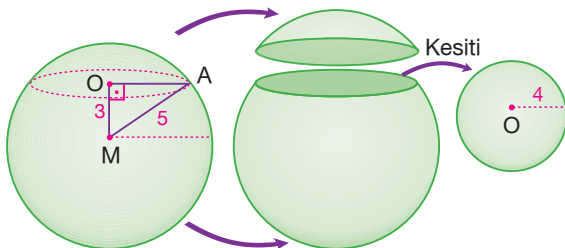
$$r = \frac{\sqrt{14}}{2} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK - 7

Yarıçap uzunluğu 5 birim olan içi dolu küre merkezinden 3 birim uzakta bir düzlemlle kesiliyor.

Buna göre, kesit alanının kaç br^2 olduğunu bulalım.

ÇÖZÜM :



MOA dik üçgeninde Pisagor teoremi ile,

$|OA| = 4$ birim olup

Kesit yüzeyi yarıçap uzunluğu 4 birim olan bu dairenin alanı $\pi \cdot 4^2 = 16\pi br^2$ bulunur.

Cavalieri (Kavalier) Prensibi :

İki geometrik cisim ve bir düzlem düşünelim. Eğer, bu düzleme paralel ve bu iki geometrik cismi kesen tüm düzlemlerin bu cisimlerle oluşturduğu arakesitlerinin alanları eşit ise bu cisimlerin hacimleri de eşittir.

YA DA

Yükseklikleri yani konumlarını hizaladığımızda alt ve üst tabanları aynı düzlemde olan herhangi iki farklı cisim alalım. Her iki cismin tabanından eşit uzaklıkta alınan tüm enine kesit alanları birbirine eşit ise bu iki cismin hacimleri eşittir.

Bu prensibe **Cavalieri prensibi** denir. Bu prensibi daha iyi anlaşılсын diye şöyle de açıklayabiliriz.

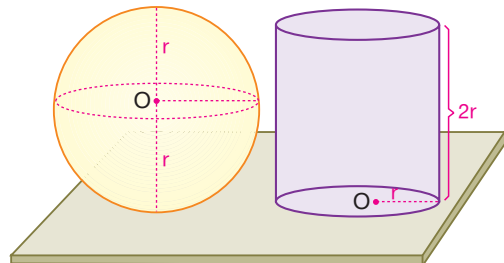
Masa üzerine iki değişik meyve (cisim) koyalım. Bir bıçakla (düzlem) masa yüzeyine paralel herhangi bir hareketle meyveleri kestiğimizde kesilen kısımların alanları eşit ise bu iki meyvenin hacimlerinin aynı olduğunu söyleyebiliriz.

ÖRNEK - 1

Cavalieri prensibi ile kürenin hacmini hesaplayalım.

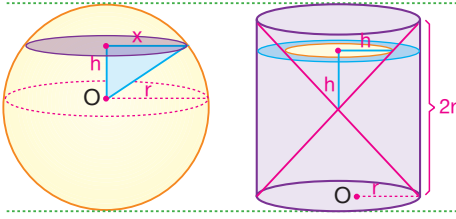
ÇÖZÜM :

Yarıçap uzunluğu r olan bir küre ile yarıçap uzunluğu r ve yüksekliği $2r$ olan bir silindiri düşünelim.





Masa yüzeyine paralel bir düzlemle küre ve silindiri keselim.



$$x^2 = r^2 - h^2$$

Kesit alanı

$$A_1 = \pi x^2 = \pi (r^2 - h^2)$$

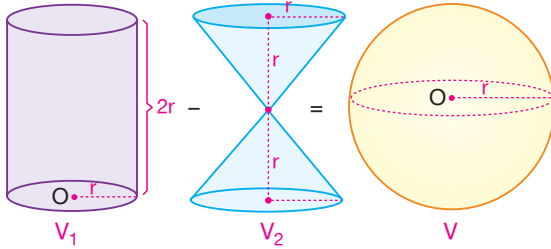
Daire halkasının alanı

$$A_2 = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot h^2 = \pi (r^2 - h^2)$$

O halde $A_1 = A_2$ dir.

Cavalieri prensibi gereği,

Kürenin hacmi, silindirin hacminden aşağıdaki gibi iki tane koninin hacimleri farkına eşittir. Yani,

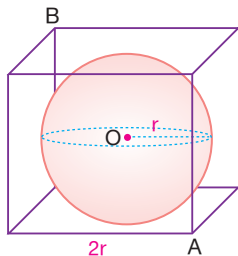


$$V = V_1 - V_2 \Rightarrow V = \pi \cdot r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{\pi r^2 \cdot r}{3}$$

$$V = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ bulunur.}$$

Kürenin Yüzey Alanına Yaklaşım :

Yarıçap uzunluğu r olan bir küreyi bir ayrıt uzunluğu 2r olan küpün içine koyalım.



Böylece küpün yüzey alanının kürenin yüzey alanından büyük olduğunu söyleyebiliriz.

Küpün yüzey alanı $24r^2$ olup bunun yarısı $12r^2$ dir.

$12r^2 \approx 4\pi r^2$ eşitliği kürenin yüzey alanına bir yaklaşım olarak düşünülebilir.

UZAYDA SÜSLEMELER

Kirigami :

Origami diye bilinen kağıt katlama sanatından türetilen bir sanattır. Kirigamide kağıt katlama yanında kesme işlemide yapılabilir. Japonya kökenli bir kelime olan kirigami, kiru (kesme) ve kami (kağıt) kelimelerinden oluşmuştur.



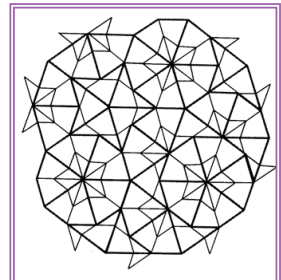
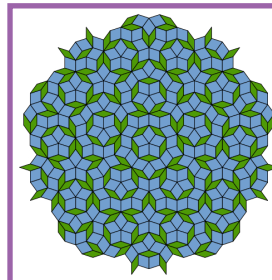
Çokyüzlülerle Oluşturulan Uzaysal Kaplamalar :

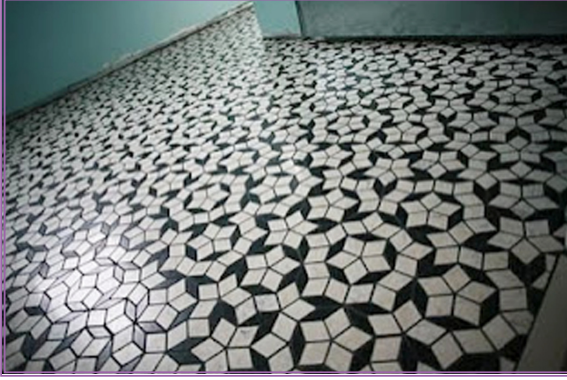
Sadece çokgensel bölgelerden (paralelkenar, dikdörtgen, eşkenar dörtgen, kare, düzgün altıgen) biriyile yalnız öteleme dönüşümü kullanılarak düzlemde boşluk kalmayacak şekilde ve çakışmayacak biçimde düzlemin örtülmesine **periyodik kaplama**, öteleme dönüşümü kullanılmadan düzlemde boşluk kalmayacak ve çakışmayacak biçimde yüzeyin çokgensel bölgeyle örtülmesine **periyodik olmayan kaplama** denir.

Pentapleks Kaplama :

Beşli dönme simetrisine sahip periyodik olmayan kaplamalara **pentapleks kaplama (beşli dönme simetrikli kaplama)** denir.

Aşağıdaki Penrose karoları pentapleks kaplamalara birer örnektir.





Zeminin Penrose karoları ile kaplanması

Penrose Karoları :

Penrose karoları 1973 yılında ünlü İngiliz Fizikçi Sir Roger Penrose tarafından bulunmuştur. Bu karoların en önemli özelliği düzlemi sonsuza kadar kaplayabilmeleri fakat periyodik olarak kaplamalarının imkânsız olmasıdır. Düzlemi periyodik olmadan kaplayabilen karo kümelerinin araştırılması 1960'lı yılların başına rastlar. Penrose'a gelinceye kadar bu karo minimum sayısı altıya düşürülmüştü. Penrose bu sayıyı ikiye düşürmeyi başarmıştır. Penrose beşgensel simetriyi kullanarak iki adet ikili ve bir adette altılı olmak üzere toplam üç farklı karo kümesi keşfetmiştir. Penrose'un keşfetmiş olduğu karo kümelerinin bir önemli özelliği de ondan önceki karoların temel kare şeklinde olmaları fakat Penrose'un karolarının altın üçgenler kullanılarak yapılabilmesidir. Kare şeklindeki karolarla beşli dönel simetriye sahip kaplamalar mümkün olmadığı halde Penrose'un karo kümeleriyle beşli dönel simetriye sahip kaplamalar yapılması mümkündür. Düzlemi bu özelliklerle kaplayabilen başka karo kümeleri de mevcuttur. Bu karo kümeleri kullanılarak yapılan kaplamalar Pentapleks Kaplamalar olarak adlandırılırlar.

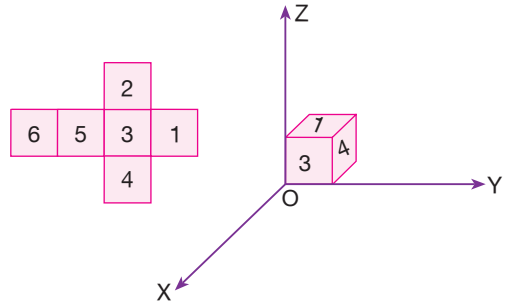
Yapıların Döndürülmesi :

Bir cismin yalnız bir yüzeyinin görüntüsü o cismi tanımlamaya yetmez. Bu nedenle cismin farklı yönlerden çizilmesi gerekir.

Önden görünümü verilen bir cismin üsten görünümünü bulmak için cisim Y eksenine göre saat yönünün tersinde 90° döndürülür.

Önden görünümü verilen cismin sağdan görünümünü bulmak için cisim Z eksenine göre saatin dönme yönünde 90° döndürülür.

ÖRNEK - 1



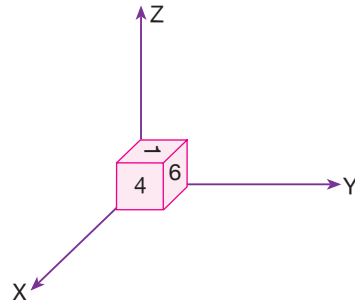
Yukarıda açılımı ile birlikte verilen küp Z eksenini etrafında saat yönünde 90° döndürülürse hangi hali alacağını bulalım.

ÇÖZÜM :

Açınımına bakılırsa karşılıklı yüzlere,

- 1 ile 5
- 3 ile 6
- 2 ile 4 sayılarının geldiği görülür.

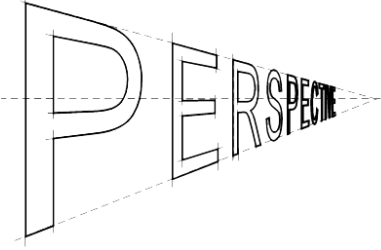
O halde, küp Z eksenini etrafında saat yönünde 90° döndürülürse aşağıdaki şekli alır.





PERSPEKTİF ÇİZİM

Bir ve İki Noktalı Perspektif Çizimler :



İki boyutlu resim kağıdında, üçüncü boyutu yani derinliği verebilmek için kullanılan tekniğe **perspektif** denir.

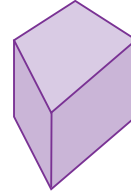
Perspektif, cismin üç yüzünde gösteren tek görünüşlü resimdir.

Perspektif çizimler daha çok;

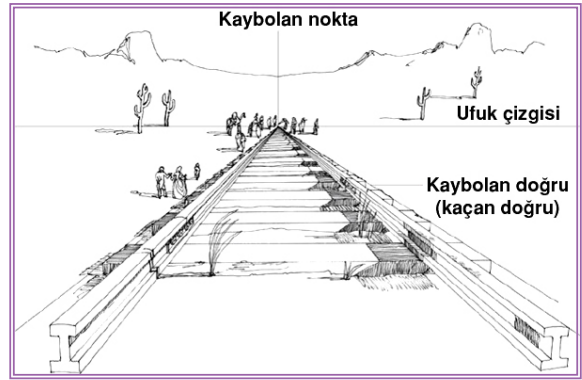
- Mimaride
- Güzel sanatlarda
- Mobilya imalatında kullanılır.



- Bir cismin üstten görünümünü çizmek için **ufuk çizgisi** üstte seçilir, alttan görünümünü çizmek için ufuk çizgisi altta seçilir.
- Cismin sadece ön ve üst yüzeyinin görünümü için ufuk çizgisi üstte çizilir. Kaybolan nokta ise cismin merkezi hizasındadır.
- Bir cismin sol, ön ve alt yüzeyinin görünümü için ufuk çizgisi cismin alt tarafında ve kaybolan nokta cismin sol tarafında alınır.
- Bir cismin sağ, ön ve üst yüzeyinin görünümü için ufuk çizgisi cismin üst tarafında, kaybolan nokta cismin sağında alınır.
- Kaybolan nokta ufuk çizgisi üzerindedir.
- Cismin iki yan yüzeyi ile birlikte üst yüzeyide görünüyorsa perspektif çizimde iki tane **kaybolan nokta** kullanılır.



- İki nokta perspektifinde ufuk çizgisinde belirlenen iki kaybolan nokta kutunun ön yüzündeki dikey ayrıta eşit uzaklıkta alınırsa kutunun sağ ve sol yüzeyleri eşit görünür. Kaybolan iki nokta biri ön yüzdeki dikey ayrıta daha yakın ise sağ ve sol yüzler farklı büyüklükte görünür.



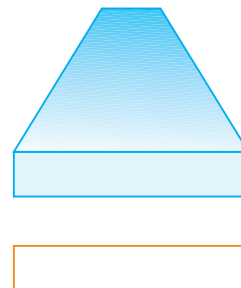
Tek Nokta Perspektifi :

Ön Yüzü ve Üst Yüzü Görünen Cisimlerin Perspektif Çizimi :

- Perspektif çizimi yapılacak cismi ön yüzü ile üst tabanı görülecek şekilde yerleştirelim.

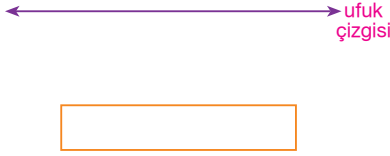


- Cisim ön yüzü için kağıt düzlemine bir dikdörtgen çizelim.

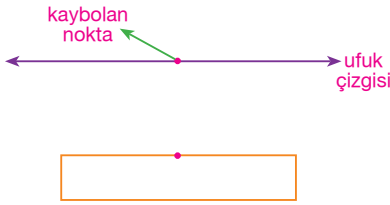




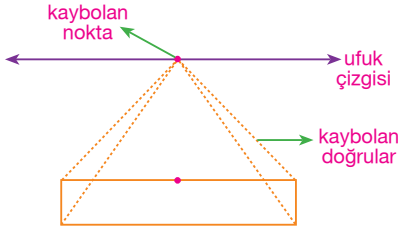
- Dikdörtgenin üst tarafına dikdörtgene paralel olacak şekilde bir doğru (ufuk çizgisi) çizelim.



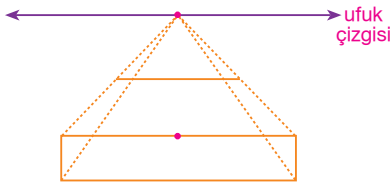
- Dikdörtgenin tabanının orta noktası hizasında bir nokta (kaybolan nokta) belirleyelim.



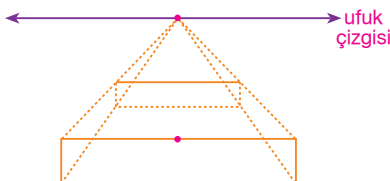
- Belirlediğimiz noktaya dikdörtgenin dört köşesinden noktalı doğru parçaları (kaybolan doğrular) çizelim.



- Kaybolan doğrular arasında kalacak ve yatay doğruya paralel olacak şekilde doğru parçası çizip, cismin üst ayrırtını oluşturalım.



- Arka taraftaki diğer dikey ve yatay doğru parçalarını kesikli çizgiyle gösterebiliriz.

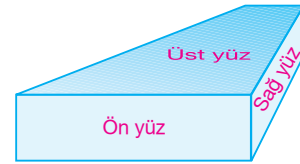


- Son olarak fazla çizgileri silerek perspektif çizimi tamamlayalım.

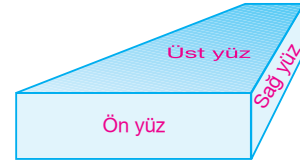


Ön Yüzü, Sağ Yüzü ve Üst Yüzü Görünen Cisimlerin Perspektif Çizimi :

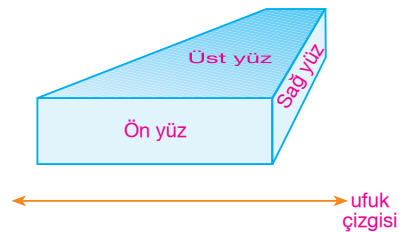
- Perspektif çizimi yapılacak cismi ön yüzü, üst tabanı ve sağ yüzü görülecek şekilde yerleştirelim.



- Kutunun ön yüzü için kağıt düzlemine bir dikdörtgen çizelim.



- Dikdörtgenin üst tarafına dikdörtgene paralel bir doğru (ufuk çizgisi) çizelim.

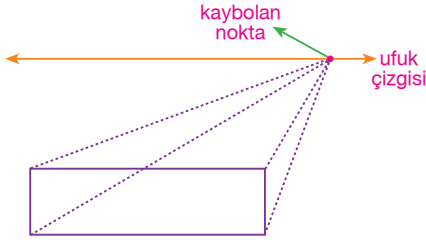




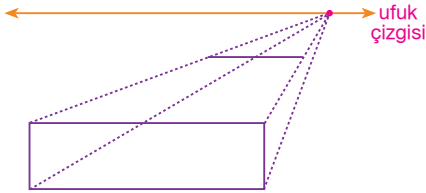
- Dikdörtgenin sağ tarafında kalacak şekilde doğru üzerinde bir nokta (kaybolan nokta) alalım.



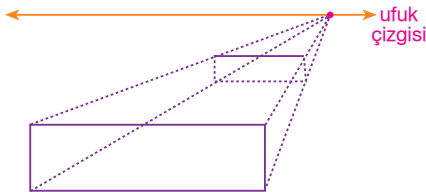
- Belirlediğimiz noktaya dikdörtgenin dört köşesinden noktalı doğru parçaları (kaybolan doğrular) çizelim.



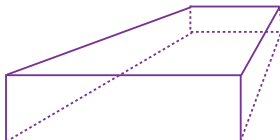
- Kaybolan doğrular arasında yatay doğruya paralel olacak şekilde doğru parçası çizip, cismin üst ayırıtını oluşturalım.



- Arka taraftaki diğer dikey ve yatay doğru parçalarını kesikli çizgiyle gösterelim.

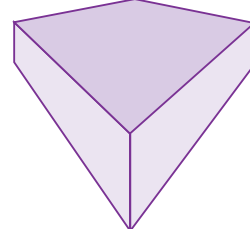


- Son olarak fazla çizgileri silerek perspektif çizimi tamamlayalım.

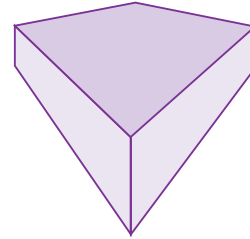


Üst Yüzü ve Yan Yüzleri Görünen Cisimlerin Perspektif Çizimi :

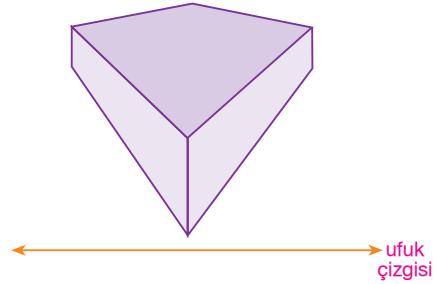
- Perspektif çizimi yapılacak cismi aynı köşeden kesişen üç yüzünden üst yüzü ile sağ ve sol yanı görülecek şekilde yerleştirelim.



- Kutunun kağıt düzlemine paralel olmayan ön yüzündeki ayırıt için dikey bir doğru parçası çizelim.

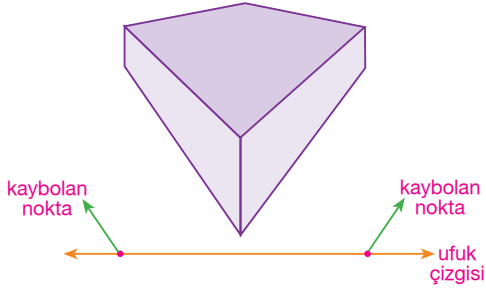


- Dikey doğru parçasının üst tarafına yatay bir doğru (ufuk çizgisi) çizelim.

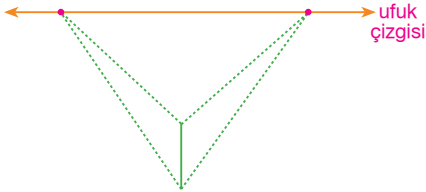




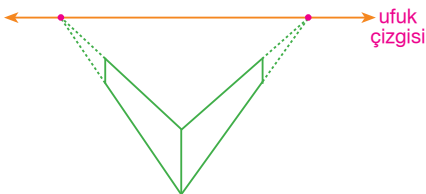
- Doğrunun sağ ve sol tarafına da birer nokta (kaybolan noktalar) belirleyelim.



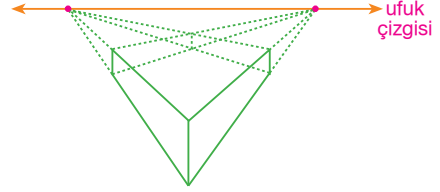
- Dikey doğru parçasının uçlarını noktalı doğrularla doğru üzerindeki noktalara birleştirelim.



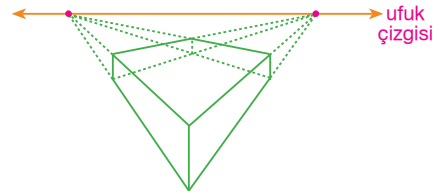
- Cismin uzunluğu ve genişliği için noktalı doğrular arasına dikey doğrular çizelim.



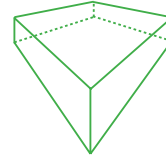
- Cismin arkasında kalan ve görünmeyen ayrıtlarını çizeceğimiz doğruları çizelim.



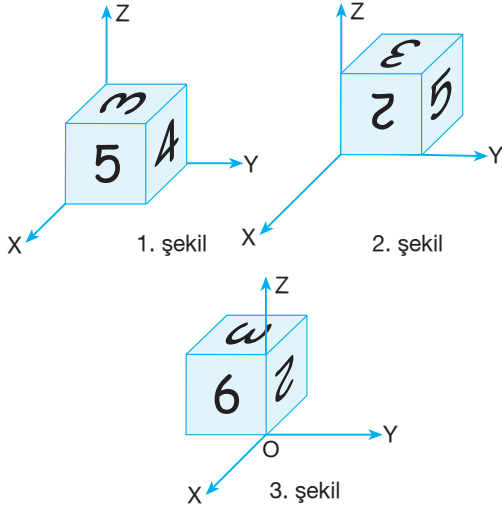
- Üst tabanı ve görünmeyen yüzleri oluşturalım.



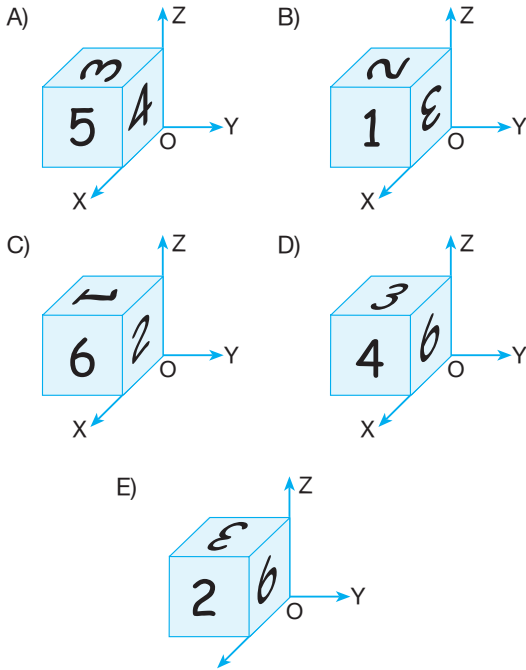
- Son olarak fazla çizgileri silerek perspektif çizimi tamamlayalım.



1. Aşağıda bir küpün Z ekseninde sırasıyla 90° , 180° , 270° döndürülmüş halleri verilmiştir.



Buna göre, başlangıç durumu aşağıdakilerden hangisidir?



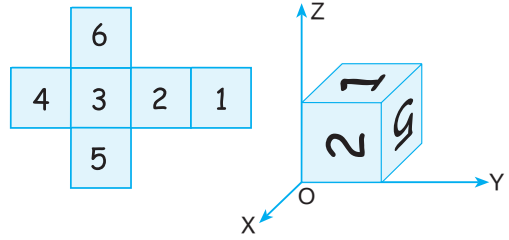
2. Pentapleks kaplamalarda kaçlı dönme simetrisi kullanılmıştır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 8 E) 10

3. Öteleme dönüşümü kullanılmadan düzlemde boşluk kalmayacak şekilde ve çakışmayacak biçimde çokgensel bölgelerle örtülen kaplamaya ne denir?

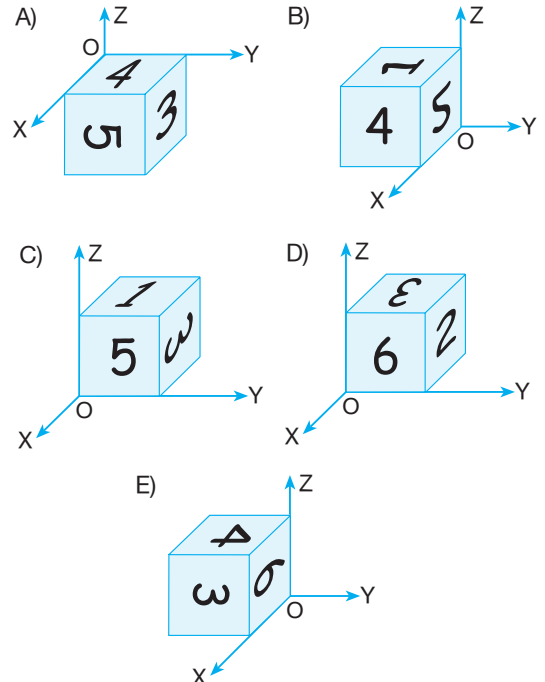
- A) Yarı düzgün kaplama
B) Düzlemsel kaplama
C) Düzgün kaplama
D) Periyodik kaplama
E) Periyodik olmayan kaplama

4.

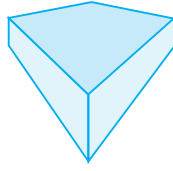


Yukarıda açılımı verilen küp, kapalı konuma getirildiğinde 1 rakamının bulunduğu yüz yukarı gelecek şekilde koordinat sistemine şekildeki gibi yerleştirilirse, bu küpün önce x eksenine göre saat yönünde 180° , sonra y eksenine göre saat yönünün tersine 270° döndürülüyor.

Buna göre, son durumda oluşan küpün şekli aşağıdakilerden hangisidir?



5.



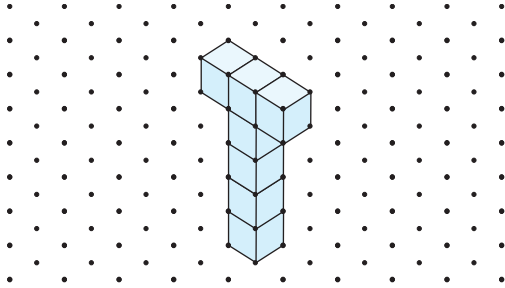
Yukarıdaki şeklin perspektif çizimi için,

- I. Tek nokta perspektif çizimi kullanılmıştır.
- II. Kaybolan noktalar şeklin altındadır.
- III. Ufuk çizgisi şeklin üstündedir.

verilen ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

- A) Yalnız I
- B) Yalnız II
- C) Yalnız III
- D) I ve II
- E) I, II ve III

6.



Yukarıda verilen birim küplerden oluşmuş katı cisim en küçük hacimli küpe tamamlanarak bir uzay modeli oluşturulacaktır.

Buna göre, kaç tane daha birim küpe ihtiyaç vardır?

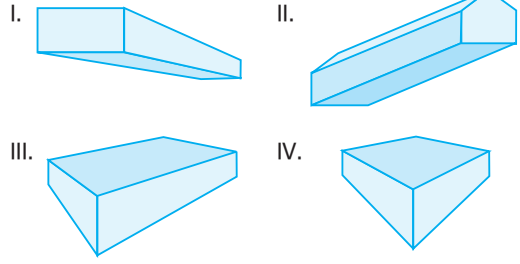
- A) 112
- B) 114
- C) 116
- D) 118
- E) 121

7. Kenar uzunlukları sırasıyla 12 cm, 24 cm, 30 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki uzay modeli en büyük hacimli eş küplerle kaplanmak isteniyor.

Buna göre, en az kaç tane küp gerekir?

- A) 168
- B) 172
- C) 184
- D) 190
- E) 200

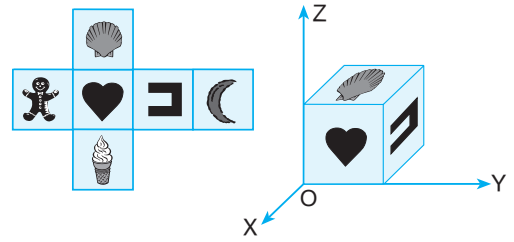
8.



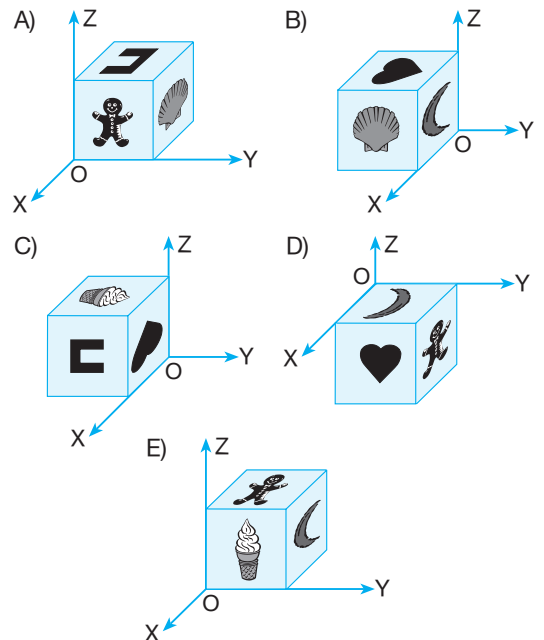
Yukarıda verilen perspektif çizimlerinin kaç tanesinde iki nokta perspektif çizilmi kullanılmıştır?

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

9.



Yukarıda açınımi verilen küp kapalı konuma getirildiğinde resminin bulunduğu yüz yukarı gelecek şekilde koordinat sistemine yerleştirilirse bu küpün önce Z eksenine göre saat yönünde 90°, sonra X eksenine göre saat yönünde 180° döndürülmesiyle oluşan şekil aşağıdakilerden hangisidir?





1. – Silindir
– Prizma
– Koni
– Küre
– Kare piramit

Yukarıdaki cisimlerden kaç tanesi çokyüzeylidir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. Bir tabanı $2x - 3y + 5z - 1 = 0$ düzlemi üzerinde bulunan yeterince büyük bir kare prizmanın $4x - 6y + 10z + 3 = 0$ düzlemi ile arakesiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) Üçgen B) Kare
C) Eşkenar dörtgen D) Beşgen
E) Deltoid

3. Taban yarıçapı 4 birim olan bir kesik dik daire silindirin kesik tabanının alanı 32π br² olduğuna göre, kesik tabanın silindirin alt tabanı ile yaptığı açının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

4. Uzayda bir küre yüzeyinin bir doğrusu üzerinde alınan ve birbirine en uzak iki noktası,

$$A(1, -2, 3) \text{ ve } B(-2, 2, -9)$$

olduğuna göre, kürenin yüzey alanı kaç br² dir?

- A) 100π B) 121π C) 144π
D) 169π E) 196π

5. Yarıçap uzunluğu 5 birim olan bir küreden 4 birim yüksekliğinde bir küre kuşağı kesiliyor.

Buna göre, oluşan küre kuşağının alanı kaç br² dir?

- A) 25π B) 30π C) 35π D) 40π E) 45π

6. Yarıçap uzunluğu 7 birim olan bir küre merkezin-den 5 birim uzaklıkta bir düzlemle kesiliyor.

Buna göre, elde edilen büyük kapağın tüm alanın kaç br² dir?

- A) 288π B) 276π C) 244π
D) 230π E) 220π

7. Uzayda,

$$\vec{A} = (-1, 2, 3), \vec{B} = (0, -4, 1) \text{ ve } \vec{C} = (2, 3, -5)$$

üzerine kurulu paralelyüzlünün hacmi kaç br³ tür?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

8. Merkezinin koordinatları $M(-2, 3, 4)$ olan küre yOz düzlemine teğet olduğuna göre, yarıçapı kaç birimdir?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

9. $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - ny + 6z + k = 0$ küresi xOy düzlemine teğet olduğuna göre, yarıçapı kaç birimdir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



10. $x^2 + y^2 + z^2 + kx + my + nz + p = 0$ küresi xOy , xOz ve yOz düzlemlerine teğet olduğuna göre, $\frac{k+n}{m}$ oranı kaçta eşit olabilir?
- A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

11. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ küresinde birbirine dik teğetlerin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemi nedir?
- A) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$
 B) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 12$
 C) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 15$
 D) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 18$
 E) $(x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 21$

12. n pozitif reel sayı olmak üzere:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y + 2z - 10 = 0$$

küresine üzerindeki $P(1, 2, n)$ noktasından çizilen ve küreye teğet olan düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2x + y - z = 0$
 B) $x + 5y + z - 14 = 0$
 C) $x + 2y - z - 3 = 0$
 D) $x + y + 2z - 1 = 0$
 E) $2x - y + 2z - 6 = 0$

13. Bir küpün iki cisim köşegeni arasında kalan açının sinüs değeri aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?
- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ E) $\frac{7}{13}$

14. Yarıçap uzunluğu $3\sqrt{3}$ birim olan bir kürenin içine yerleştirilebilecek en büyük hacimli küpün bir ayrıtı kaç birimdir?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

15. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - ny + 6z + 4 = 0$ küresine orijinden çizilen teğet parçasının uzunluğu kaç birimdir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{6}$

16. Büyük yüksekliği 6 birim, küçük yüksekliği 4 birim ve taban yarıçapı 2 birim olan bir kesik koninin yanal alanı kaç br^2 dir?

- A) 15π B) 16π C) 18π D) 20π E) 24π

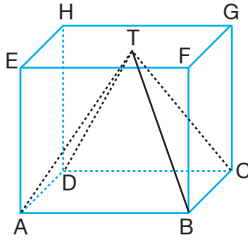
17. Yarıçap uzunluğu 4 birim olan bir kürenin küre yüzeyinin bir doğrusunun uzunluğu kaç birimdir?

- A) 6π B) 8π C) 10π D) 12π E) 14π

18. Yarıçap uzunluğu 6 birim olan bir kürenin 40° lik küre diliminin küresel yüzeyinin alanı kaç br^2 dir?

- A) 12π B) 14π C) 16π D) 18π E) 20π

1.

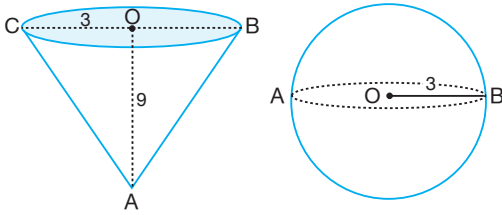


T noktası küpün yüzeyindedir.

Şekildeki küpün içindeki (T, ABCD) piramidi-
nin hacminin küpün hacmine oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

2.



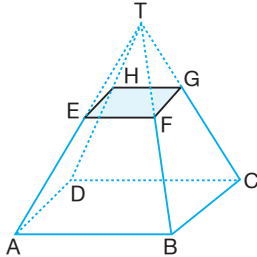
Şekildeki dik koni ve kürenin yarıçapları eşit ve 3 birimdir.

Koni ağzına kadar su ile doldurulup küreye boşaltıldığında kürenin yüzde kaç dolur?

- A) 75 B) 60 C) 55 D) 50 E) 40

3.

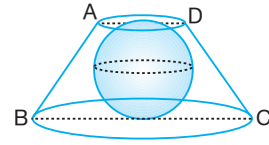
Aşağıdaki piramit tabandan itibaren yüksekliğin $\frac{2}{3}$ ü oranında tabana paralel bir düzlemlle kesiliyor.



Oluşan kesik piramidin hacmi 208 br^3 olduğuna göre, tüm piramidin hacmi kaç br^3 tür?

- A) 208 B) 216 C) 218 D) 224 E) 226

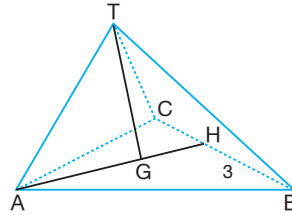
4.



Şekildeki $36\pi \text{ br}^3$ hacimli küre, kesik koninin tabanlarına teğet olduğuna göre, kesik koninin yüksekliği kaç birimdir?

- A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

5.



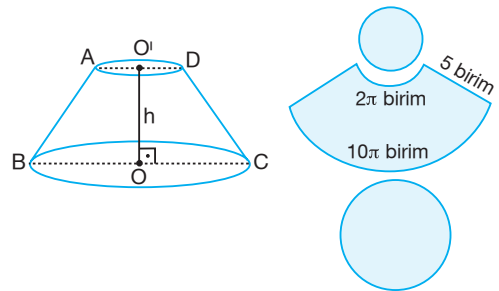
$[TG] \perp [AH]$
 $|GH| = 3$ birim

Şekildeki piramit bir düzgün dört yüzlüdür. G, tabanının ağırlık merkezidir.

Buna göre, düzgün dört yüzlünün hacmi kaç birim küptür?

- A) $48\sqrt{6}$ B) $54\sqrt{6}$ C) $60\sqrt{6}$
D) $72\sqrt{6}$ E) $84\sqrt{6}$

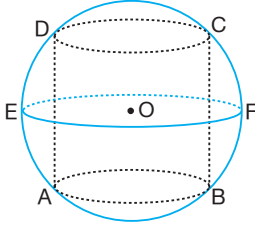
6.



Şekilde açık hali ile verilen kesik koninin yüksekliği kaç birimdir?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

7.

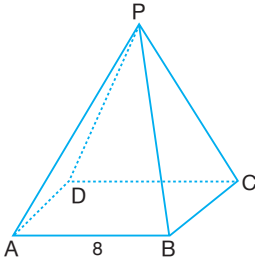


Şekildeki kürenin yarıçapı 3 birim ve silindirin yüksekliği 4 birim

Buna göre, silindirin hacmi kaç br^3 tür?

- A) 14π B) 16π C) 18π D) 20π E) 22π

8.

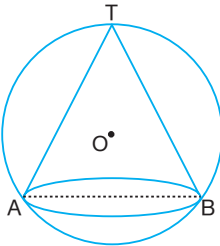


Şekilde yüksekliği 6 birim olan düzgün kare piramit verilmiştir.
 $|AB| = 8$ birim

Buna göre, piramidin içine yerleştirilebilecek en büyük hacimli küpün bir ayrıtı kaç birimdir?

- A) $\frac{24}{7}$ B) 3 C) $\frac{19}{7}$ D) $\frac{16}{7}$ E) 4

9.



Şekilde taban yarıçapı 6 cm olan dik koninin tepe noktası ve taban çemberi O merkezli kürenin yüzeyindedir.

Dik koninin hacmi $216\pi \text{ cm}^3$ olduğuna göre, kürenin yarıçapı kaç cm dir?

- A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) 15

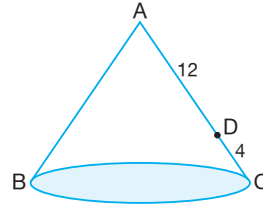
10. Tüm ayrıtları toplamı 12 birim olan düzgün dört-yüzlünün yüzey alanı kaç birim karedir?

- A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $5\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

11. Bir ayrıtı 4 birim olan küpün yüzey köşegeninin cisim köşegeni üzerindeki dik izdüşüm uzunluğu kaç birim olur?

- A) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{12\sqrt{3}}{5}$
D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

12.

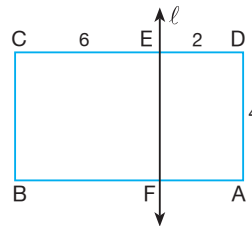


$|AD| = 12$ birim
 $|DC| = 4$ birim

Şekilde taban çevresi 16π birim olan dik koni şeklindeki dağın yüzeyi üzerinde B noktasından D noktasına gidilen en kısa yol kaç birimdir?

- A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 30

13.



$\ell \parallel [AD]$
 $|AD| = 4$ birim
 $|DE| = 2$ birim
 $|EC| = 6$ birim

ABCD dikdörtgensel levhanın ℓ doğrusu etrafında 180° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi $\pi \text{ br}^3$ tür?

- A) 72 B) 75 C) 80 D) 90 E) 100